Μαθηματικό τυπολόγιο

Ορισμοί

$f(n) = O(g(n))$	ανν $\exists$ θετικοί c, n_0 ώστε $0 \le f(n) \le cg(n)$ $\forall n \ge n_0$.
$f(n) = \Omega(g(n))$	ανν $\exists$ θετικοί c, n_0 ώστε $f(n) \ge cg(n) \ge 0$ $\forall n \ge n_0$.
$f(n) = \Theta(g(n))$	iff $f(n) = O(g(n))$ και $f(n) = \Omega(g(n))$.
$f(n) = o(g(n))$	ανν $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = 0$.
$\lim_{n\to\infty} a_n = a$	ανν $\forall \epsilon > 0$, $\exists n_0$ ώστε $\lvert a_n - a\rvert < \epsilon$, $\forall n \ge n_0$.
$\sup S$	ο ελάχιστος $b \in \mathbb{R}$ ώστε $b \ge s$, $\forall s \in S$.
$\inf S$	ο μέγιστος $b \in \mathbb{R}$ ώστε $b \le s$, $\forall s \in S$.
$\liminf_{n\to\infty} a_n$	$\lim_{n\to\infty} \inf\{a_i \mid i \ge n, i \in \mathbb{N}\}$.
$\limsup_{n\to\infty} a_n$	$\lim_{n\to\infty} \sup\{a_i \mid i \ge n, i \in \mathbb{N}\}$.
$\binom{n}{k}$	Συνδυασμοί: Πλήθος k υποσυνόλων μεγέθους n συνόλου.
$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$	Αριθμοί Stirling (1ου είδους): Διευθετήσεις συνόλου n στοιχείων σε k κύκλους.
$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$	Αριθμοί Stirling (2ου είδους): Διαμερίσεις συνόλου n στοιχείων σε k μη κενά σύνολα.
$\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle$	1ης τάξης αριθμοί Euler: Μεταθέσεις των $\pi_1\pi_2\ldots\pi_n$ στο $\{1, 2, \ldots, n\}$ με k αυξήσεις.
$\left\langle\!\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle\!\right\rangle$	2ης τάξης αριθμοί Euler.
C_n	Αριθμοί Catalan: Δυαδικά δέντρα με $n+1$ κορυφές.

Σειρές

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Γενικά:

$$\sum_{i=1}^{n} i^m = \frac{1}{m+1}\left[(n+1)^{m+1} - 1 - \sum_{i=1}^{n}\left((i+1)^{m+1} - i^{m+1} - (m+1)i^m\right)\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^m = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k} B_k n^{m+1-k}.$$

Γεωμετρικές σειρές:

$$\sum_{i=0}^{n} c^i = \frac{c^{n+1}-1}{c-1}, \quad c \ne 1, \qquad \sum_{i=0}^{\infty} c^i = \frac{1}{1-c}, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} c^i = \frac{c}{1-c}, \quad |c| < 1,$$

$$\sum_{i=0}^{n} ic^i = \frac{nc^{n+2} - (n+1)c^{n+1} + c}{(c-1)^2}, \quad c \ne 1, \qquad \sum_{i=0}^{\infty} ic^i = \frac{c}{(1-c)^2}, \quad |c| < 1.$$

Αρμονικές σειρές:

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}, \qquad \sum_{i=1}^{n} iH_i = \frac{n(n+1)}{2}H_n - \frac{n(n-1)}{4}.$$

$$\sum_{i=1}^{n} H_i = (n+1)H_n - n, \qquad \sum_{i=1}^{n}\binom{i}{m}H_i = \binom{n+1}{m+1}\left(H_{n+1} - \frac{1}{m+1}\right).$$

1. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ **2.** $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$ **3.** $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

4. $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ **5.** $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

6. $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$ **7.** $\sum_{k=0}^{n}\binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}$

8. $\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$ **9.** $\sum_{k=0}^{n}\binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$

10. $\binom{n}{k} = (-1)^k\binom{k-n-1}{k}$ **11.** $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$ **12.** $\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} = 2^{n-1} - 1$

13. $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$ **15.** $\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} = (n-1)!H_{n-1}$ **16.** $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$ **17.** $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ **18.** $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \binom{n}{2}$ **20.** $\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = n!$ **21.** $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ **22.** $\left\langle \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\rangle = 1$ **23.** $\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} n \\ n-1-k \end{matrix} \right\rangle$

24. $\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle = (k+1)\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\rangle + (n-k)\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\rangle$ **25.** $\left\langle \begin{matrix} 0 \\ k \end{matrix} \right\rangle = \begin{cases} 1 & \text{αν } k=0, \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$ **26.** $\left\langle \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\rangle = 2^n - n - 1$

27. $\left\langle \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\rangle = 3^n - (n+1)2^n + \binom{n+1}{2}$ **28.** $x^n = \sum_{k=0}^{n}\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle\binom{x+k}{n}$ **29.** $\left\langle \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\rangle = \sum_{k=0}^{m}\binom{n+1}{k}(m+1-k)^n(-1)^k$

30. $m!\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{n}\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle\binom{k}{n-m}$ **31.** $\left\langle \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\rangle = \sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\binom{n-k}{m}(-1)^{n-k-m}k!$ **32.** $\left\langle\!\left\langle \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\rangle\!\right\rangle = 1$ **33.** $\left\langle\!\left\langle \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\rangle\!\right\rangle = 0$ για $n \ne 0$

34. $\left\langle\!\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle\!\right\rangle = (k+1)\left\langle\!\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\rangle\!\right\rangle + (2n-1-k)\left\langle\!\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\rangle\!\right\rangle$ **35.** $\sum_{k=0}^{n}\left\langle\!\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle\!\right\rangle = \frac{(2n)^{\underline{n}}}{2^n}$ **36.** $\begin{bmatrix} x \\ x-n \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{n}\left\langle\!\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle\!\right\rangle\binom{x+n-1-k}{2n}$

37. $\begin{bmatrix} n+1 \\ m+1 \end{bmatrix} = \sum_{k}\binom{n}{k}\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix}(m+1)^{n-k}.$

Μαθηματικό τυπολόγιο

Ταυτότητες (συνέχεια)

38. $\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n+1}{m+1} = \sum_k \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k}\binom{k}{m} = \sum_{k=0}^{n} \genfrac{[}{]}{0pt}{}{k}{m} n^{\underline{n-k}} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{k}{m}$

39. $\genfrac{[}{]}{0pt}{}{x}{x-n} = \sum_{k=0}^{n} \left\langle\!\!\left\langle {n \atop k} \right\rangle\!\!\right\rangle \binom{x+k}{2n}$

40. $\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{m} = \sum_k \binom{n}{k}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{k+1}{m+1}(-1)^{n-k}$

41. $\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{m} = \sum_k \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n+1}{k+1}\binom{k}{m}(-1)^{m-k}$

42. $\genfrac{[}{]}{0pt}{}{m+n+1}{m} = \sum_{k=0}^{m} k \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n+k}{k}$

43. $\genfrac{[}{]}{0pt}{}{m+n+1}{m} = \sum_{k=0}^{m} k(n+k) \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n+k}{k}$

44. $\binom{n}{m} = \sum_k \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n+1}{k+1}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{k}{m}(-1)^{m-k}$

45. $(n-m)!\binom{n}{m} = \sum_k \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n+1}{k+1}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{k}{m}(-1)^{m-k}, \quad \text{for } n \ge m$

46. $\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{n-m} = \sum_k \binom{m-n}{m+k}\binom{m+n}{n+k}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{m+k}{k}$

47. $\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{n-m} = \sum_k \binom{m-n}{m+k}\binom{m+n}{n+k}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{m+k}{k}$

48. $\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{l+m}\binom{l+m}{l} = \sum_k \genfrac{[}{]}{0pt}{}{k}{l}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n-k}{m}\binom{n}{k}$

49. $\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{l+m}\binom{l+m}{l} = \sum_k \genfrac{[}{]}{0pt}{}{k}{l}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n-k}{m}\binom{n}{k}.$

Δέντρα

Κάθε δέντρο n κορυφών έχει $n-1$ ακμές.

