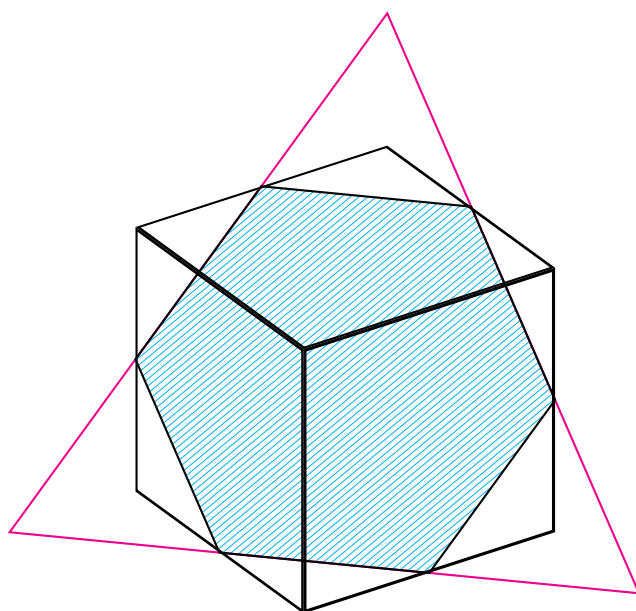


Α. Τσολομύτης
ΚΥΡΤΗ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

(ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ)

2013–2023



Απαγορεύεται η αναπαραγωγή του αρχείου από άλλες ιστοσελίδες
εκτός της <http://myria.math.aegean.gr/~atsol>

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1	ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΑ...	3
1.1	...από την Ανάλυση	3
1.2	...από την Ανάλυση και την Αναλυτική Γεωμετρία	7
1.3	...από τη Γραμμική Άλγεβρα και την Αναλυτική Γεωμετρία	11
	ΜΕΡΟΣ Ι. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ	15
2	ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ	17
2.1	Κυρτές Συναρτήσεις	17
2.2	Η ανισότητα Jensen	20
2.2.1	Η ανισότητα Αριθμητικού-Γεωμετρικού μέσου	23
2.2.2	Η ανισότητα Young	25
2.2.3	Η ανισότητα Hölder για αθροίσματα	25
2.2.4	Η ανισότητα Hölder για ολοκληρώματα	27
2.2.5	Η ανισότητα Minkowski για αθροίσματα	28
2.2.6	Η ανισότητα Minkowski για ολοκληρώματα	29
2.3	Εφαρμογές	30
3	ΚΥΡΤΑ ΣΩΜΑΤΑ	33
3.1	Κυρτά σώματα, κυρτή θήκη	33
3.2	Νόρμες και κυρτά σώματα	45
3.3	Η συνάρτηση στήριξης	47
3.4	Το πολικό σώμα	52
3.5	Διαχωρισμός και γνήσιος διαχωρισμός	58

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

4	Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΟΓΚΟΥ	65
4.1	Όγκος κυρτού σώματος	65
4.1.1	Ιδιότητες Όγκου	69
4.2	Ο όγκος του B_p^n για $1 \leq p \leq \infty$	71
5	ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΚΥΡΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ	77
5.1	Η απόσταση Hausdorff	77
5.2	Όγκος και απόσταση Hausdorff	81
5.3	Το θεώρημα Επιλογής του Blaschke	82
6	ΟΙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ ΠΡΕΚΟΡΑ-LEINDLER ΚΑΙ BRUNN-MINKOWSKI	87
6.1	Η ανισότητα Prekopa-Leindler	87
6.2	Η ανισότητα Brunn-Minkowski	91
6.3	Η ισοπεριμετρική ανισότητα	94
6.4	Η αρχή του Brunn	96
6.5	Το λήμμα του Borel	97
7	Η ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΠΟΙΗΣΗ STEINER	101
7.1	Ορισμός και ιδιότητες της συμμετρισοποίησης Steiner	101
7.2	Το θεώρημα Σφαιρικότητας του Gross	111
7.3	Η ισοπεριμετρική ανισότητα (2η απόδειξη)	116
7.4	Η ανισότητα Blaschke-Santaló	116
ΜΕΡΟΣ ΙΙ. ΚΛΑΣΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΚΥΡΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ		119
8	ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΑ...	121
8.1	...από τη Γραμμική Άλγεβρα και την Αναλυτική Γεωμετρία	121
8.2	...από τη Συναρτησιακή ανάλυση	124
8.3	...από τη θεωρία μέτρου και ολοκλήρωσης	126
9	Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΘΕΣΗΣ ΕΝΟΣ ΚΥΡΤΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ	127
10	Η ΙΣΟΤΡΟΠΙΚΗ ΘΕΣΗ	131
10.1	Φυσική περιγραφή της ισοτροπικής θέσης	131
10.1.1	Ροπή δύναμης και ροπή αδράνειας	131
10.1.2	Πίνακας αδράνειας και ροπή αδράνειας	134
10.1.3	Πολική ροπή αδράνειας	136

