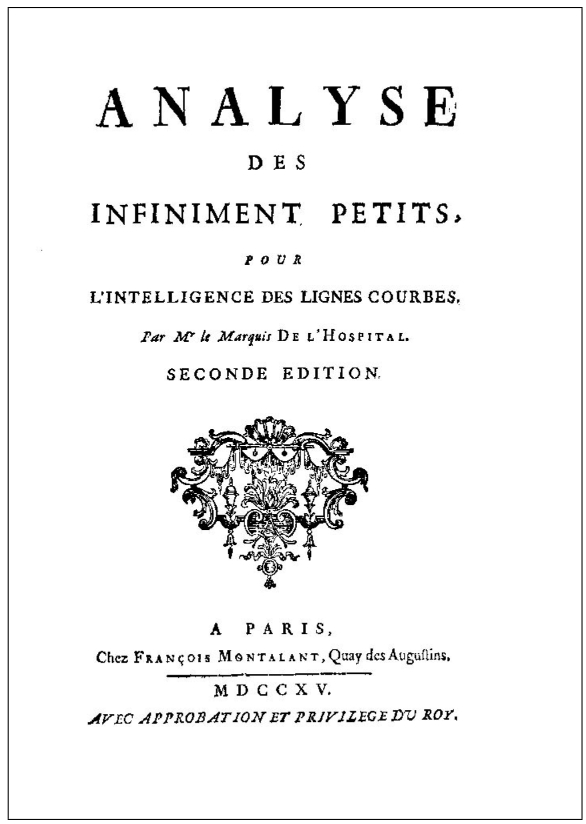
Κεφάλαιο 1

Κανόνας L' Hospital


ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS,
POUR
L'INTELLIGENCE DES LIGNES COURBES.
Par Mr le Marquis DE L'HOSPITAL.
SECONDE EDITION.
A PARIS,
Chez FRANÇOIS MONTALANT, Quay des Augustins.
MDCCXV.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

Ένα από τα πολύ χρήσιμα εργαλεία του απειροστικού λογισμού στον υπολογισμό ορίων είναι ο κανόνας L' Hospital. Συχνά τα βιβλία απειροστικού λογισμού αποδεικνύουν την περίπτωση 0/0 και αφήνουν ως άσκηση την περίπτωση ∞/∞ ή όταν έχουν απόδειξη στη δεύτερη αυτή περίπτωση, αυτή είναι αρκετά περίπλοκη.

Η περίπτωση 0/0 είναι εύκολη και θα δούμε αμέσως πώς αντιμετωπίζεται με απλά εργαλεία του απειροστικού λογισμού. Η περίπτωση ∞/∞ δεν είναι καθόλου απλή. Στην επόμενη ενότητα θα δούμε την απόδειξη αυτής της περίπτωσης με τρόπο που καλύπτει και την περίπτωση 0/0 και οφείλεται στον A. E. Taylor. Έτσι θα μπορούσαμε να κάνουμε κατευθείαν αυτή την ενοποιημένη απόδειξη, αλλά θα προτιμήσουμε να κάνουμε και την περίπτωση 0/0 ξεχωριστά λόγω της απλότητας της απόδειξής της.

Πριν ξεκινήσουμε, ας λύσουμε το θέμα με το πώς γράφεται και προφέρεται το όνομα του κανόνα. Το L' Hospital είναι από το όνομα του Μαρκήσιου του L' Hospital: «Guillaume François Antoine, Marquis de l'Hospital». Το γράμμα «s» δεν προφέρεται και έτσι έγραφε το όνομά του ο ίδιος. Πολύ αργότερα η Γαλλική Ακαδημία αποφάσισε να αφαιρούνται αυτά τα μη προφερόμενα γράμματα και τοποθετείται ένα σύμβολο πάνω στο προηγούμενο φωνήεν, μετατρέποντας το Hospital σε Hôpital. Σε κάθε περίπτωση η προφορά είναι «λοπιτάλ». Εδώ κρατάμε την ιστορική γραφή L' Hospital.

