Πανεπιστήμιο Αιγαίου

URL: http://www.aegean.gr

Ανάλυση Ι

Μέρος 1ο

Αντώνης Τσολομύτης
Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Τμήμα Μαθηματικών
832 00 Γοργύρα
Σάμος

Ενότητα 1η

Σύνολα Αριθμών

1.1. Τα σύνολα $\mathbb{N}$ και $\mathbb{Z}$

Αξίωμα 1.1.1 (Επαγωγή) *Αν $A \subseteq \mathbb{N}$ με την ιδιότητα «$1 \in A$ και όταν $n \in A$ συνεπάγεται $n+1 \in A$» τότε $A = \mathbb{N}$.*

Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Παραλλαγή του παραπάνω αξιώματος είναι το

Αξίωμα 1.1.2 (Πλήρης επαγωγή) *Αν $A \subseteq \mathbb{N}$ με την ιδιότητα «$1 \in A$ και όταν $k \in A$ για όλα τα $k < n$ συνεπάγεται $n \in A$» τότε $A = \mathbb{N}$.*

Μια σημαντική συνέπεια του αξιώματος της επαγωγής είναι η αρχή του ελαχίστου:

Θεώρημα 1.1.3 *Κάθε μή κενό υποσύνολο A του $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο στοιχείο.*

Το σύνολο $\mathbb{Z}$ μπορεί να οριστεί από το $\mathbb{N}$. Διαισθητικά μιλώντας, προσθέτουμε στο $\mathbb{N}$ το σύμβολο 0 (μηδέν) ορίζοντας να έχει την ιδιότητα $n+0=n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης εισάγουμε ένα νέο σύμβολο $-$ (πλήν) και ορίζουμε $-n := (-, n)$ (διατεταγμένο ζεύγος). Τέλος ορίζουμε τις εξής σχέσεις:

$$-0 := 0, \quad -(-n) := n, \quad n-m := -(m-n),$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ με $m \geq n$. Ως προς τη διάταξη επεκτείνουμε αυτή του $\mathbb{N}$ θέτωντας

$$-n < 0 < n, \quad n < m \Leftrightarrow -n > -m,$$

για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$.

1.2. Τα σύνολα $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$

Για τα κλάσματα θα μπορούσαμε να θέσουμε $\frac{a}{b} = (a, b)$ για κάθε $a \in \mathbb{Z}$ και $b \in \mathbb{N}$. Με αυτή τη σύμβαση όμως δεν θα μπορούσαμε να ορίσουμε άμεσα το σύνολο των ρητών αριθμών αφού τα στοιχεία $(1,2)$ και $(2,4)$ θα πρέπει να αντιστοιχούν στο ίδιο στοιχείο του $\mathbb{Q}$. Έτσι για να ορίσουμε το σύνολο $\mathbb{Q}$ θεωρούμε το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ και σε αυτό ορίζουμε μιά σχέση ισοδυναμίας θέτωντας $(a,b) \sim (x,y)$ αν και μόνο αν $ay = bx$. Τώρα ορίσουμε το $\mathbb{Q}$ ως το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας $(\mathbb{Z}\times\mathbb{N})/\!\sim$. Δηλαδή το κλάσμα $\frac{1}{2}$ ορίζεται ως η κλάση ισοδυναμίας $[(1,2)]$.

Σε αυτό το σύνολο ορίζουμε τις πράξεις «κατά τα γνωστά», δηλαδή θέτουμε για παράδειγμα

$$[(a,b)] + [(x,y)] = [(ay+bx, by)] \qquad \left(\text{δηλαδή, } \frac{a}{b} + \frac{x}{y} = \frac{ay+bx}{by}\right), \text{ κλπ.}$$

Ορισμός 1.2.1 *Διατεταγμένο σώμα ειναι ένα σώμα F το οποίο έχει και μία διάταξη $<$ ώστε*

(αʹ) *Αν $x, y, z \in F$ και $y < z$ τότε $x + y < x + z$.*

(βʹ) *Αν $x, y \in F$ με $x > 0$ και $y > 0$ τότε $xy > 0$.*

Ονομάζουμε το στοιχείο x «θετικό» αν $x > 0$ και «αρνητικό» αν $x < 0$.

Ορισμός 1.2.2 *Για ένα σώμα F λέμε ότι έχει την «ιδιότητα του ελαχίστου άνω φράγματος» αν για κάθε $A \subseteq F$ είτε το A είναι μη άνω φραγμένο είτε έχει ελάχιστο άνω φράγμα. Δηλαδή είτε για κάθε $x \in F$ υπάρχει $y \in A$ ώστε $x < y$ είτε υπάρχει $x \in F$ ώστε αν $x < y$ τότε $y \notin A$, και το x είναι το ελάχιστο στοιχείο του F με αυτή την ιδιότητα.*

Θεώρημα 1.2.3 *Υπάρχει διατεταγμένο σώμα $\mathbb{R}$ με την ιδιότητα του ελαχίστου άνω φράγματος. Επιπλέον το $\mathbb{R}$ περιέχει το $\mathbb{Q}$ ως υποσώμα (οι πράξεις το $\mathbb{R}$ περιορισμένες στα στοιχεία του $\mathbb{Q}$ είναι ακριβώς οι πράξεις του $\mathbb{Q}$.*

Το $\mathbb{R}$ ορίζεται ως το σύνολο των τομών Dedekind του $\mathbb{Q}$· δηλαδή ως το σύνολο των υποσυνόλων του $\mathbb{Q}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(αʹ) $a \in \mathbb{R}$ τότε $a \neq \emptyset$ και $a \neq \mathbb{Q}$.