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

10.1.4	Διαφορά μεταξύ ισοτροπικού και μη ισοτροπικού σώματος	137
10.1.5	Το ελλειψοειδές αδράνειας και το ελλειψοειδές κινητικής ενέργειας	139
10.2	Μαθηματική προσέγγιση της ισοτροπικής θέσης	143
10.2.1	Ελλειψοειδές Binet και ελλειψοειδές Legendre	147
10.3	Λογαριθμικά κοίλες συναρτήσεις & μέτρα	150
11	Η ΘΕΣΗ ΤΟΥ JOHN	159
11.1	Ύπαρξη του ελλειψοειδούς μεγίστου όγκου	159
11.2	Μοναδικότητα ελλειψοειδούς μεγίστου όγκου	160
11.3	Η θέση του John	163
12	Η ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΙΣΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ	167
12.1	Πολυδιάστατη ανισότητα Brascamp-Lieb και Barthe	167
12.2	Η μονοδιάστατη ανισότητα των Brascamp-Lieb και Barthe	172
12.3	Απόδειξη των ανισοτήτων Brascamp-Lieb και Barthe	175
12.4	Η αντίστροφη ισοπεριμετρική ανισότητα	183
13	Η ΘΕΣΗ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΠΛΑΤΟΥΣ	193
13.1	Ύπαρξη της θέσης	193
13.2	Μοναδικότητα της θέσης	194
14	Η ΘΕΣΗ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ	199
14.1	Ύπαρξη της θέσης	199
14.2	Η συνέχεια του εμβαδού επιφανείας	204
ΜΕΡΟΣ III. ΤΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΤΗΣ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΣΗΣ ΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ		209
15	ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΑ	211
15.1	Το μέτρο Haar	211
15.1.1	Μέτρο και μετρική στην \mathbb{S}^{n-1}	211
15.1.2	Μέτρο και μετρική στην $\mathbb{O}(n)$	214
15.1.3	Μέτρο και μετρική στην $\mathbb{G}_{n,k}$	216
16	ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΣΗΣ	219
16.1	...με τη βοήθεια του χώρου του Gauss	219
16.2	Η σχέση με τις ισοπεριμετρικές ανισότητες	223

16.3	Οι συνέπειες στη διακύμανση συναρτήσεων Lipschitz	224
16.4	Παρατηρήσιμη διάμετρος	226
17	ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΣΗ ΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΣΤΟ ΧΩΡΟ GAUSS	229
17.1	Το φαινόμενο στο χώρο του Gauss	229
18	ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΣΗ ΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΣΤΟ ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΚΥΒΟ	235
18.1	Το φαινόμενο στο διακριτό κύβο	235
19	ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΣΗ ΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΣΤΗΝ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΣΦΑΙΡΑ	237
19.1	Προκαταρκτικά	237
19.2	Το φαινόμενο στην Ευκλείδεια σφαίρα	241
20	ΕΦΑΡΜΟΓΗ: ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ DVORETZKY-MILMAN	247
20.1	Προκαταρκτικά	247
20.2	Η επίδραση του φαινομένου συγκέντρωσης του μέτρου στις νόρμες	249
Α΄	ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ	257
Β΄	Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ Γ	259
β΄.1	Ιδιότητες της συνάρτησης Γ	260
β΄.2	Η μέθοδος Laplace	261
	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	273
	ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΟΡΩΝ	276
	ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΩΝ ΟΡΩΝ	280

ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΑ...

1

1.1 ...ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ

Οι αποδείξεις που δεν παρουσιάζονται σε αυτή την ενότητα μπορούν να βρεθούν σε οποιοδήποτε βιβλίο Πραγματικής Ανάλυσης.