1.1 Η περίπτωση 0/0

Θεώρημα 1.1.1 *Έστω ότι οι f και g είναι ορισμένες και συνεχείς στο διάστημα $[a,b]$, παραγωγίσιμες στο (a,b), και ισχύει $f(x_0)=0$, $g(x)=0$ μόνο για $x=x_0\in(a,b)$ και $g'(x_0)\neq 0$. Τότε το όριο $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x)$ υπάρχει και ισχύει*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι σχεδόν προφανής διότι, αφού $f(x_0)=g(x_0)=0$, για $x\neq x_0$ ισχύει

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}},$$

και αφήνουμε το x να τείνει στο x_0. Παρατηρήστε ότι για το παραπάνω χρειάζεται να ισχύει $g(x)\neq 0$ για να ορίζεται το κλάσμα στα δεξιά. □

Θεώρημα 1.1.2 *Έστω ότι $a<x_0<b$, οι f και g είναι ορισμένες και συνεχείς στο διάστημα $[a,b]$, παραγωγίσιμες στο $(a,x_0)\cup(x_0,b)$, και ισχύει $f(x_0)=g(x_0)=0$, και $g'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(a,x_0)\cup(x_0,b)$. Αν το όριο $\lim_{x\to x_0} f'(x)/g'(x)$ υπάρχει τότε υπάρχει και το όριο $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x)$ και ισχύει*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Απόδειξη: Παρατηρούμε πρώτα ότι το ζητούμενο όριο (αν υπάρχει) είναι καλά ορισμένο διότι για $x\neq x_0$ ισχύει $g(x)\neq 0$ (αλλιώς από το θεώρημα Rôlle η g' έχει ρίζα στο σύνολο $(a,x_0)\cup(x_0,b)$ που αποκλείεται από την υπόθεση).

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(t)=f(t)-\frac{f(x)}{g(x)}g(t),$$

η οποία στο διάστημα $[x_0,x]$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rôle (παρατηρήστε ότι $h(x_0)=h(x)=0$). Άρα υπάρχει ξ_x με $x_0<\xi_x<x$ ώστε $h'(\xi_x)=0$. Δηλαδή

$$f'(\xi_x)-\frac{f(x)}{g(x)}g(\xi_x)=0,$$

ισοδύναμα

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}. \tag{1.1}$$

Εφόσον όμως $x_0 < \xi_x < x$, αν $x \to x_0^+$ συνεπάγεται ότι $\xi_x \to x_0^+$, και επειδή το όριο $\lim_{x\to x_0} f'(x)/g'(x)$ υπάρχει από την υπόθεση, από την (1.1) υπάρχει και το $\lim_{x\to x_0^+} f(x)/g(x)$ και ισχύει

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Επαναλαμβάνουμε τώρα το ίδιο επιχείρημα στο διάστημα $[x, x_0]$ και καταλήγουμε στο ότι και το αριστερό όριο $\lim_{x\to x_0^-} f(x)/g(x)$ υπάρχει και ισούται και αυτό με το $\lim_{x\to x_0} f'(x)/g'(x)$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

1.2 Ο γενικός κανόνας L' Hospital

Ο λόγος που συχνά παραλείπεται η απόδειξη του κανόνα L' Hospital στην περίπτωση ∞/∞ είναι ότι ο απλούστερος τρόπος χρειάζεται την έννοια του lim inf και lim sup για συναρτήσεις. Μπορεί κανείς βεβαίως να αποδείξει τον κανόνα χωρίς αυτές τις έννοιες (δες Ενότητα 1.3) αλλά μπορούμε να το δούμε ως ευκαιρία να τις μάθουμε.

Αν η f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα (a, b) *εκτός* ίσως από ένα σημείο $x_0 \in (a, b)$, για κάθε $\delta > 0$ ορίζουμε τις ποσότητες

$$\varphi(\delta) = \inf_{0<|x-x_0|<\delta} f(x) \qquad \text{και} \qquad \psi(\delta) = \sup_{0<|x-x_0|<\delta} f(x),$$

όπου βέβαια $x \in (a, b)$. Φανερά η φ είναι φθίνουσα και η ψ αύξουσα. Συνεπώς υπάρχουν τα όρια $\lim_{\delta\to 0^+} \varphi(\delta)$ και $\lim_{\delta\to 0^+} \psi(\delta)$ στο $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. Μάλιστα εύκολα βλέπουμε ότι

$$\lim_{\delta\to 0^+} \varphi(\delta) = \sup_{\delta>0}\left(\inf_{0<|x-x_0|<\delta} f(x)\right)$$

και

$$\lim_{\delta\to 0^+} \psi(\delta) = \inf_{\delta>0}\left(\sup_{0<|x-x_0|<\delta} f(x)\right).$$

Το πρώτο το ονομάζουμε lim inf της f στο x_0 και το δεύτερο lim sup της f στο x_0, και γράφουμε $\liminf_{x\to x_0} f(x)$ και $\limsup_{x\to x_0} f(x)$ αντίστοιχα.