Ανισότητα Kraft: Αν το βάθος των φύλλων ενός δυαδικού δέντρου είναι $d_1, \ldots, d_n$:

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{-d_i} \le 1,$$

και η ισότητα ισχύει αν κάθε εσωτερικός κόμβος έχει 2 απογόνους.

Αναδρομικές σχέσεις

Κύρια μέθοδος:

$$T(n) = aT(n/b) + f(n), \quad a \ge 1, b > 1$$

Αν $\exists \epsilon > 0$ ώστε $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ τότε $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.
Αν $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ τότε

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log_2 n).$$

Αν $\exists \epsilon > 0$ ώστε $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$, και $\exists c < 1$ ώστε $af(n/b) \le cf(n)$ για μεγάλα n, τότε

$$T(n) = \Theta(f(n)).$$

Αντικατάσταση (παράδειγμα): Θεωρήστε την ακόλουθη αναδρομική σχέση

$$T_{i+1} = 2^{2^i} \cdot T_i^2, \quad T_1 = 2.$$

Παρατηρήστε ότι T_i είναι πάντα δύναμη του δύο. Έστω ότι $t_i = \log_2 T_i$. Τότε έχουμε

$$t_{i+1} = 2^i + 2t_i, \quad t_1 = 1.$$

Έστω ότι $u_i = t_i/2^i$. Διαιρώντας και τις δύο πλευρές της προηγούμενης με 2^{i+1} παίρνουμε

$$\frac{t_{i+1}}{2^{i+1}} = \frac{2^i}{2^{i+1}} + \frac{t_i}{2^i}.$$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε

$$u_{i+1} = \tfrac{1}{2} + u_i, \qquad u_1 = \tfrac{1}{2},$$

που απλά είναι $u_i = i/2$. Έτσι βρίσκουμε ότι T_i έχει κλειστή μορφή $T_i = 2^{i2^{i-1}}$.
Αθροίσμα παραγόντων (παράδ.): Θεωρήστε την αναδρομική σχέση

$$T(n) = 3T(n/2) + n, \quad T(1) = 1.$$

Μεταφέρουμε όλους τους όρους με T στα αριστερά

$$T(n) - 3T(n/2) = n.$$

Τώρα αναπτύξετε την αναδρομή και επιλέξτε έναν παράγοντα που κάνει την αριστερή πλευρά τηλεσκοπική.

$$\begin{aligned} 1\big(T(n) - 3T(n/2) &= n\big) \\ 3\big(T(n/2) - 3T(n/4) &= n/2\big) \\ \vdots \qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\ 3^{\log_2 n - 1}\big(T(2) - 3T(1) &= 2\big) \end{aligned}$$

Έστω ότι $m = \log_2 n$. Αθροίζοντας στα αριστερά παίρνουμε $T(n) - 3^m T(1) = T(n) - 3^m = T(n) - n^k$ όπου $k = \log_2 3 \approx 1{,}58496$. Αθροίζοντας στα δεξιά παίρνουμε

$$\sum_{i=0}^{m-1} \frac{n}{2^i} 3^i = n \sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{3}{2}\right)^i.$$

Έστω ότι $c = \frac{3}{2}$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} n\sum_{i=0}^{m-1} c^i &= n\left(\frac{c^m - 1}{c - 1}\right) \\ &= 2n(c^{\log_2 n} - 1) \\ &= 2n(c^{(k-1)\log_c n} - 1) \\ &= 2n^k - 2n, \end{aligned}$$

και άρα $T(n) = 3n^k - 2n$. Πλήρεις αναδρομικές σχέσεις μπορούν να γραφτούν μερικώς ως εξής (παράδειγμα): Θεωρήστε την

$$T_i = 1 + \sum_{j=0}^{i-1} T_j, \quad T_0 = 1.$$

Παρατηρήστε ότι

$$T_{i+1} = 1 + \sum_{j=0}^{i} T_j.$$

Αφαιρώντας βρίσκουμε

$$\begin{aligned} T_{i+1} - T_i &= 1 + \sum_{j=0}^{i} T_j - 1 - \sum_{j=0}^{i-1} T_j \\ &= T_i. \end{aligned}$$

Άρα $T_{i+1} = 2T_i = 2^{i+1}$.

Γεννήτριες συναρτήσεις:

1. Πολλαπλασιάστε και τις δύο πλευρές της εξίσωσης με x^i.
2. Αθροίστε και τις δύο πλευρές ως προς τα i για τα οποία η εξίσωση είναι σωστή.
3. Επιλέξτε μια γεννήτρια συνάρτηση $G(x)$. Συνήθως $G(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i g_i$.
4. Ξαναγράψτε την εξίσωση ως προς τη γεννήτρια συνάρτηση $G(x)$.
5. Λύστε ως προς $G(x)$.
6. Ο συντελεστής του x^i στη $G(x)$ είναι g_i.

Παράδειγμα:

$$g_{i+1} = 2g_i + 1, \quad g_0 = 0.$$

Πολλαπλασιάζουμε και αθροίζουμε:

$$\sum_{i\ge 0} g_{i+1}x^i = \sum_{i \ge 0} 2g_i x^i + \sum_{i\ge 0} x^i.$$

Επιλέγουμε $G(x) = \sum_{i\ge 0} x^i g_i$. Ξαναγράφουμε ως προς $G(x)$:

$$\frac{G(x) - g_0}{x} = 2G(x) + \sum_{i \ge 0} x^i.$$

Απλοποιούμε:

$$\frac{G(x)}{x} = 2G(x) + \frac{1}{1-x}.$$

Λύνουμε ως προς $G(x)$:

$$G(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}.$$

Αναπτύσσουμε χρησιμοποιώντας σε άθροισμα κλασμάτων:

$$\begin{aligned} G(x) &= x\left(\frac{2}{1-2x} - \frac{1}{1-x}\right) \\ &= x\left(2\sum_{i\ge 0} 2^i x^i - \sum_{i \ge 0} x^i\right) \\ &= \sum_{i \ge 0} (2^{i+1} - 1)x^{i+1}. \end{aligned}$$

Οπότε $g_i = 2^i - 1$.

Μαθηματικό τυπολόγιο

$\pi \approx 3{,}14159$, $e \approx 2{,}71828$, $\gamma \approx 0{,}57721$, $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61803$, $\hat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}61803$

i	2^i	p_i
1	2	2
2	4	3
3	8	5
4	16	7
5	32	11
6	64	13
7	128	17
8	256	19
9	512	23
10	1 024	29
11	2 048	31
12	4 096	37
13	8 192	41
14	16 384	43
15	32 768	47
16	65 536	53
17	131 072	59
18	262 144	61
19	524 288	67
20	1 048 576	71
21	2 097 152	73
22	4 194 304	79
23	8 388 608	83
24	16 777 216	89
25	33 554 432	97
26	67 108 864	101
27	134 217 728	103
28	268 435 456	107
29	536 870 912	109
30	1 073 741 824	113
31	2 147 483 648	127
32	4 294 967 296	131

Pascal's Triangle

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

General

Αριθμοί Bernoulli ($B_i = 0$, περιττό $i \neq 1$):

$$B_0 = 1,\ B_1 = -\tfrac{1}{2},\ B_2 = \tfrac{1}{6},\ B_4 = -\tfrac{1}{30},$$
$$B_6 = \tfrac{1}{42},\ B_8 = -\tfrac{1}{30},\ B_{10} = \tfrac{5}{66}.$$