(βʹ) για κάθε a στο $\mathbb{R}$ αν $p \in a, q \in \mathbb{Q}$ και $q < p$ τότε $q \in a$ (το a είναι κάτω τελικό).

(γʹ) για κάθε a στο $\mathbb{R}$ και $p \in a$ υπάρχει $r \in a$ ώστε $p < r$ (το a είναι πάνω ανοικτό).

Θεώρημα 1.2.4 (αʹ) *Αρχή του Αρχιμήδη: αν $x, y \in \mathbb{R}$ με $x > 0$ τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $nx > y$.*

(βʹ) *Πυκνότητα του $\mathbb{Q}$: αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $x < y$ τότε υπάρχει $p \in \mathbb{Q}$ ώστε $x < p < y$.*

Θεώρημα 1.2.5 (Ύπαρξη n-στης ρίζας) *Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x και κάθε θετικό ακέραιο n υπάρχει ένας θετικός πραγματικός αριθμός y ώστε $y^n = x$*

Πόρισμα 1.2.6 *Για κάθε $a, b > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $(ab)^{1/n} = a^{1/n}b^{1/n}$.*

Παρατηρήστε ότι για κάθε a στο $\mathbb{R}$ η ακολουθία $[na]/n$ αποτελείται από ρητούς και συγκλίνει στο a.

Ορισμός 1.2.7 *Το αναπτυγμά του αριθμού $a \in \mathbb{R}$ ως προς τη βάση $\beta \in \mathbb{N}$ ορίζεται να είναι η ακολουθία*

$$\left(\frac{[\beta^n a]}{\beta^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Για παράδειγμα η ακολουθία $[10^n a]/10^n$ αποτελεί το δεκαδικό ανάπτυγμα του a ενώ η $[2^n a]/2^n$ το δυαδικό ανάπτυγμα του a.

Ασκήσεις

Άσκηση 1. Δείξτε με επαγωγή ότι

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 2. Δείξτε με επαγωγή ότι για κάθε $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n \in \mathbb{R}$ ισχύει η ανισότητα Cauchy-Schwartz:

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \leq \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)^{1/2} \left(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2\right)^{1/2}.$$

Άσκηση 3. Για κάθε $x > 0$ και για κάθε $y \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $nx > y$.

Άσκηση 4. Δείξτε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$ υπάρχει $p \in \mathbb{Q}$ ώστε $x < p < y$· και υπάρχει $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ώστε $x < r < y$.

Άσκηση 5. Δείξτε ότι αν $A \neq \emptyset$ και α κάτω φράγμα του A, και β άνω φράγμα του A τότε $\alpha \leq \beta$. Ισχύει αυτό αν $A = \emptyset$;

Οδηγός Ασκήσεων
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Σελίδα 6 από 30
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Ενότητα 2η

Στοιχεία τοπολογίας του $\mathbb{R}$

2.1. Ανοικτά σύνολα, σημεία συσσώρευσης

Ορισμός 2.1.1 *Κάθε σύνολο της μορφής* $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \, : \, a < x < b\}$ *λέγετε «ανοικτό διάστημα» με κάτω άκρο το* a *και άνω άκρο το* b.

Ορισμός 2.1.2 *Κάθε ανοικτό διάστημα της μορφής* $(x = \varepsilon, x + \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) *λέγετε ανοιχτή περιοχή του* x *με ακτίνα* ε. *Το* x *λέγετε «κέντρο» του διαστήματος.*

Ορισμός 2.1.3 *Περιοχή (ανοικτή περιοχή) ενός σημείου* $x \in \mathbb{R}$ *ονομάζουμε κάθε ανοικτό διάστημα* (a, b) *ώστε* $x \in (a, b)$.

Ορισμός 2.1.4 *Αν* $A \subseteq \mathbb{R}$, *το* $x \in \mathbb{R}$ *λέγεται σημείο συσσώρευσης του συνόλου* A *αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *ισχύει*

$$\big((x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap A\big) \setminus \{x\} \neq \emptyset.$$

Οδηγός Ασκήσεων
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Σελίδα 7 από 30
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Πόρισμα 2.1.5 *Αν x σημείο συσσώρευσης του συνόλου A τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A$ είναι απειροσύνολο.*

[Διαλέξτε ένα σημείο στο $(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \cap A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.]

Θεώρημα 2.1.6 *Αν $K_n = [a_n, b_n]$ για $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ και $K_{n+1} \subseteq K_n$ τότε $\cup_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$.*

[Παρατηρούμε ότι $a_n \leq b_1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $x = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ και αποδεικνύουμε ότι $x \in \cup_{n=1}^{\infty} K_n$.]

Θεώρημα 2.1.7 (Bolzano-Weierstraß) *Έστω E φραγμένο απειροσύνολο στο $\mathbb{R}$. Τότε το E έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης.*

[Αφού το E είναι φραγμένο έπεται ότι θα υπάρχει διάστημα, έστω το $[a, b]$ ώστε $E \subseteq [a, b]$. Διαιρούμε το $[a, b]$ στα $[a, a + (b-a)/2]$ και $[a + (b-a)/2, b]$ και ονομάζουμε K_1 (δες Θεώρημα 2.1.6) εκείνο που έχει άπειρη τομή με το E. Επαναλαμβάνουμε τη διχοτόμηση και χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 2.1.6.]