Όπως και στην περίπτωση των ακολουθιών, το πλεονέκτημα των lim inf και lim sup είναι ότι αυτά υπάρχουν πάντα, ενώ το όριο lim δεν υπάρχει απαραίτητα. Ισχύει όμως και για τις συναρτήσεις (όπως και για τις ακολουθίες) το εξής:

Πρόταση 1.2.1 *Με τις παραπάνω υποθέσεις για τη συνάρτηση f, το όριο $\lim_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ αν και μόνο αν*

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) = \limsup_{x\to x_0} f(x).$$

Σε αυτή την περίπτωση το όριο $\lim_{x\to x_0} f(x)$ ισούται με την κοινή τιμή των lim inf *και* lim sup.

Απόδειξη: Αν το $\ell = \lim_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $0 < \delta < \epsilon$ ώστε αν $0 < |x - x_0| < \delta$ τότε $|f(x) - \ell| < \epsilon$. ισοδύναμα

$$\ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon.$$

Άρα

$$\varphi(\delta) \geq \ell - \epsilon \quad \text{και} \quad \psi(\delta) \leq \ell + \epsilon.$$

Συνεπώς

$$0 \leq \psi(\delta) - \varphi(\delta) < (\ell + \epsilon) - (\ell - \epsilon) = 2\epsilon.$$

Αφήνοντας το ϵ να τείνει στο 0^+ αναγκαστικά το ίδιο θα κάνει και το δ από όπου συμπεραίνουμε ότι

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) = \limsup_{x\to x_0} f(x).$$

Αν $\ell = +\infty$ τότε για κάθε $M > 0$ υπάρχει $0 < \delta < 1/M$ ώστε αν $0 < |x - x_0| < \delta$ τότε $f(x) > M$. Οπότε $\varphi(\delta) \geq M$. Αφήνοντας το M να τείνει στο $+\infty$ το δ τείνει στο 0^+ οπότε προκύπτει $\liminf_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, άρα και $\limsup_{x\to x_0} f(x) = +\infty$. Ομοίως αντιμετωπίζουμε την περίπτωση $\ell = -\infty$ ξεκινώντας τώρα με το lim sup.

Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) = \limsup_{x\to x_0} f(x) = \ell.$$

Αν $\ell \in \mathbb{R}$, τότε για κάθε $\delta > 0$ και x ώστε $0 < |x - x_0| < \delta$ ισχύει

$$\begin{aligned} f(x) - \ell &\leq \psi(\delta) - \ell \\ \ell - f(x) &\leq \ell - \varphi(\delta). \end{aligned}$$

Συνεπώς
$$|f(x)-\ell| \le \max\big\{\psi(\delta)-\ell, \ell-\varphi(\delta)\big\}.$$
Έτσι, αν αφήσουμε το δ να τείνει στο 0^+ τόσο το $\psi(\delta)-\ell$ όσο και το $\ell-\varphi(\delta)$ τείνουν στο μηδέν, άρα και το $f(x)$ τείνει στο ℓ.

Αν $\ell=+\infty$ τότε επειδή $f(x)\ge\varphi(\delta)$ για κάθε x με $0<|x-x_0|<\delta$, αν $\varphi(\delta)\ge M$ θα έχουμε και $f(x)\ge M$ οπότε $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty=\ell$. Ομοίως, αν $\ell=-\infty$.

Από αυτή την κατεύθυνση της ισοδυναμίας προκύπτει ότι το όριο $\lim_{x\to x_0} f(x)$ ισούται με την κοινή τιμή των $\liminf$ και $\limsup$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Τώρα είμαστε έτοιμοι να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το γενικό θεώρημα L' Hospital.