Αλλαγή βάσης, τύπος τριωνύμου:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}, \qquad \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Αριθμός Euler e:

$$e = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24} + \tfrac{1}{120} + \cdots$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$
$$\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^{n+1}.$$
$$\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n = e - \frac{e}{2n} + \frac{11e}{24n^2} - O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Αρμονικοί αριθμοί:

$$1,\ \tfrac{3}{2},\ \tfrac{11}{6},\ \tfrac{25}{12},\ \tfrac{137}{60},\ \tfrac{49}{20},\ \tfrac{363}{140},\ \tfrac{761}{280},\ \tfrac{7129}{2520},\ \ldots$$

$$\ln n < H_n < \ln n + 1,$$
$$H_n = \ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Παραγοντικό, Προσέγγιση Stirling:

$$1,\ 2,\ 6,\ 24,\ 120,\ 720,\ 5040,\ 40320,\ 362880,\ \ldots$$
$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Συνάρτηση Ackermann και αντίστροφη:

$$a(i,j) = \begin{cases} 2^j & i = 1 \\ a(i-1,2) & j=1 \\ a(i-1, a(i,j-1)) & i,j \geq 2 \end{cases}$$
$$\alpha(i) = \min\{j \mid a(j,j) \geq i\}.$$

Διωνυμική κατανομή:

$$\mathbb{P}[X = k] = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \qquad q = 1 - p,$$
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = np.$$

Κατανομή Poisson:

$$\mathbb{P}[X = k] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad \mathbb{E}[X] = \lambda.$$

Κανονική (Γκαουσιανή) κατανομή:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad \mathbb{E}[X] = \mu.$$

Ο «συλλέκτης κουπονιών»: Μας δίνουν ένα τυχαίο κουπόνι κάθε μέρα, και υπάρχουν n διαφορετικοί τύποι κουπονιών. Η κατανομή των κουπονιών είναι ομοιόμορφη. Το αναμενόμενο πλήθος ημερών για να συγκεντρώσουμε και τα n είδη είναι nH_n.

Probability

Συνεχείς κατανομές:

Αν
$$\mathbb{P}[a < X < b] = \int_a^b p(x)\,dx,$$
τότε p είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X. Αν
$$\mathbb{P}[X < a] = P(a),$$
τότε P είναι η συνάρτηση κατανομής της X. Αν υπάρχει και η P και η p τότε
$$P(a) = \int_{-\infty}^{a} p(x)\,dx.$$

Μέση τιμή:

Αν η X είναι διακριτή
$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_x g(x)\mathbb{P}[X = x].$$
Αν η X είναι συνεχής τότε
$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dP(x).$$

Διακύμανση, τυπική απόκλιση:

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2,$$
$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}.$$

Για τα ενδεχόμενα A και B:

$$\mathbb{P}[A \vee B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \ \&\ B]$$
$$\mathbb{P}[A \ \&\ B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B],$$
ανν A και B ανεξάρτητα.
$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \ \&\ B]}{\mathbb{P}[B]}$$

Για τυχαίες μεταβλητές X και Y:

$$\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y],$$
αν X και Y ανεξάρτητες.
$$\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y],$$
$$\mathbb{E}[cX] = c\mathbb{E}[X].$$

Θεώρημα Bayes:

$$\mathbb{P}[A_i|B] = \frac{\mathbb{P}[B|A_i]\mathbb{P}[A_i]}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}[A_j]\mathbb{P}[B|A_j]}.$$

Εγκλεισμός-Αποκλεισμός:

$$\mathbb{P}\Big[\bigvee_{i=1}^{n} X_i\Big] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[X_i] + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{i_i < \cdots < i_k} \mathbb{P}\Big[\bigwedge_{j=1}^{k} X_{i_j}\Big].$$

Ανισότητες ροπών:

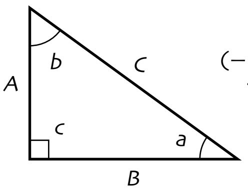
$$\mathbb{P}\big[|X| \geq \lambda\mathbb{E}[X]\big] \leq \frac{1}{\lambda},$$
$$\mathbb{P}\Big[\big|X - \mathbb{E}[X]\big| \geq \lambda \cdot \sigma\Big] \leq \frac{1}{\lambda^2}.$$

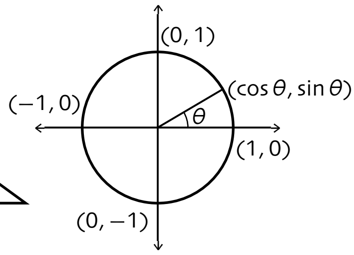
Γεωμετρική κατανομή:

$$\mathbb{P}[X = k] = pq^{k-1}, \qquad q = 1 - p,$$
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = \frac{1}{p}.$$

Μαθηματικό τυπολόγιο

Τριγωνομετρία





Πυθαγόρειο Θεώρημα:

$$C^2 = A^2 + B^2.$$

Ορισμοί:

$$\sin a = A/C, \quad \cos a = B/C, \quad \tan a = A/B,$$
$$\cot a = B/A, \quad \csc a = C/A, \quad \sec a = C/B.$$

Εμβαδόν, ακτίνα εγγεγραμμένου κύκλου:

$$\tfrac{1}{2}AB, \qquad \frac{AB}{A+B+C}.$$

Ταυτότητες:

$$\sin x = \frac{1}{\csc x} \qquad \cos x = \frac{1}{\sec x}$$
$$\tan x = \frac{1}{\cot x} \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x \qquad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$
$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \qquad \sin x = \sin(\pi - x)$$
$$\cos x = -\cos(\pi - x) \qquad \tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$\cot x = -\cot(\pi - x) \qquad \csc x = \cot\frac{x}{2} - \cot x$$
$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$
$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$
$$\cot(x \pm y) = \frac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot x \pm \cot y}$$
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \qquad \sin 2x = \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$
$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x, \qquad \cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$
$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} \qquad \cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2\cot x}$$
$$\sin(x+y)\sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y$$
$$\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2 x - \sin^2 y.$$

Εξίσωση Euler:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \qquad e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Πίνακες

Πολλαπλασιασμός:

$$C = A \cdot B, \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Ορίζουσες:

$\det A \neq 0$ ανν A αντιστρέψιμος.

$$\det A \cdot B = \det A \cdot \det B,$$
$$\det A = \sum_{\pi} \prod_{i=1}^{n} \operatorname{sign}(\pi) a_{i,\pi(i)}.$$

Ορίζουσα 2×2 και 3×3:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} - h\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + i\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$
$$= aei + bfg + cdh - ceg - fha - ibd.$$

Permanents:

$$\operatorname{perm} A = \sum_{\pi} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)}.$$

Υπερβολικές συναρτήσεις

Ορισμοί:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$
$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x},$$
$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{1}{\tanh x}.$$

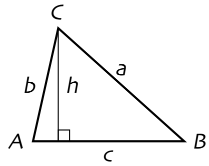
Ταυτότητες:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \qquad \tanh^2 x + \operatorname{sech}^2 x = 1$$
$$\coth^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1 \qquad \sinh(-x) = -\sinh x$$
$$\cosh(-x) = \cosh x \qquad \tanh(-x) = -\tanh x$$
$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$
$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$
$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$
$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x \qquad \cosh x + \sinh x = e^x$$
$$\cosh x - \sinh x = e^{-x}$$
$$(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh nx + \sinh nx, \quad n \in \mathbb{Z}$$
$$2\sinh^2\frac{x}{2} = \cosh x - 1 \qquad 2\cosh^2\frac{x}{2} = \cosh x + 1$$

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	δεν ορίζεται

… στα Μαθηματικά δεν καταλαβαίνεις πράγματα, απλά συνηθίζεις σε αυτά.
– J. von Neumann

Περισσότερη Τριγ.