Θεώρημα 2.1.8 *Έστω a_n ακολουθία στο $\mathbb{R}$.*

(α') *Η a_n συγκλίνει στο x αν και μόνο αν κάθε περιοχή του x περιέχει όλους τους όρους της a_n* εκτός *από ένα πεπερασμένο πλήθος.*

(β') *Το όριο είναι μοναδικό.*

(γ') *Αν a_n συγκλίνει, τότε είναι φραγμένη.*

(δ') *Αν το $E \subseteq \mathbb{R}$ έχει οριακό σημείο το x τότε υπάρχει ακολουθία $x_n \in E$ η οποία συγκλίνει στο x.*

Ορισμός 2.1.9 *Αν x_n ακολουθία στο $\mathbb{R}$ και $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ ακολουθία στο $\mathbb{N}$ τότε η ακολουθία $\left(x_{n_i}\right)_{i=1}^{\infty}$ λέγετε «υπακολουθία» της x_n.*

Προφανώς αν $x_n \to x$ και x_{n_i} μια υπακολουθία της, τότε $x_{n_i} \to x$ καθώς $i \to \infty$.

Θεώρημα 2.1.10 (Heine-Borel) *Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*

[Προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 2.1.7.]

Ορισμός 2.1.11 *Μιά ακολουθία $x_n \in \mathbb{R}$ λέγεται ακολουθία Cauchy αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n, m \geq N$ τότε $|x_n - x_m| \leq \varepsilon$.*

Πρόταση 2.1.12 *Μια ακολουθία x_n είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν είναι ακολουθία Cauchy.*

[Για την κατεύθυνση «Cauchy $\Rightarrow$ συγκλίνουσα» δείχνουμε ότι είναι φραγμένη και χρησιμοποιούμε Θεώρημα Heine-Borel (Θεώρημα 2.1.10).]

Θεώρημα 2.1.13 *Κάθε αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία συγκλίνει στο supremum των όρων της. Κέθε φθίνουσα και κάτω φραγμένη ακολουθία συγκλίνει στο infimum των όρων της.*

Ασκήσεις

Άσκηση 6. Αποδείξτε ότι αν $x_n \to x$ τότε κάθε περιοχή του x περιέχει όλους τους όρους της x_n *εκτός* από ένα πεπερασμένο πλήθος όρων.

Άσκηση 7. Αν $x_n \to x \in \mathbb{R}$ τότε η x_n είναι φραγμένη.

Άσκηση 8. Αν το x είναι οριακό σημείο ενός συνόλου E, τότε υπάρχει ακολουθία $x_n \in E$ ώστε $x_n \to x$.

Άσκηση 9. Αν $x_n \to x \in \mathbb{R}$ τότε η x_n είναι ακολουθία Cauchy

Άσκηση 10.

- Αν η x_n είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, τότε $x_n \to \sup\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$.
- Αν η x_n είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, τότε $x_n \to \inf\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$.

Ενότητα 3η

Ανώτερα και κατώτερα όρια

3.1. Ανώτερα και κατώτερα όρια

Ορισμός 3.1.1 *Για μια ακολουθία s_n λέμε ότι συγκλίνει στο ∞ αν και μόνο αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $s_n \geq M$.*

Για μια ακολουθία s_n λέμε ότι συγκλίνει στο $-\infty$ αν και μόνο αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $s_n \leq -M$.

Ορισμός 3.1.2 *Έστω ακολουθία $s_n \in \mathbb{R}$. Έστω $E \subseteq \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ώστε $x \in E$ αν και μόνο αν υπάρχει υπακολουθία s_{n_k} της s_n με $s_{n_k} \to x$ (δηλαδή το E είναι το σύνολο όλων των υπακολουθιακών ορίων της s_n).*

Θέτουμε $s^* = \sup E$ και $s_* = \inf E$. Το s^* λέγεται «ανώτερο όριο» της s_n και το s_* λέγεται «κατώτερο όριο» της s_n. Γράφουμε $s^* = \limsup s_n$ ή $\overline{\lim} s_n$ και $s_* = \liminf s_n$ ή $\underline{\lim} s_n$.

Για παράδειγμα, $\limsup(-1)^n = 1$, $\liminf(-1)^n = -1$, $\limsup \frac{1}{n} = 0$, $\liminf n^2 =$

∞.

Θεώρημα 3.1.3 *Έστω ακολουθία s_n στο $\mathbb{R}$ και E το σύνολο των υπακολουθιακών ορίων της.*

(α′) $s^* \in E$

(β′) *αν $x > s^*$ τότε υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq N$ ισχύει $s_n < x$*

(γ′) *ο αριθμός s^* είναι ο μοναδικός αριθμός με τις ιδιότητες (i) και (ii)*

(δ′) $s_* \in E$

(ε′) *αν $x < s_*$ τότε υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq N$ ισχύει $s_n > x$*

(ϛ′) *ο αριθμός s_* είναι ο μοναδικός αριθμός με τις ιδιότητες (iv) και (v)*

[Για το (ii) αν $x > s^*$ τότε η s_n δεν μπορεί να έχει άπειρους όρους πάνω από το x γιατί τότε θα είχε υπακολουθιακό όριο μεγαλύτερο ή ίσο του x.]

Πόρισμα 3.1.4 (α′) $\limsup s_n \leq \limsup s_n$.

(β′) $\limsup s_n = \liminf s_n$ *αν και μόνο αν υπάρχει το* $\lim s_n$ *και τότε*

$$\lim s_n = \limsup s_n = \liminf s_n.$$

[Για το (ii) αν $\limsup s_n = \liminf s_n$ τότε το σύνολο των υπακολουθιακών ορίων είναι μονοσύνολο.]

Πρόταση 3.1.5 *Για κάθε ακολουθία a_n στο $\mathbb{R}$ ισχύει*

$$\limsup a_n = \lim_{k\to\infty} \left(\sup\{a_n : n \geq k\} \right).$$

[Η ακολουθία $\sup\{a_n : n \geq k\}$ είναι αύξουσα.]