Θεώρημα 1.2.2 *Έστω ότι I είναι ένα ανοικτό, φραγμένο ή άπειρο, διάστημα στο $\mathbb{R}$ και c άκρο του I (πεπερασμένο ή άπειρο). Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ορισμένες στο I παραγωγίσιμες και οι g και g' δεν μηδενίζονται πουθενά στο I. Αν είτε*
$$\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c} g(x)=0 \tag{1.2}$$
είτε
$$\lim_{x\to c}|g(x)|=\infty \tag{1.3}$$
τότε
$$\liminf_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} \le \liminf_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} \le \limsup_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} \le \limsup_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{1.4}$$
Συνεπώς, αν το όριο $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ υπάρχει τότε και το όριο $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ υπάρχει, και ισχύει
$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$
Απόδειξη: Για $x\in I$ και y ανάμεσα στο x και c εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rôlle στο διάστημα με άκρα τα x, y στη συνάρτηση
$$h(t)=\big(f(t)-f(y)\big)-\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\big(g(t)-g(y)\big),$$
αφού φανερά $h(x)=h(y)=0$. Οπότε υπάρχει ξ ανάμεσα στα x και y ώστε $h'(\xi)=0$ ισοδύναμα
$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Παρατηρήστε ότι $g(x) \neq g(y)$ αλλιώς από το Θεώρημα Rôlle η g' έχει ρίζα αντιφάσκοντας με την υπόθεση.

Άρα, για t ανάμεσα στα x και c

$$\inf_t \frac{f'(t)}{g'(t)} \leq \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} \leq \sup_t \frac{f'(t)}{g'(t)},$$

δηλαδή

$$\inf_t \frac{f'(t)}{g'(t)} \leq \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} \leq \sup_t \frac{f'(t)}{g'(t)}. \tag{1.5}$$

Τα $\inf_t$ και $\sup_t$ παραπάνω μπορούν να είναι και $-\infty$ και $+\infty$ αντίστοιχα. Αν ισχύει η (1.2) τότε ξαναγράφουμε την (1.5) με τη μορφή

$$\inf_t \frac{f'(t)}{g'(t)} \leq \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(y)}{g(x)}}{1-\frac{g(y)}{g(x)}} \leq \sup_t \frac{f'(t)}{g'(t)},$$

ενώ αν ισχύει η (1.3) τότε ξαναγράφουμε την (1.5) με τη μορφή

$$\inf_t \frac{f'(t)}{g'(t)} \leq \frac{\frac{f(y)}{g(y)} - \frac{f(x)}{g(y)}}{1-\frac{g(x)}{g(y)}} \leq \sup_t \frac{f'(t)}{g'(t)}.$$

Σε κάθε περίπτωση, αφήνοντας το y να τείνει στο c, στην πρώτη περίπτωση παίρνουμε

$$\inf_t \frac{f'(t)}{g'(t)} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \sup_t \frac{f'(t)}{g'(t)},$$

ενώ στη δεύτερη περίπτωση παίρνουμε

$$\inf_t \frac{f'(t)}{g'(t)} \leq \liminf_{y\to c} \frac{f(y)}{g(y)} \leq \limsup_{y\to c} \frac{f(y)}{g(y)} \leq \sup_t \frac{f'(t)}{g'(t)}.$$

Παρατηρήστε ότι στη δεύτερη περίπτωση είναι υποχρεωτικό να πάρουμε lim inf και lim sup, αφού δεν γνωρίζουμε αν το όριο του $f(y)/g(y)$ υπάρχει. Αφήνοντας τώρα το x να τείνει στο c προκύπτει η (1.4) ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

1.3 Απόδειξη με τον ορισμό του ορίου

Αποδεικνύουμε εδώ το Θεώρημα 1.2.2 χωρίς τη χρήση lim inf και lim sup αλλά με συστηματική χρήση του ορισμού του ορίου.

Υποθέτουμε αρχικά ότι το c είναι πραγματικός αριθμός και το αριστερό άκρο του διαστήματος I.