Νόμος των συνημιτόνων:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Εμβαδόν:

$$\text{Εμβαδόν} = \tfrac{1}{2}hc, \quad = \tfrac{1}{2}ab\sin C, \quad = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2\sin C}.$$

Τύπος του Ήρωνα:

$$\text{Εμβαδόν} = \sqrt{s \cdot s_a \cdot s_b \cdot s_c},$$
$$s = \tfrac{1}{2}(a+b+c),$$
$$s_a = s - a,$$
$$s_b = s - b,$$
$$s_c = s - c.$$

Περισσότερες ταυτότητες:

$$\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}},$$
$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}},$$
$$\tan\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}, \quad = \frac{1-\cos x}{\sin x}, \quad = \frac{\sin x}{1+\cos x},$$
$$\cot\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}, \quad = \frac{1+\cos x}{\sin x}, \quad = \frac{\sin x}{1-\cos x},$$
$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$
$$\tan x = -i\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}, \quad = -i\frac{e^{2ix} - 1}{e^{2ix} + 1},$$
$$\sin x = \frac{\sinh ix}{i},$$
$$\cos x = \cosh ix,$$
$$\tan x = \frac{\tanh ix}{i}.$$

(συνεχίζεται σελ. 7)

Μαθηματικό τυπολόγιο

Θεωρία Αριθμών

Το κινέζικο θεώρημα υπολοίπου: Υπάρχει αριθμός C ώστε:

$$\begin{aligned} C &\equiv r_1 \bmod m_1 \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ C &\equiv r_n \bmod m_n \end{aligned}$$

αν m_i και m_j είναι μεταξύ τους πρώτοι για $i \neq j$.

Η συνάρτηση του Euler: $\phi(x)$ είναι ο αριθμός των θετικών ακεραίων μικρότεροι από x σχετικά πρώτοι με τον x. Αν $\prod_{i=1}^{n} p_i^{e_i}$ είναι παραγοντοποίηση σε πρώτους του x τότε

$$\phi(x) = \prod_{i=1}^{n} p_i^{e_i-1}(p_i - 1).$$

Θεώρημα Euler: Αν a και b μεταξύ τους πρώτοι, τότε

$$1 \equiv a^{\phi(b)} \bmod b.$$

Θεώρημα Fermat:

$$1 \equiv a^{p-1} \bmod p.$$

Ο Ευκλείδειος αλγόριθμος: αν $a > b$ ακέραιοι, τότε

$$\gcd(a, b) = \gcd(a \bmod b, b).$$

Αν $\prod_{i=1}^{n} p_i^{e_i}$ η παραγοντοποίηση σε πρώτους του x τότε

$$S(x) = \sum_{d|x} d = \prod_{i=1}^{n} \frac{p_i^{e_i+1} - 1}{p_i - 1}.$$

Τέλειοι Αριθμοί: Ο x είναι τέλειος άρτιος αριθμός ανν $x = 2^{n-1}(2^n - 1)$ και ο $2^n - 1$ είναι πρώτος.

Θεώρημα Wilson: ο n είναι πρώτος ανν

$$(n-1)! \equiv -1 \bmod n.$$

Αντιστροφή Möbius:

$$\mu(i) = \begin{cases} 1 & \text{αν } i = 1. \\ 0 & \text{το } i \text{ έχει τετράγωνα.} \\ (-1)^r & \text{το } i \text{ είναι γινόμενο} \\ & ir \text{ διακεκριμένων πρώτων.} \end{cases}$$

Αν

$$G(a) = \sum_{d|a} F(d),$$

τότε

$$F(a) = \sum_{d|a} \mu(d) G\left(\frac{a}{d}\right).$$

Πρώτοι αριθμοί:

$$p_n = n \ln n + n \ln \ln n - n + n \frac{\ln \ln n}{\ln n} + O\left(\frac{n}{\ln n}\right),$$

$$\pi(n) = \frac{n}{\ln n} + \frac{n}{(\ln n)^2} + \frac{2!n}{(\ln n)^3} + O\left(\frac{n}{(\ln n)^4}\right).$$

Θεωρία Γράφων

Ορισμοί:

Βρόγχος Ακμή που συνδέει μια κορυφή με τον εαυτό της.

Κατευθυνόμενος Κάθε ακμή έχει κατεύθυνση.

Απλό Γράφος χωρίς βρόγχους ή ακμές με πολλαπλότητα.

Περίπατος Μια ακολουθία $v_0 e_1 v_1 \ldots e_l v_l$.

Διαδρομή Περίπατος με διακριτές κορυφές.

Μονοπάτι Διαδρομή με διακριτές κορυφές.

Συνεκτικό Γράφος με διαδρομές ανάμεσα σε κάθε δύο κορυφές.

Συνιστώσα Μεγιστικός συνεκτικός υπογράφος.

Δέντρο Συνεκτικός ακυκλικός γράφος.

Ελεύθερο δέντρο Δένδρο χωρίς ρίζα.

ΚΑΓ Κατευθυνόμενος ακυκλικός γράφος.

Eulerian Γράφος με μια διαδρομή που περνάει από κάθε κορυφή μία φορά.

Hamiltonian Γράφος με κύκλο που περνάει από κάθε κορυφή μία φορά.

Cut Σύνολο ακμών που αν αφαιρεθεί αυξάνεται ο αριθμός των συνιστωσών.

Cut-set Ελαχιστικό cut.

Cut edge Cut μεγέθους 1.

k-Συνεκτικό Γράφος συνεκτικός μετά την αφαίρεση οποιωνδήποτε $k-1$ κορυφών.

k-Tough $\forall S \subseteq V, S \neq \emptyset$ έχουμε $k \cdot c(G - S) \leq |S|$.

k-Κανονικό Γράφος με όλες τις κορυφές του βαθμού k.

k-Παράγοντας k-κανονικός παράγων υπογράφος.

Matching Σύνολο ακμών, που δεν έχει δύο διαδοχικές ακμές.

Κλίκα Σύνολο κορυφών, που όλες είναι διαδοχικές.

Ind. set Σύνολο κορυφών, που δεν έχει διαδοχικές κορυφές.

Κάλυμμα Κορυφών Σύνολο κορυφών που καλύπτουν όλες τις ακμές.

Επίπεδος γράφος Γράφος που μπορεί να εμφυτεφτεί στο επίπεδο.

Γράφος επιπέδου Εμφύτευση επίπεδου γράφου.

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2m.$$

Αν G επίπεδος τότε $n - m + f = 2$, οπότε

$$f \leq 2n - 4, \quad m \leq 3n - 6.$$

Κάθε επίπεδος γράφος έχει κορυφή βαθμού ≤ 5.

Συμβολισμός:

$E(G)$	Σύνολο ακμών
$V(G)$	Σύνολο κορυφών
$c(G)$	Πλήθος συνιστωσών
$G[S]$	Επαγόμ. υπογράφος
$\deg(v)$	Βαθμός της v
$\Delta(G)$	Μέγιστος βαθμός
$\delta(G)$	Ελάχιστος βαθμός
$\chi(G)$	Χρωματικός αριθμός
$\chi_E(G)$	Χρωμ. αριθμός ακμών
G^c	Συμπληρωματικός γρ.
K_n	Πλήρης γράφος
K_{n_1,n_2}	Πλήρης bipartite γρ.
$\mathrm{r}(k, l)$	Αριθμός Ramsey

Γεωμετρία

Προβολικές συντεταγμένες: τριάδες (x, y, z), όχι όλα τα x, y, z μηδέν.

$$(x, y, z) = (cx, cy, cz) \quad \forall c \neq 0.$$

Καρτεσιανές	Προβολικές
(x, y)	$(x, y, 1)$
$y = mx + b$	$(m, -1, b)$
$x = c$	$(1, 0, -c)$