Θεώρημα 3.1.6 *Για κάθε ακολουθία a_n στο $\mathbb{R}$ με $a_n > 0$ ισχύει*

$$\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

[Αν $s^* = \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ τότε υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq N$ ισχύει

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < s^* + \varepsilon \Rightarrow a_{n+1} < \left(s^* + \varepsilon\right)^{n-N+1} a_N.$$
]

Ορισμός 3.1.7 *Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται «ανοιχτό σύνολο» αν για κάθε $x \in A$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A$.*

Ορισμός 3.1.8 *Ένα σύνολο $F \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται «κλειστό σύνολο» αν για κάθε ακολουθία $x_n \in F$ με $x_n \to x \in \mathbb{R}$ συνεπάγεται $x \in F$.*

Πρόταση 3.1.9 *Έστω $K \subseteq \mathbb{R}$. Το K είναι κλειστό αν και μόνο αν το K^c είναι ανοιχτό.*

Πρόταση 3.1.10 (α΄) *Ενώση ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτό σύνολο.*

(β΄) *Τομή πεπερασμένου πλήθους ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτό σύνολο.*

(γ΄) *Τομή κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.*

(δ΄) *Ένωση πεπερασμένου πλήθους κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.*

Οδηγός Ασκήσεων
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 13 από 30
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

3.2. Το σύνολο Cantor

Το σύνολο Cantor κατασκευάζεται αφαιρώντας από το $[0,1]$ το μεσαίο τρίτο υποδιάστημα και επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για τα εναπομείναντα διαστήματα. Ακριβέστερα θέτουμε

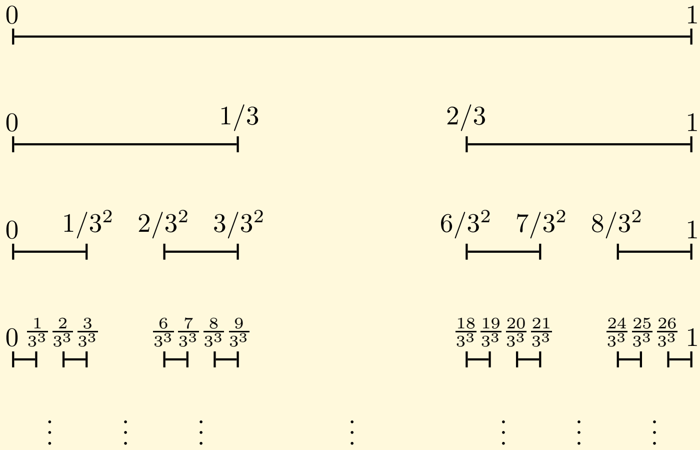
$$
\begin{aligned}
E_1 &= [0,1] \\
E_2 &= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \\
E_3 &= \left[0, \frac{1}{3^2}\right] \cup \left[\frac{2}{3^2}, \frac{3}{3^2}\right] \cup \left[\frac{6}{3^2}, \frac{7}{3^2}\right] \cup \left[\frac{8}{3^2}, 1\right] \\
E_4 &= \left[0, \frac{1}{3^3}\right] \cup \left[\frac{2}{3^3}, \frac{3}{3^3}\right] \cup \left[\frac{6}{3^3}, \frac{7}{3^3}\right] \cup \left[\frac{8}{3^3}, \frac{9}{3^3}\right] \cup \\
&\qquad \cup \left[\frac{18}{3^3}, \frac{19}{3^3}\right] \cup \left[\frac{20}{3^3}, \frac{21}{3^3}\right] \cup \left[\frac{24}{3^3}, \frac{25}{3^3}\right] \cup \left[\frac{26}{3^3}, 1\right] \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

και ορίζουμε το σύνολο Cantor P ως την τομή όλων των E_n:

$$P = \cap_{i=1}^{\infty} E_n.$$

Πρόταση 3.2.1 *Για κάθε $a, b \in [0,1]$ με $a < b$ ισχύει $(a,b) \not\subseteq P$*

[Για κάθε $k, m \in \mathbb{N}$ ισχύει $\big((3k+1)/3^m, (3k+2)/3^m\big) \cap P = \emptyset$. Αν m αρκετά μεγάλο ώστε $3/3^m < (b-a)/2$ τότε υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\big((3k+1)/3^m, (3k+2)/3^m\big) \subset (a,b)$.]



Σχήμα 3.1: Η κατασκευή του συνόλου Cantor

Ορισμός 3.2.2 *Ένα σύνολο E λέγεται τέλειο όταν είναι κλειστό και κάθε σημείο τού E είναι σημείο συσσώρευσής του.*

Πρόταση 3.2.3 *Το σύνολο Cantor είναι τέλειο σύνολο.*

[Είναι φανερά κλειστό και αν $x \in P$ βρίσκουμε το διάστημα του E_n (από την κατασκευή του Cantor) που περιέχει το x και θέτουμε x_n το άκρο του διαστήματος που δεν είναι ίσο με το x.]

Πρόταση 3.2.4 *Το σύνολο Cantor είναι υπεραριθμήσιμο.*

[Αν $x \in P$ τότε

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$$

όπου $a_i \in \{0, 2\}$.]

Ασκήσεις

Άσκηση 11. Υπολογίστε τα $\liminf$ και $\limsup$ των ακολουθιών $x_n = 1 + (-1)^n - (-1)^n/n$ και

$$y_n = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}+1}}, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}}, & \text{αν } n \text{ περιττός.} \end{cases}$$

Επίσης υπολογίστε τα $\liminf$ και $\limsup$ της y_{n+1}/y_n και $\sqrt[n]{y_n}$.

Άσκηση 12. Βρείτε τα $\liminf$ και $\limsup$ της $\frac{n}{5} - \left[\frac{n}{5}\right]$.