Περίπτωση 1η: $\lim_{x\to c} f'(x)/g'(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

Θεωρούμε $\epsilon > 0$ και από τον ορισμό του ορίου συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε $c + \delta_1 \in I$ και για κάθε $x \in (c, c + \delta_1)$ ισχύει $\ell - \epsilon/2 < f'(x)/g'(x) < \ell + \epsilon/2$. Για κάθε x, y στο $(c, c + \delta_1)$ υπάρχει ξ ανάμεσά τους ώστε να ισχύει

$$\ell - \frac{\epsilon}{2} < \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} < \ell + \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.6}$$

Αν ισχύει η (1.2) παίρνουμε όρια στην προηγούμενη για $y \to c$ και συμπεραίνουμε ότι

$$\ell - \epsilon < \ell - \frac{\epsilon}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \ell + \frac{\epsilon}{2} < \ell - \epsilon$$

για κάθε x στο $(c, c+\delta_1)$. Άρα από τον ορισμό του ορίου $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = \ell$.

Αν ισχύει η (1.3) τότε ξαναγράφουμε την (1.6) ως

$$\ell - \frac{\epsilon}{2} < \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(y)}{g(x)}}{1 - \frac{g(y)}{g(x)}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} < \ell + \frac{\epsilon}{2}, \tag{1.7}$$

και αφού $\lim_{x\to c} |g(x)| = \infty$, με σταθερό το y, υπάρχει $0 < \delta_2 < \delta_1$ ώστε για κάθε $x \in (c, c + \delta_2)$ να ισχύει

$$\left|\frac{g(y)}{g(x)}\right| < \frac{\epsilon}{4}\frac{1}{|\ell| + (\epsilon/2)} \quad \text{και} \quad \left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| < \frac{\epsilon}{4}. \tag{1.8}$$

Αναδιατάσσοντας τους όρους της (1.7) (η ποσότητα $1 - (g(y)/g(x))$ είναι θετική, αφού από την (1.8) εύκολα προκύπτει $|g(y)/g(x)| < 1$) και χρησιμοποιώντας τις (1.8) βρίσκουμε ότι

$$\ell - \epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \ell + \epsilon$$

για κάθε $x \in (c, c + \delta_2)$. Από τον ορισμό του ορίου $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = \ell$.

Περίπτωση 2η: $\lim_{x\to c} f'(x)/g'(x) = +\infty$.

Για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε $f'(x)/g'(x) > 2M$ για κάθε $x \in (c, c+\delta_1)$. Άρα για κάθε x, y στο $(c, c+\delta_1)$ υπάρχει ξ ανάμεσά τους ώστε

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \geq 2M. \tag{1.9}$$

Αν ισχύει η (1.2) τότε παίρνοντας όριο $y \to c$ προκύπτει ότι για κάθε $x \in (c, c+\delta_1)$ ισχύει $f(x)/g(x) \geq 2M > M$ δηλαδή $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = +\infty$.

Αν ισχύει η (1.2) ξαναγράφουμε την (1.9) στη μορφή

$$\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(y)}{g(x)}}{1 - \frac{g(y)}{g(x)}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \geq 2M.$$

Με σταθερό το y επειδή $\lim_{x\to c} |g(x)| = \infty$ υπάρχει $\delta_2 > 0$ με $0 < \delta_2 < \delta_1$ ώστε για κάθε $x \in (c, c+\delta_2)$ να ισχύει

$$\left|\frac{g(y)}{g(x)}\right| < \frac{1}{4} \quad \text{και} \quad \left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| < \frac{M}{2}. \tag{1.10}$$

Αναδιατάσσοντας τους όρους της (1.9) όπως και πριν, και χρησιμοποιώντας την (1.10) παίρνουμε ότι για κάθε $x \in (c, c+\delta_2)$ ισχύει $f(x)/g(x) > M$. Δηλαδή $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = +\infty$.

Περίπτωση 3η: $\lim_{x\to c} f'(x)/g'(x) = -\infty$.

Επαναλαμβάνουμε τα ίδια επιχειρήματα όπως και πριν.

Τέλος αν το c, ως αριστερό άκρο του διαστήματος I, είναι το $-\infty$ επαναλαμβάνουμε τα παραπάνω, μόνο που τώρα τα διάφορα δ θα αντικατασταθούν από αρνητικούς αριθμούς r οσοδήποτε μικρούς.

Ομοίως αν το c είναι δεξί άκρο του διαστήματος I.

Αντώνης Τσολομύτης
Σάμος 2023