Τύπος απόστασης, μετρικές L_p και L_∞:

$$\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2},$$

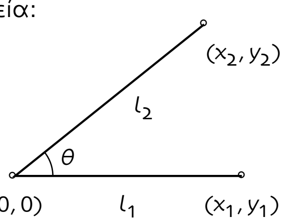
$$\left[|x_1 - x_0|^p + |y_1 - y_0|^p\right]^{1/p},$$

$$\lim_{p \to \infty} \left[|x_1 - x_0|^p + |y_1 - y_0|^p\right]^{1/p}.$$

Εμβαδόν τριγώνου (x_0, y_0), (x_1, y_1) και (x_2, y_2):

$$\frac{1}{2} \operatorname{abs} \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix}.$$

Γωνία σχηματιζόμενη από 3 σημεία:



$$\cos\theta = \frac{(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)}{l_1 l_2}.$$

Ευθεία από δύο σημεία (x_0, y_0) και (x_1, y_1):

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Εμβαδόν κύκλου, όγκος σφαίρας:

$$A = \pi r^2, \qquad V = \tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

Αν έχω δει πιο μακριά από άλλους είναι γιατί στάθηκα σε ώμους γιγάντων.
– Issac Newton

Μαθηματικό τυπολόγιο

π

Ταυτότητα Wallis:

$$\pi = 2 \cdot \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdots}$$

Ανάπτυγμα σε συνεχή κλάσματα του Brouncker:

$$\frac{\pi}{4} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cdots}}}}$$

Σειρά Gregrory:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

Σειρά Newton:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 2^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 2^5} + \cdots$$

Σειρά Sharp:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3^1\cdot 3} + \frac{1}{3^2\cdot 5} - \frac{1}{3^3\cdot 7} + \cdots\right)$$

Σειρές Euler:

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \cdots$$

$$\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \cdots$$

Απλά κλάσματα

Έστω ότι $N(x)$ και $D(x)$ πολυωνυμικές συναρτήσεις του x. Μπορούμε να αναλύσουμε το $N(x)/D(x)$ σε απλά κλάσματα. Πρώτα, αν ο βαθμός του N είναι μεγαλύτερος ή ίσος με το βαθμό του D, διαιρούμε το N με το D, βρίσκοντας

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{N'(x)}{D(x)},$$

όπου ο βαθμο του N' είναι μικρότερος του βαυθμού του D. Μετά, παραγοντοποιούμε το $D(x)$. Χρησιμοποιούμε τους εξής κανόνες: Για μη επαναλαμβανόμενο παράγοντα:

$$\frac{N(x)}{(x-a)D(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{N'(x)}{D(x)},$$

όπου

$$A = \left[\frac{N(x)}{D(x)}\right]_{x=a}.$$

Για επαναλαμβανόμενο παράγοντα:

$$\frac{N(x)}{(x-a)^m D(x)} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{A_k}{(x-a)^{m-k}} + \frac{N'(x)}{D(x)},$$

όπου

$$A_k = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{N(x)}{D(x)}\right)\right]_{x=a}.$$

Ο λογικός άνθρωπος προσαρμόζει τον εαυτό του στον κόσμο· ο μη λογικός επιμένει να προσαρμόσει τον κόσμο στον εαυτό του. Συνεπώς όλη η πρόοδος βασίζεται στον μη λογικό.
– George Bernard Shaw

Απειροστικός Λογισμός

Παράγωγοι:

1. $\frac{d(cu)}{dx} = c\frac{du}{dx}$
2. $\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$
3. $\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$
4. $\frac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$
5. $\frac{d(u/v)}{dx} = \frac{v\left(\frac{du}{dx}\right) - u\left(\frac{dv}{dx}\right)}{v^2}$
6. $\frac{d(e^{cu})}{dx} = ce^{cu}\frac{du}{dx}$
7. $\frac{d(c^u)}{dx} = (\ln c)c^u\frac{du}{dx}$
8. $\frac{d(\ln u)}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$
9. $\frac{d(\sin u)}{dx} = \cos u\frac{du}{dx}$
10. $\frac{d(\cos u)}{dx} = -\sin u\frac{du}{dx}$
11. $\frac{d(\tan u)}{dx} = \sec^2 u\frac{du}{dx}$
12. $\frac{d(\cot u)}{dx} = -\csc^2 u\frac{du}{dx}$
13. $\frac{d(\sec u)}{dx} = \tan u\,\sec u\frac{du}{dx}$
14. $\frac{d(\csc u)}{dx} = -\cot u\,\csc u\frac{du}{dx}$
15. $\frac{d(\arcsin u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$
16. $\frac{d(\arccos u)}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$
17. $\frac{d(\arctan u)}{dx} = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$
18. $\frac{d(\mathrm{arccot}\, u)}{dx} = \frac{-1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$
19. $\frac{d(\mathrm{arcsec}\, u)}{dx} = \frac{1}{u\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$
20. $\frac{d(\mathrm{arccsc}\, u)}{dx} = \frac{-1}{u\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$
21. $\frac{d(\sinh u)}{dx} = \cosh u\frac{du}{dx}$
22. $\frac{d(\cosh u)}{dx} = \sinh u\frac{du}{dx}$
23. $\frac{d(\tanh u)}{dx} = \mathrm{sech}^2 u\frac{du}{dx}$
24. $\frac{d(\coth u)}{dx} = -\mathrm{csch}^2 u\frac{du}{dx}$
25. $\frac{d(\mathrm{sech}\, u)}{dx} = -\mathrm{sech}\, u\,\tanh u\frac{du}{dx}$
26. $\frac{d(\mathrm{csch}\, u)}{dx} = -\mathrm{csch}\, u\,\coth u\frac{du}{dx}$
27. $\frac{d(\mathrm{arcsinh}\, u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx}$
28. $\frac{d(\mathrm{arccosh}\, u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$
29. $\frac{d(\mathrm{arctanh}\, u)}{dx} = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}$
30. $\frac{d(\mathrm{arccoth}\, u)}{dx} = \frac{1}{u^2-1}\frac{du}{dx}$
31. $\frac{d(\mathrm{arcsech}\, u)}{dx} = \frac{-1}{u\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$
32. $\frac{d(\mathrm{arccsch}\, u)}{dx} = \frac{-1}{|u|\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx}.$

Ολοκληρώματα:

1. $\int cu\,dx = c\int u\,dx$
2. $\int (u+v)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx$
3. $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}, \quad n \neq -1$
4. $\int \frac{1}{x}dx = \ln x$
5. $\int e^x\,dx = e^x$
6. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$
7. $\int u\frac{dv}{dx}dx = uv - \int v\frac{du}{dx}dx$
8. $\int \sin x\,dx = -\cos x$
9. $\int \cos x\,dx = \sin x$
10. $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x|$
11. $\int \cot x\,dx = \ln|\cos x|$
12. $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x|$
13. $\int \csc x\,dx = \ln|\csc x + \cot x|$
14. $\int \arcsin\frac{x}{a}dx = \arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2}, \quad a > 0$

Μαθηματικό τυπολόγιο

Απειροστικός Λογισμός (συνέχεια)

15. $\int \arccos\frac{x}{a}dx = \arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}, \quad a > 0$

16. $\int \arctan\frac{x}{a}dx = x\arctan\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\ln(a^2 + x^2), \quad a > 0$

17. $\int \sin^2(ax)dx = \frac{1}{2a}\big(ax - \sin(ax)\cos(ax)\big)$

18. $\int \cos^2(ax)dx = \frac{1}{2a}\big(ax + \sin(ax)\cos(ax)\big)$

19. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x$

20. $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x$

21. $\int \sin^n x\,dx = -\frac{\sin^{n-1}x\cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\,dx$

22. $\int \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1}x\sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx$

23. $\int \tan^n x\,dx = \frac{\tan^{n-1}x}{n-1} - \int \tan^{n-2}x\,dx, \quad n \neq 1$

24. $\int \cot^n x\,dx = -\frac{\cot^{n-1}x}{n-1} - \int \cot^{n-2}x\,dx, \quad n \neq 1$