Άσκηση 13. Βρείτε τα οριακά σημεία των συνόλων:

$$\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}, \quad \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\right\}, \quad \left\{(-1)^n \left[1 + \frac{1}{n}\right]\right\}.$$

Άσκηση 14. Αν $x > \limsup a_n$ τότε υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq \mathbb{N}$ ισχύει $x > a_n$.

Άσκηση 15. Δείξτε ότι αν τα σύνολα A_n είναι ανοιχτά για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε το $A = \sup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι ανοιχτό.

Άσκηση 16. Δείξτε με τον ορισμό (δηλαδή με χρήση ακολουθιών) ότι αν F_1, F_2 είναι κλειστά σύνολα τότε και το $F_1 \cup F_2$ είναι κλειστό.

Άσκηση 17. Δείξτε (με ένα παράδειγμα) ότι άπειρη ένωση κλειστών συνόλων δεν είναι πάντα κλειστό σύνολο.

Ενότητα 4η

Συμπάγεια

4.1. Συμπάγεια

Ορισμός 4.1.1 *Τα σύνολα* $(G_a)_{a\in A}$ *λέγεται ότι αποτελούν «ανοιχτή κάλυψη» ενός συνόλου* E *αν είναι ανοικτά και* $E \subseteq \cup_{a\in A} G_a$.

Ορισμός 4.1.2 *Ένα υποσύνολο* K *του* $\mathbb{R}$ *λέγεται «συμπαγές» αν και μόνο αν κάθε ανοιχτή κάλυψη του* K *περιέχει πεπερασμένη υποκάλυψη· δηλαδή αν τα* $(G_a)_{a\in A}$ *είναι ανοιχτά και* $K \subseteq \cup_{a\in A} G_a$, *τότε υπάρχουν* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ *ώστε* $K \subseteq \cup_{j=1}^{n} G_{a_x}$.

Παράδειγμα 4.1.3 *Το σύνολο* (a, b) *για* $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ *δεν είναι συμπαγές αφού τα σύνολα* $(a, b - 1/n)$ *για* $n \in \mathbb{N}$ *αποτελούν ανοιχτή κάλυψη του* (a, b) *χωρίς πεπερασμένη υποκάλυψη.*

Πρόταση 4.1.4 *Για κάθε* $a, b \in \mathbb{R}$ *με* $a < b$ *το σύνολο* $[a, b]$ *είναι συμπαγές.*

Αποδεικνύουμε ότι το supremum του συνόλου

$$A = \{t \in [a, b] \ : \ \text{το } [a, t] \text{ έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα}\}$$

είναι ίσο με το b.

Πρόταση 4.1.5 *Κλειστό υποσύνολο συμπαγούς συνόλου είναι συμπαγές σύνολο.*

Πρόταση 4.1.6 *Κάθε ανοικτό κάλυμμα (οποιουδήποτε συνόλου) στο $\mathbb{R}$ έχει* αριθμήσιμο *υποκάλυμμα.*

Θεώρημα 4.1.7 *Έστω $K \subseteq \mathbb{R}$. Το K είναι συμπαγές αν και μόνο αν κάθε ακολουθία στο K έχει συγκλίνουσα υπακολουθία με όριο στο K.*

Αν η ακολουθία $x_n \in K$ δεν έχει σημείο συσσώρευσης στο K τότε το σύνολο $A = \{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}$ είναι κλειστό υποσύνολο του K και άρα συπαγές, το οποίο οδηγεί σε άτοπο αφού χωρίς σημεία συσσώρευσης τα σημεία του A ως μεμονομένα μπορούν να καλυφθούν από άπειρο πλήθος ξένων μεταξύ τους διαστήματα. Για το αντίστροφο πάλι χρησιμοποιούμε απαγωγή στο άτοπο: πέρνουμε ένα αριθμήσιμο κάλλυμα που δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμα και διαλέγουμε x_n στο K έξω από τα πρώτα n σύνολα του καλύματος.

Θεώρημα 4.1.8 *Αν K υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τότε το K είναι συμπαγές αν και μόνο αν το K είναι κλειστό και φραγμένο.*

Προκύπτει εύκολα από το προηγούμενο και το Θεώρημα Heine-Borel (Θεώρημα 2.1.10).

Οδηγός Ασκήσεων
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Σελίδα 19 από 30
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Ασκήσεις

Άσκηση 18. Έστω $a < x_n < b$ και $x_n \to b$ ($a, b, x_n \in \mathbb{R}$). Έστω $(G_i)_{i\in I}$ ανοιχτό κάλυμα του $(a, b]$ ώστε το διάστημα (a, x_n) να έχει κάποιο πεπερασμένο υποκάλυμμα από το κάλυμμα $(G_i)_{i\in I}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι και το $(a, b]$ έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.

Άσκηση 19. Έστω ακολουθία $x_n \to x$. Δείξτε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$x \leq \sup\{x_n : n \geq k\}.$$

Άσκηση 20.

(α΄) Δείξτε ότι η ακολουθία $a_k = \sup\{x_n : n \geq k\}$ είτε συγκλίνει σε κάποιο σημείο του $\mathbb{R}$ είτε αποκλίνει στο $+\infty$.

(β΄) Με τη βοήθεια της Άσκησης 19 δείξτε ότι $\limsup x_n \leq a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Δηλαδή

$$\limsup x_n \leq \lim_{k\to\infty} \big(\sup\{x_n : n \geq k\}\big).$$

(γ΄) Έστω $\varepsilon > 0$. Δείξτε ότι υπάρχει k_0 ώστε για κάθε $k \geq k_0$ ισχύει $a_k \leq (\limsup x_n) + \varepsilon$.

(δ΄) Δείξτε ότι $\lim_{k\to\infty} a_k = \limsup x_n$, δηλαδή

$$\limsup x_n = \lim_{k\to\infty} \big(\sup\{x_n : n \geq k\}\big).$$

Άσκηση 21. Δείξτε ότι

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \to \infty$$

με τα ακόλουθα βήματα:

(α′) Θέστε

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \log n$$

και

$$y_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n.$$

Δείξτε ότι η x_n είναι αύξουσα και η y_n είναι φθίνουσα.

(β′) Δείξτε ότι $y_n \geq x_1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(γ′) Από τα α′ και β′ συμπεράνατε ότι η y_n συγκλίνει.

Άσκηση 22. Έστω x_n ακολουθία Cauchy και x_{k_n} υπακολουθία της x_n με $x_{k_n} \longrightarrow x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $x_n \longrightarrow x$.

Άσκηση 23. Βρείτε τε σημεία συσσώρευσης των συνόλων:

$$\left\{ \frac{1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N} \right\}, \quad \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \,:\, n, m \in \mathbb{N} \right\}, \quad \left\{ (-1)^n \left[1 + \frac{1}{n} \right] \,:\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Ενότητα 5η

Συνέχεια συναρτήσεων

5.1. Συνέχεια συναρτήσεων

Ορισμός 5.1.1 *Μιά συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λέγεται «συνεχής» αν και μόνο αν για κάθε ανοικτό υποσύνολο U του $\mathbb{R}$ η αντίστροφη εικόνα του $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό σύνολο.*

Παρατήρηση 5.1.2 *Αν $\varepsilon > 0$ τότε το σύνολο $\big(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon\big)$ είναι ανοιχτό, άρα θα είναι ανοιχτό και το $f^{-1}\Big(\big(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon\big)\Big)$ εφόσον η f είναι συνεχής. Όμως $x_0 \in f^{-1}\Big(\big(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon\big)\Big)$ (αφού $f(x_0) \in \big(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon\big)$) άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε*

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq f^{-1}\Big(\big(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon\big)\Big).$$

Δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $|x - x_0| < \delta$ (οπότε και $x_0 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$) τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (αφού $f(x) \in \big(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon\big)$).

Αντιστρόφως, έστω U ανοιχτό σύνολο και $x_0 \in f^{-1}(U)$. Τότε $f(x_0) \in U$ και αφού U ανοιχτό, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $\big(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon\big) \subseteq U$. Για αυτό το $\varepsilon > 0$ θα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq f^{-1}\Big(\big(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon\big)\Big) \subseteq f^{-1}(U).$$

Άρα για κάθε $x_0 \in f^{-1}(U)$ βρήκαμε $\delta > 0$ ώστε $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq f^{-1}(U)$. Άρα το $f^{-1}(U)$ είναι ανοιχτό.

Θεώρημα 5.1.3 *Συνεχής εικόνα συμπαγούς συνόλου είναι συμπαγές σύνολο. Δηλαδή, αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση και το $K \subseteq \mathbb{R}$ είναι συμπαγές σύνολο, τότε το σύνολο $f(K)$ είναι επίσης συμπαγές.*

Θεώρημα 5.1.4 *Αν $f : K \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση, και το K είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε η f έχει μέγιστο και ελάχιστο στο K. Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in K$ ώστε για κάθε $x \in K$ να ισχύει*

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2).$$

Αφού το $f(K)$ είναι συμπαγές συνεπάγεται ότι είναι κλειστό και φραγμένο. Άρα έχει supremum και infimum που λόγω της κλειστότητας του $f(K)$ ανήκουν σε αυτό.

Θεώρημα 5.1.5 *Έστω $f : K \to \mathbb{R}$ και ένα προς ένα, και K συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τότε η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : f(K) \to K$ είναι συνεχής.*

Αρκεί να δείξουμε ότι αν το U είναι ανοιχτό υποσύνολο του K τότε είναι ανοιχτό και το $f(U)$. Το $f(K \setminus U)$ είναι κλειστό διότι το $K \setminus U$ είναι συμπαγές (ως κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς K) και $f(U) = f(K) \setminus f(K \setminus U)$.

5.1.1. Είδη ασυνέχειας

Γράφουμε $f(x+)$ για το $\lim_{t\to x^+} f(t)$ και $f(x-)$ για το $\lim_{t\to x^-} f(t)$.

Ορισμός 5.1.6 *Για τη συνάρτηση $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ λέμε ότι έχει «ασυνέχεια πρώτου είδους» στο $x\in(a,b)$ όταν είναι μεν ασυνεχής στο x αλλά τα πλευρικά όρια $f(x+)$ και $f(x-)$ υπάρχουν και ανήκουν στο $\mathbb{R}$ (δηλαδή δεν είναι συν ή πλή άπειρο).*

Αν τουλάχιστον ένα από τα πλευρικά όρια της f στο x δεν υπάρχει (συμπεριλαμβανομένης της περίπτωσης να είναι $\pm\infty$ τότε λέμε ότι η f έχει «ασυνέχεια δεύτερου είδους» στο x.

Παρατήρηση 5.1.7 *Για να έχει μιά συνάρτηση f ασυνέχεια πρώτου είδους σε ένα σημείο x δύο πράγματα μπορούν να συμβαίνουν: είτε $f(x+)\neq f(x-)$ είτε $f(x+)=f(x-)\neq f(x)$.*

Παράδειγμα 5.1.8 *Η συνάρτηση*

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{αν } x\in\mathbb{Q}\\ 0, & \text{αν } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

έχει ασυνέχειες δεύτερου είδους σε όλα τα σημεία του $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 5.1.9 *Η συνάρτηση*

$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{αν } x\in\mathbb{Q}\\ 0, & \text{αν } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

είναι συνεχής στο $x=0$ και έχει ασυνέχειες δεύτερου είδους σε όλα τα σημεία του $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Παράδειγμα 5.1.10 *Η συνάρτηση*

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & \text{αν } x\neq 0\\ 0, & \text{αν } x=0\end{cases}$$

είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ και έχει ασυνέχεια δεύτερου είδους στο $x=0$.