25. $\int \sec^n x\,dx = \frac{\tan x\sec^{n-1}x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}x\,dx, \quad n \neq 1$

26. $\int \csc^n x\,dx = -\frac{\cot x\csc^{n-1}x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2}x\,dx, \quad n \neq 1$

27. $\int \sinh x\,dx = \cosh x$

28. $\int \cosh x\,dx = \sinh x$

29. $\int \tanh x\,dx = \ln|\cosh x|$

30. $\int \coth x\,dx = \ln|\sinh x|$

31. $\int \operatorname{sech} x\,dx = \arctan\sinh x$

32. $\int \operatorname{csch} x\,dx = \ln\left|\tanh\frac{x}{2}\right|$

33. $\int \sinh^2 x\,dx = \frac{1}{4}\sinh(2x) - \frac{1}{2}x$

34. $\int \cosh^2 x\,dx = \frac{1}{4}\sinh(2x) + \frac{1}{2}x$

35. $\int \operatorname{sech}^2 x\,dx = \tanh x$

36. $\int \operatorname{arcsinh}\frac{x}{a}dx = x\operatorname{arcsinh}\frac{x}{a} - \sqrt{x^2 + a^2}, \quad a > 0$

37. $\int \operatorname{arctanh}\frac{x}{a}dx = x\operatorname{arctanh}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln|a^2 - x^2|$

38. $\int \operatorname{arccosh}\frac{x}{a}dx = \begin{cases} x\operatorname{arccosh}\frac{x}{a} - \sqrt{x^2 + a^2}, & \text{αν } \operatorname{arccosh}\frac{x}{a} > 0 \text{ και } a > 0, \\ x\operatorname{arccosh}\frac{x}{a} + \sqrt{x^2 + a^2}, & \text{αν } \operatorname{arccosh}\frac{x}{a} < 0 \text{ και } a > 0, \end{cases}$

39. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right), \quad a > 0$

40. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}, \quad a > 0$

41. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}, \quad a > 0$

42. $\int (a^2 - x^2)^{3/2}dx = \frac{x}{8}(5a^2 - 2x^2)\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{3a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}, \quad a > 0$

43. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}, \quad a > 0$

44. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right|$

45. $\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2 - x^2}}$

46. $\int \sqrt{a^2 \pm x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 \pm x^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{a^2 \pm x^2}\right|$

47. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right|, \quad a > 0$

48. $\int \frac{dx}{ax^2 + bx} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a + bx}\right|$

49. $\int x\sqrt{a + bx}\,dx = \frac{2(3bx - 2a)(a + bx)^{3/2}}{15b^2}$

50. $\int \frac{\sqrt{a + bx}}{x}dx = 2\sqrt{a + bx} + a\int \frac{1}{x\sqrt{a + bx}}dx$

51. $\int \frac{x}{\sqrt{a + bx}}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{a + bx} - \sqrt{a}}{\sqrt{a + bx} + \sqrt{a}}\right|, \quad a > 0$

52. $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}dx = \sqrt{a^2 - x^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right|$

53. $\int x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = -\frac{1}{3}(a^2 - x^2)^{3/2}$

54. $\int x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2 - a^2)\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}, \quad a > 0$

55. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right|$

56. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2}$

57. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}, \quad a > 0$

58. $\int \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x}dx = \sqrt{a^2 + x^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 + x^2}}{x}\right|$

59. $\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}dx = \sqrt{x^2 - a^2} - a\arccos\frac{a}{|x|}, \quad a > 0$

60. $\int x\sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{1}{3}(x^2 \pm a^2)^{3/2}$

61. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a + \sqrt{a^2 + x^2}}\right|$

Περισσότερη τριγωνομετρία (συνέχεια από τη σελ. 4)

$\sin x\sin y = \frac{1}{2}\big(\cos(x - y) - cos(x + y)\big)$

$\cos x\cos y = \frac{1}{2}\big(\cos(x - y) + \cos(x + y)\big)$

$\sin x\cos y = \frac{1}{2}\big(\sin(x - y) + \sin(x + y)\big)$

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$

$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin(3x)$

$\cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos(3x)$

$\sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x)$

$\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x)$

$\sin^{2n-1} x = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-2}}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{2n-1}{k}\sin\big((2n - 2k - 1)x\big)$

$\cos^{2n-1} x = \frac{1}{2^{2n-2}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}\cos\big((2n - 2k - 1)x\big)$

$\sin^{2n} x = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} + \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{2n}{k}\cos\big(2(n - k)x\big)$

$\cos^{2n} x = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}\cos\big(2(n - k)x\big)$

Μαθηματικό τυπολόγιο

Απειροστικός Λογισμός (συνέχεια)

62. $\displaystyle\int \frac{dx}{x}\sqrt{x^2-a^2} = \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{|x|}, \quad a>0$

63. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \mp\frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{a^2 x}$

64. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2}$

65. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x^4}\,dx = \mp\frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{3a^2x^3}$

66. $$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\dfrac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right|, & \text{αν } b^2>4ac, \\[2ex] \dfrac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\dfrac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}, & \text{αν } b^2<4ac, \end{cases}$$

67. $$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}\right|, & \text{αν } a>0, \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\dfrac{-2ax-b}{\sqrt{b^2-4ac}}, & \text{αν } a<0, \end{cases}$$

68. $\displaystyle\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{2ax+b}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{4ax-b^2}{8a}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

69. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{a} - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

70. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}} = \begin{cases} \dfrac{-1}{\sqrt{c}}\ln\left|\dfrac{2\sqrt{c}\sqrt{ax^2+bx+c}+bx+2c}{x}\right|, & \text{αν } c>0, \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{-c}}\arcsin\dfrac{bx+2c}{|x|\sqrt{b^2-4ac}}, & \text{αν } c<0, \end{cases}$$

71. $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \left(\tfrac{1}{3}x^2 - \tfrac{2}{15}a^2\right)(x^2+a^2)^{3/2}$

72. $\displaystyle\int x^n\sin(ax)\,dx = -\tfrac{1}{a}x^n\cos(ax) + \tfrac{n}{a}\int x^{n-1}\cos(ax)\,dx$

73. $\displaystyle\int x^n\cos(ax)\,dx = \tfrac{1}{a}x^n\sin(ax) - \tfrac{n}{a}\int x^{n-1}\sin(ax)\,dx$

74. $\displaystyle\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx$

75. $\displaystyle\int x^n\ln(ax)\,dx = x^{n+1}\left(\frac{\ln(ax)}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$

76. $\displaystyle\int x^n(\ln ax)^m\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln ax)^m - \frac{m}{n+1}\int x^n(\ln ax)^{m-1}\,dx.$

$$x^1 = x^{\underline{1}} = x^{\overline{1}}$$
$$x^2 = x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}} = x^{\overline{2}} - x^{\overline{1}}$$
$$x^3 = x^{\underline{3}} + 3x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}} = x^{\overline{3}} - 3x^{\overline{2}} + x^{\overline{1}}$$
$$x^4 = x^{\underline{4}} + 6x^{\underline{3}} + 7x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}} = x^{\overline{4}} - 6x^{\overline{3}} + 7x^{\overline{2}} - x^{\overline{1}}$$
$$x^5 = x^{\underline{5}} + 15x^{\underline{4}} + 25x^{\underline{3}} + 10x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}} = x^{\underline{5}} - 15x^{\overline{4}} + 25x^{\overline{3}} - 10x^{\overline{2}} + x^{\overline{1}}$$

$$x^{\overline{1}} = x^1 \qquad x^{\underline{1}} = x^1$$
$$x^{\overline{2}} = x^2 + x^1 \qquad x^{\underline{2}} = x^2 - x^1$$
$$x^{\overline{3}} = x^3 + 3x^2 + 2x^1 \qquad x^{\underline{3}} = x^3 - 3x^2 + 2x^1$$
$$x^{\overline{4}} = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x^1 \qquad x^{\underline{4}} = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x^1$$
$$x^{\overline{5}} = x^5 + 10x^4 + 35x^3 + 50x^2 + 24x^1 \qquad x^{\underline{5}} = x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x^1$$