Ασκήσεις

Άσκηση 24. Έστω η ακολουθία

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \dots$$

Για ποιά $a \in \mathbb{R}$ υπάρχει υπακολουθία της παραπάνω με όριο το a;

Άσκηση 25. Το $K \subseteq \mathbb{R}$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.

Άσκηση 26. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Θέτω

$$A' = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ σημείο συσσώρευσης του } A\},$$

και $\overline{A} = A \cup A'$.Δείξτε ότι το $\overline{A}$ ίναι κλειστό σύνολο και ότι αν $F \supseteq A$ και F κλειστό τότε $F \supseteq \overline{A}$. Τέλος δείξτε ότι

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ κλειστό} \\ F \supseteq A}} F.$$

Άσκηση 27. Αποδείξτε ότι τα μοναδικά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που είναι και ανοιχτά και κλειστά είναι το $\emptyset$ και $\mathbb{R}$ με τον εξής τρόπο:

Έστω $G \subseteq \mathbb{R}$, $G \neq \emptyset$, Gανοιχτό και κλειστό σύνολο. Αρκεί να δείξω ότι $G = \mathbb{R}$. Αφού το G δεν είναι κενό, έστω $x \in G$. Θέτω

$$M = \sup\{t \in \mathbb{R} : (x - t, x + t) \subseteq G\}$$

(γιατί υπάρχει το supremum;).

Αρκεί να δείξω ότι $M = \infty$. Αν όχι τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $x + M - \varepsilon \in G$ (γιατί;). Άρα $x+M \in G$ (γιατί;). Συνεπώς $[x-M, x+M] \subseteq G$ (γιατι;). Όμως το G είναι και ανοιχτό άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $(x - M - \varepsilon, x + M + \varepsilon) \subseteq G$ (γιατί;) *άτοπο* (γιατί;).

Άσκηση 28. Αν A, B συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$ τότε τα $A \cup B$ και $A \cap B$ είναι επίσης συμπαγή. Ισχύει το ίδιο για άπειρο πλήθος συμπαγών συνόλων;

Άσκηση 29. Γιατί το σύνολο
$$\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$$
είναι συμπαγές;

Άσκηση 30. Έστω K_n ακολουθία μη κενών, συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ με $K_n \supseteq K_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $\cap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$. (Υπόδειξη: δείξτε ότι αν διαλέξουμε ένα x_n από κάθε K_n τότε η ακολουθία που σχηματίζεται έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης το οποίο ανήκει σε όλα τα K_n.)

Ενότητα 6η

Ομοιόμορφη συνέχεια συναρτήσεων

6.1. Ομοιόμορφη συνέχεια συναρτήσεων

Ορισμός 6.1.1 *Μια συνάρτηση* $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, *λέγεται ομοιόμορφα συνεχής στο* A *αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta > 0$ *ώστε για κάθε* $x, y \in A$ *με* $|x - y| < \delta$ *συνεπάγεται* $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Παράδειγμα 6.1.2 *Η συνάρτηση* $f(x) = 1/x : (0, 1) \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής.*

Για $\varepsilon = 1$ αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x, y \in (0,1)$ με $|x - y| < \delta$ συνεπάγεται $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| < \varepsilon$, τότε θα ισχύει και για $y = x + \delta/2$. Όμως

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{\delta/2}{x(x+\delta/2)}\right|,$$

το οποίο είναι μεγαλύτερο από 1 αν το x είναι αρκετά κοντά στο μηδέν.

Οι δύο έννοιες —συνέχεια και ομοιόμορφη συνέχεια— συμπίπτουν πάνω σε συμπαγή σύνολα:

Θεώρημα 6.1.3 *Αν $f : K \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση και το K είναι συμπαγές σύνολο, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο K.*

Για κάθε $x \in K$ υπάρχει $\delta_x > 0$ ώστε αν $|x - y| < \delta_x$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$. Φανερά $K \subseteq \cup_{x \in K}(x - \delta, x + \delta)$ και λόγω της συμπάγειας του K υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ και $x_1, x_2, \ldots, x_N$ στο K ώστε

$$K \subseteq \cup_{j=1}^{N}\left(x_j - \delta_{x_j}, x_j + \delta_{x_j}\right).$$

Θέτουμε $\delta = \frac{1}{2}\min\left\{\delta_{x_j} : j = 1, 2, \ldots, N\right\}$. Έστω $x, y \in K$ με $|x - y| < \delta$. Έστω $1 \leq i \leq N$ ώστε $x \in \left(x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i}\right)$. Άρα ισχύει $|f(x) - f(x_i)| < \varepsilon/2$. Τώρα έχουμε:

$$|y - x_i| \leq |y - x| + |x - x_i| < \delta + \frac{1}{2}\delta_{x_i} \leq \delta_{x_i}.$$

Συνεπώς $|f(y) - f(x_i)| < \varepsilon/2$. Μια τριγωνική ανισότητα δίνει το αποτέλεσμα.

Ασκήσεις

Άσκηση 31. Έστω $F, K \subseteq \mathbb{R}$ όπου F κλειστό και K συμπαγές. Αν $F \cap K = \emptyset$ δείξτε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $x \in F$ και για κάθε $y \in K$ να ισχύει $|x - y| \geq \varepsilon$.