Λογισμός μεταβολών

Διαφορά, τελεστές ολίσθησης:

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x),$$
$$\mathbb{E}f(x) = f(x+1).$$

Θεμελιώδες θεώρημα:

$$f(x) = \Delta F(x) \Leftrightarrow \sum f(x)\delta x = F(x) + C.$$
$$\sum_a^b f(x)\delta x = \sum_{i=a}^{b-1} f(i).$$

Διαφορές:

$$\Delta(cu) = c\Delta u \qquad \Delta(u+v) = \Delta u + \Delta v$$
$$\Delta(uv) = u\Delta v + \mathbb{E}v\Delta u \qquad \Delta(x^{\underline{n}}) = nx^{\underline{n-1}}$$
$$\Delta(H_x) = x^{\underline{-1}} \qquad \Delta(2^x) = 2^x$$
$$\Delta(c^x) = (c-1)c^x \qquad \Delta\binom{x}{m} = \binom{x}{m-1}.$$

Αθροίσματα:

$$\sum cu\,\delta x = c\sum u\,\delta x$$
$$\sum(u+v)\,\delta x = \sum u\,\delta x + \sum v\,\delta x$$
$$\sum u\Delta v\,\delta x = uv - \sum \mathbb{E}v\Delta u\,\delta x$$
$$\sum x^{\underline{n}}\,\delta x = \frac{x^{\underline{n+1}}}{m+1} \qquad \sum x^{\underline{-1}}\,\delta x = H_x$$
$$\sum c^x\,\delta x = \frac{c^x}{c-1} \qquad \sum\binom{x}{m}\,\delta x = \binom{x}{m+1}.$$

Φθίνουσες παραγοντικές δυνάμεις:

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)\cdots(x-n+1), \quad n>0,$$
$$x^{\underline{0}} = 1,$$
$$x^{\underline{n}} = \frac{1}{(x+1)\cdots(x+|n|)}, \quad n<0,$$
$$x^{\underline{n+m}} = x^{\underline{m}}(x-m)^{\underline{n}}.$$

Αύξουσες παραγοντικές δυνάμεις:

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)\cdots(x+n-1), \quad n>0,$$
$$x^{\overline{0}} = 1,$$
$$x^{\overline{n}} = \frac{1}{(x-1)\cdots(x-|n|)}, \quad n<0,$$
$$x^{\overline{n+m}} = x^{\overline{m}}(x+m)^{\overline{n}}.$$

Μετατροπή:

$$x^{\underline{n}} = (-1)^n(-x)^{\overline{n}} = (x-n+1)^{\overline{n}} = 1/(x+1)^{\overline{-n}},$$
$$x^{\overline{n}} = (-1)^n(-x)^{\underline{n}} = (x+n-1)^{\underline{n}} = 1/(x-1)^{\underline{-n}},$$
$$x^n = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^{\underline{k}} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} x^{\overline{k}},$$
$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} x^k,$$
$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k.$$

Μαθηματικό τυπολόγιο

Σειρές

Σειρές Taylor:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a).$$

Αναπτύγματα:

$$\begin{array}{lclcl}
\frac{1}{1-x} & = & 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots & = & \sum_{i=0}^{\infty} x^i, \\
\frac{1}{1-cx} & = & 1 + cx + c^2x^2 + c^3x^3 + \cdots & = & \sum_{i=0}^{\infty} c^i x^i, \\
\frac{1}{1-x^n} & = & 1 + x^n + x^{2n} + x^{3n} + \cdots & = & \sum_{i=0}^{\infty} x^{ni}, \\
\frac{x}{(1-x)^2} & = & x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots & = & \sum_{i=0}^{\infty} i x^i, \\
\sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{k! z^k}{(1-z)^{k+1}} & = & x + 2^n x^2 + 3^n x^3 + 4^n x^4 + \cdots & = & \sum_{i=0}^{\infty} i^n x^i, \\
e^x & = & 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots & = & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}, \\
\ln(1+x) & = & x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \cdots & = & \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{x^i}{i}, \\
\ln \frac{1}{1-x} & = & x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots & = & \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i}, \\
\sin x & = & x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots & = & \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}, \\
\cos x & = & 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots & = & \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!}, \\
\tan^{-1} x & = & x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots & = & \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)}, \\
(1+x)^n & = & 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \cdots & = & \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} x^i, \\
\frac{1}{(1-x)^{n+1}} & = & 1 + (n+1)x + \binom{n+2}{2}x^2 + \cdots & = & \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+n}{i} x^i, \\
\frac{x}{e^x - 1} & = & 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + \cdots & = & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B_i x^i}{i!}, \\
\frac{1}{2x}(1 - \sqrt{1-4x}) & = & 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + \cdots & = & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1} \binom{2i}{i} x^i, \\
\frac{1}{\sqrt{1-4x}} & = & 1 + 2x + 6x^2 + 20x^3 + \cdots & = & \sum_{i=0}^{\infty} \binom{2i}{i} x^i, \\
\frac{1}{\sqrt{1-4x}} \left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \right)^n & = & 1 + (2+n)x + \binom{4+n}{2}x^2 + \cdots & = & \sum_{i=0}^{\infty} \binom{2i+n}{i} x^i, \\
\frac{1}{1-x} \ln \frac{1}{1-x} & = & x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 + \frac{25}{12}x^4 + \cdots & = & \sum_{i=1}^{\infty} H_i x^i, \\
\frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{1-x} \right)^2 & = & \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x^3 + \frac{11}{24}x^4 + \cdots & = & \sum_{i=2}^{\infty} \frac{H_{i-1} x^i}{i}, \\
\frac{x}{1-x-x^2} & = & x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \cdots & = & \sum_{i=0}^{\infty} F_i x^i, \\
\frac{F_n x}{1 - (F_{n-1} + F_{n+1})x - (-1)^n x^2} & = & F_n x + F_{2n} x^2 + F_{3n} x^3 + \cdots & = & \sum_{i=0}^{\infty} F_{ni} x^i.
\end{array}$$

Συνήθεις δυναμοσειρές:

$$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i.$$

Εκθετικές δυναμοσειρές:

$$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{x^i}{i!}.$$

Δυναμοσειρές Dirichlet:

$$A(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{i^x}.$$

Διωνυμικό θεώρημα:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Διαφορές ίδιων δυνάμεων:

$$x^n - y^n = (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k.$$

Για συνήθεις δυναμοσειρές:

$$\begin{array}{lcl}
\alpha A(x) + \beta B(x) & = & \sum_{i=0}^{\infty} (\alpha a_i + \beta b_i) x^i, \\
x^k A(x) & = & \sum_{i=k}^{\infty} a_{i-k} x^i, \\
\frac{A(x) - \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i}{x^k} & = & \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+k} x^i, \\
A(cx) & = & \sum_{i=0}^{\infty} c^i a_i x^i, \\
A'(x) & = & \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) a_{i+1} x^i, \\
xA'(x) & = & \sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^i, \\
\int A(x)\,dx & = & \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{i-1}}{i} x^i, \\
\frac{A(x) + A(-x)}{2} & = & \sum_{i=0}^{\infty} a_{2i} x^{2i}, \\
\frac{A(x) - A(-x)}{2} & = & \sum_{i=0}^{\infty} a_{2i+1} x^{2i+1}.
\end{array}$$

Άθροιση: Αν $b_i = \sum_{j=0}^{i} a_i$ τότε

$$B(x) = \frac{1}{1-x} A(x).$$

Συνέλιξη:

$$A(x)B(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} \right) x^i.$$

Ο θεός έφτιαξε τους φυσικούς αριθμούς· όλα τα άλλα είναι έργα του ανθρώπου.
– Leopold Kronecker

Διανυσματική Ανάλυση

Στροβιλισμός: $\mathrm{curl}F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$, απόκλιση: $\mathrm{div}F = \langle \nabla, F \rangle = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$, όπου $F = (F_1, F_2, F_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Stokes: $\oiint_S \nabla \times F = \oint_{\partial S} F$, όπου S κατά τμήματα C^2 φραγμένη προσανατολισμένη επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ με θετικά προσανατολισμένο σύνορο ∂S το οποίο είναι απλή κλειστή κατά τμήματα C^1 καμπύλη, και $F : S \to \mathbb{R}^3$ μια C^1 συνάρτηση.