Άσκηση 32. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f συνεχής αν και μόνο αν η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(K)$ ενός κλειστού συνόλου $K \subseteq \mathbb{R}$ είναι κλειστό.

Άσκηση 33. Έστω K_n συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $K_n \neq \emptyset$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots$. Δείξτε ότι η τομή όλων των K_n είναι μή κενή με τον ακόλουθο τρόπο: αν $K_1 \cap (\cap_{n=2}^{\infty} K_n) = \emptyset$ τότε $K_1 \subseteq (\cap_{n=2}^{\infty} K_n)^c$. Χρησιμοποιήστε τον νόμο του De Morgan και τον ορισμό της συμπάγειας για το K_1 ώστε να καταλήξετε σε άτοπο.

Άσκηση 34. Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συναρτήσεις. Βρείτε ποιά από τα παρακάτω σύνολα είναι ανοιχτά και ποιά είναι κλειστά:

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) = \sqrt{2}\}, \quad \{x \in \mathbb{R} : f(x) < g(x)\}, \quad \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)\}.$$

Άσκηση 35. Ποιές από τις ακόλουθες συνεπαγωγές είναι σωστές;

(α΄) ($f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής και A φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$) $\Rightarrow f(A)$ φραγμένο.

(β΄) ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και A φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$) $\Rightarrow f(A)$ φραγμένο.

Άσκηση 36. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ όχι συμπαγές. Δείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής και φραγμένη που δεν έχει μέγιστο στο A.

Άσκηση 37. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Δείξτε την ακόλουθη ισοδυναμία

$$f \text{ συνεχής } \Leftrightarrow [\forall x_n \in \mathbb{R} \text{ με } x_n \to x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x_n) \to f(x)].$$

Άσκηση 38. Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, 1-1 και επί, τότε η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : \mathbb{R} \to A$ *δεν* είναι απαραίτητα συνεχής.

Άσκηση 39. Έστω συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to [0,1]$.Δείξτε ότι υπάρχει $x \in [0,1]$ ώστε $f(x) = x$.

Άσκηση 40. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ μη συμπαγές σύνολο. Δείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ η οποία να είναι συνεχής αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής.

Άσκηση 41. Εξετάστε ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια τις συναρτήσεις:

(α') $f(x) = 1/x, \qquad x > 0$

(β') $f(x) = x^2/(1+x^2)$

(γ') $f(x) = x^3$

(δ') $f(x) = (x^2-4)^{-1}$.

Άσκηση 42. Έστω r ρητός αριθμός. Να δείξετε ότι η ακολουθία $\sin(nr\pi)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει πεπερασμένο πλήθος οριακών σημείων.

Λύσεις των Ασκήσεων

Άσκηση 1. Υπό κατασκευή. Άσκηση 1

Άσκηση 2. Υπό κατασκευή.

Άσκηση 2

Άσκηση 3. Υπό κατασκευή.

Άσκηση 3

Άσκηση 4. Υπό κατασκευή.

Άσκηση 4

Άσκηση 5. Υπό κατασκευή. Άσκηση 5

Άσκηση 6. Υπό κατασκευή.

Άσκηση 6

Άσκηση 7. Υπό κατασκευή.

Άσκηση 7

Άσκηση 8. Υπό κατασκευή.

Άσκηση 8

Άσκηση 9. Υπό κατασκευή.

Άσκηση 9

Άσκηση 10. Υπό κατασκευή.

Άσκηση 10

Άσκηση 11. Υπό κατασκευή. Άσκηση 11

Άσκηση 12. Υπό κατασκευή. Άσκηση 12

Άσκηση 13. Υπό κατασκευή.

Άσκηση 13

Άσκηση 14. Υπό κατασκευή. Άσκηση 14

Άσκηση 15. Υπό κατασκευή.

Οδηγός Ασκήσεων
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 45 από 30
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Άσκηση 16. Υπό κατασκευή.

Άσκηση 16

Άσκηση 17. Υπό κατασκευή.

Άσκηση 17

Άσκηση 18. Υπό κατασκευή.

Άσκηση 18

Άσκηση 19. Υπό κατασκευή.

Άσκηση 19

Άσκηση 20. Υπό κατασκευή.

Άσκηση 20

Άσκηση 21. Υπό κατασκευή.

Άσκηση 21

Άσκηση 22. Υπό κατασκευή. Άσκηση 22

Άσκηση 23. Υπό κατασκευή.

Άσκηση 23

Άσκηση 24. Υπό κατασκευή

Άσκηση 24

Άσκηση 25. Υπό κατασκευή Άσκηση 25

Άσκηση 26. Υπό κατασκευή

Άσκηση 26

Άσκηση 27. Υπό κατασκευή

Άσκηση 28. Υπό κατασκευή

Άσκηση 28

Άσκηση 29. Υπό κατασκευή

Άσκηση 29

Άσκηση 30. Υπό κατασκευή

Άσκηση 30

Άσκηση 31. Υπό κατασκευή

Άσκηση 31

Άσκηση 32. Υπό κατασκευή

Άσκηση 32

Άσκηση 33. Υπό κατασκευή Άσκηση 33

Άσκηση 34. Υπό κατασκευή

Άσκηση 34

Άσκηση 35. Υπό κατασκευή

Άσκηση 35

Άσκηση 36. Υπό κατασκευή

Άσκηση 36

Άσκηση 37. Υπό κατασκευή

Άσκηση 37

Άσκηση 38. Υπό κατασκευή

Άσκηση 38

Άσκηση 39. Υπό κατασκευή

Άσκηση 39

Άσκηση 40. Υπό κατασκευή

Άσκηση 40

Άσκηση 41. Υπό κατασκευή

Άσκηση 41

Άσκηση 42. Υπό κατασκευή Άσκηση 42