Green: $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_{\partial D} F$, όπου D με τις ίδιες ιδιότητες όπως η S του Stokes, αλλά επιπλέον $D \subseteq \mathbb{R}^2$, και $F = (P, Q) : S \to \mathbb{R}^2$.

Gauss: $\iiint_\Omega \langle \nabla, F \rangle = \oiint_{\partial\Omega} F$, όπου $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, κλειστό φραγμένο με κατά τμήματα C^2 θετικά προσανατολισμένο σύνορο $\partial\Omega$ και F είναι C^1 στο Ω.

Μαθηματικό τυπολόγιο

Σειρές

Αναπτύγματα:

$$\frac{1}{(1-x)^{n+1}}\ln\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty}(H_{n+i}-H_n)\binom{n+i}{i}x^i, \qquad \left(\frac{1}{x}\right)^{\overline{-n}} = \sum_{i=0}^{\infty}\left[{i \atop n}\right]x^i,$$

$$x^{\overline{n}} = \sum_{i=0}^{\infty}\left[{n \atop i}\right]x^i, \qquad (e^x-1)^n = \sum_{i=0}^{\infty}\left[{i \atop n}\right]\frac{n!x^i}{i!},$$

$$\left(\ln\frac{1}{1-x}\right)^n = \sum_{i=0}^{\infty}\left[{i \atop n}\right]\frac{n!x^i}{i!}, \qquad x\cot x = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-4)^i B_{2i}x^{2i}}{(2i)!},$$

$$\tan x = \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}\frac{2^{2i}(2^{2i}-1)B_{2i}x^{2i-1}}{(2i)!}, \qquad \zeta(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^x},$$

$$\frac{1}{\zeta(x)} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\mu(i)}{i^x}, \qquad \frac{\zeta(x-1)}{\zeta(x)} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\phi(i)}{i^x},$$

$$\zeta(x) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-x}},$$

$$\zeta^2(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{d(i)}{x^i} \quad \text{όπου } d(n) = \sum_{d|n}1,$$

$$\zeta(x)\zeta(x-1) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{S(i)}{x^i} \quad \text{όπου } S(n) = \sum_{d|n}d,$$

$$\zeta(2n) = \frac{2^{2n-1}|B_{2n}|}{(2n)!}\pi^{2n}, \quad n\in\mathbb{N},$$

$$\frac{x}{\sin x} = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^{i-1}\frac{(4^i-2)B_{2i}x^{2i}}{(2i)!},$$

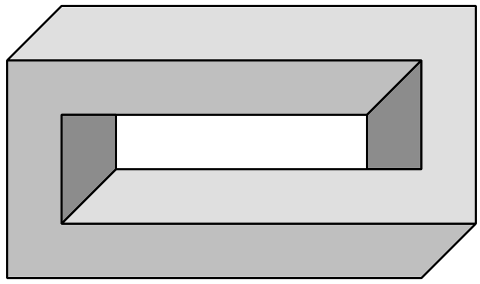
$$\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\right)^n = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{n(2i+n-1)!}{i!(n+i)!}x^i,$$

$$e^x\sin x = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{2^{i/2}\sin\frac{i\pi}{4}}{i!}x^i,$$

$$\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x}}}{x} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(4i)!}{16^i\sqrt{2}(2i)!(2i+1)!}x^i,$$

$$\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2 = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{4^i i!^2}{(i+1)(2i+1)!}x^{2i}.$$

Το αδύνατο τούβλο του Escher



Ολοκλήρωση Stieltjes

Αν η G είναι συνεχής στο διάστημα $[a,b]$ και F είναι φθίνουσα, τότε το

$$\int_a^b G(x)\,dF(x)$$

υπάρχει. Αν $a \le b \le c$ τότε

$$\int_a^c G(x)\,dF(x) = \int_a^b G(x)\,dF(x) + \int_b^c G(x)\,dF(x).$$

Αν τα εμπλεκόμενα ολοκληρώματα υπάρχουν

$$\int_a^b \big(G(x)+H(x)\big)dF(x) = \int_a^b G(x)\,dF(x) + \int_a^b H(x)\,dF(x),$$

$$\int_a^b G(x)\,d\big(F(x)+H(x)\big) = \int_a^b G(x)\,dF(x) + \int_a^b G(x)\,dH(x),$$

$$\int_a^b c\cdot G(x)\,dF(x) = \int_a^b G(x)\,d\big(c\cdot F(x)\big) = c\int_a^b G(x)\,dF(x),$$

$$\int_a^b G(x)\,dF(x) = G(b)F(b) - G(a)F(a) - \int_a^b F(x)\,dG(x).$$

Αν τα εμπλεκόμενα ολοκληρώματα υπάρχουν, και η F έχει παράγωγο F' σε κάθε σημείο στο $[a,b]$ τότε

$$\int_a^b G(x)\,dF(x) = \int_a^b G(x)F'(x)\,dx.$$

Κανόνας Cramer

Δίνονται οι εξισώσεων:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array}$$

Έστω ότι $A = (a_{i,j})$ και B ο πίνακας στήλη (b_i). Τότε υπάρχει μοναδική λύση ανν $\det A \neq 0$. Έστω ότι A_i είναι ο A με την i στήλη αντικατεστημένη από τον B. Τότε

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}.$$

Οι βελτιώσεις ισιώνουν δρόμους, αλλά οι στραβοί δρόμοι χωρίς βελτίωση είναι δρόμοι των ευφυών.
– William Blake (The Marriage of Heaven and Hell)

00	47	18	76	29	93	85	34	61	52
86	11	57	28	70	39	94	45	02	63
95	80	22	67	38	71	49	56	13	04
59	96	81	33	07	48	72	60	24	15
73	69	90	82	44	17	58	01	35	26
68	74	09	91	83	55	27	12	46	30
37	08	75	19	92	84	66	23	50	41
14	25	36	40	51	62	03	77	88	99
21	32	43	54	65	06	10	89	97	78
42	53	64	05	16	20	31	98	79	87

Το αριθμητικό σύστημα Fibonacci: Κάθε φυσικός n έχει μοναδική αναπαράσταση

$$n = F_{k_1} + F_{k_2} + \cdots + F_{k_m},$$

όπου $k_i \ge k_{i+1} + 2$ για όλα τα i, $1 \le i < m$ και $k_m \ge 2$.

Αριθμοί Fibonacci

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$

Ορισμοί:

$$F_i = F_{i-1} + F_{i-2}, \quad F_0 = F_1 = 1,$$

$$F_{-i} = (-1)^{i-1}F_i,$$

$$F_i = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^i - \hat{\phi}^i\right),$$

Ταυτότητα του Cassini: για $i > 0$:

$$F_{i+1}F_{i-1} - F_i^2 = (-1)^i.$$

Προσθετικός κανόνας:

$$F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1}F_n,$$

$$F_{2n} = F_n F_{n+1} + F_{n-1}F_n.$$

Υπολογισμός με πίνακες:

$$\begin{pmatrix} F_{n-2} & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n.$$