Στον \mathbb{R}^n η (ευκλείδεια) απόσταση μεταξύ των σημείων x και y με συντεταγμένες (x_1, x_2, \dots, x_n) και (y_1, y_2, \dots, y_n) αντίστοιχα, ορίζεται να είναι ο αριθμός

$$d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Επιπλέον, για κάθε σημείο $x \in \mathbb{R}^n$ ονομάζουμε (ευκλείδειο) μήκος του x τον αριθμό $d_2(0, x)$ και τον συμβολίζουμε με $\|x\|_2$. Δηλαδή,

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Παρατηρούμε ότι $d_2(x, y) = \|x - y\|_2$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$. Στα επόμενα θα προτιμάμε να γράφουμε $\|x - y\|_2$ αντί για $d_2(x, y)$.

Το σύνολο των σημείων που απέχουν (γνησίως) λιγότερο από $r > 0$ από δοθέν σημείο $x \in \mathbb{R}^n$ ονομάζεται ανοικτή μπάλα με κέντρο το x και ακτίνα r , και συμβολίζεται με $B(x, r)$. Δηλαδή,

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\|_2 < r\}.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1.1 (Εσωτερικό συνόλου). Έστω ότι το K είναι ένα υποσύνολο του \mathbb{R}^n . Λέμε ότι ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}^n$ είναι *εσωτερικό σημείο* του K , αν υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε η ανοικτή μπάλα $B(x_0, \epsilon)$ να περιέχεται στο K . Το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων του K λέγεται *εσωτερικό* του K και συμβολίζεται με $\text{int}K$.

Ένα σύνολο μπορεί να έχει κενό εσωτερικό. Για παράδειγμα, οποιοδήποτε υποσύνολο ενός (δισδιάστατου) επιπέδου στον \mathbb{R}^3 . Ένα τέτοιο σύνολο όμως μπορεί να έχει μη κενό εσωτερικό αν θεωρηθεί ως υποσύνολο του επιπέδου στο οποίο ανήκει:

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1.2 (Σχετικό εσωτερικό συνόλου). Έστω ότι το K είναι υποσύνολο του \mathbb{R}^n . Το σχετικό εσωτερικό του K συμβολίζεται με $\text{relint}(K)$

και είναι το εσωτερικό του K στον ελάχιστο υπόχωρο του \mathbb{R}^n που περιέχει το K .

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1.3 (Κλειστή θήκη). Λέμε ότι το x είναι σημείο συσσώρευσης του $K \subseteq \mathbb{R}^n$ αν και μόνον αν για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει

$$B(x, \epsilon) \cap K \setminus \{x\} \neq \emptyset.$$

Το σύνολο όλων των σημείων συσσώρευσης του K λέγεται παράγωγο σύνολο του K και συμβολίζεται με K' . Το σύνολο $\bar{K} = K \cup K'$ λέγεται κλειστή θήκη του K .

Παρατηρούμε ότι αν $x \in \bar{K}$ τότε υπάρχει ακολουθία $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ στο K ώστε $\|x_m - x\|_2 \rightarrow 0$. Αυτό συμβαίνει, διότι είτε $x \in K$ οπότε θέτουμε $x_m = x$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$, είτε το x είναι σημείο συσσώρευσης οπότε εφαρμόζουμε τον Ορισμό 1.1.3 για $\epsilon = 1/m$ και επιλέγουμε x_m ένα οποιοδήποτε σημείο του μη κενού $B(x, 1/m) \cap K$. Έτσι $x_m \in K$ και $\|x_m - x\|_2 < 1/m \rightarrow 0$.

Κάθε σύνολο K για το οποίο ισχύει $K = \bar{K}$ λέγεται κλειστό. Το σύνολο \bar{K} είναι κλειστό για κάθε $K \subseteq \mathbb{R}^n$, δηλαδή ισχύει $\overline{\bar{K}} = \bar{K}$.

Ορισμός 1.1.4. Η κλειστή θήκη του συνόλου $B(0, r)$ ονομάζεται *ευκλείδεια μπάλα* του \mathbb{R}^n ακτίνας r και συμβολίζεται με $B_2^n(0, r)$.

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι

$$B_2^n(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq r\}.$$

Πράγματι, αν $x \in B_2^n(0, r)$ τότε υπάρχει ακολουθία $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ στο $B(0, r)$ ώστε $\|x_m - x\|_2 \rightarrow 0$. Αλλά από τον ορισμό της $\|\cdot\|_2$ έχουμε ότι για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$ αν x_{mj} η j συντεταγμένη του x_m και x_j η j συντεταγμένη του x ισχύει

$$|x_{mj} - x_j| \leq \|x_m - x\|_2 \rightarrow 0.$$

Άρα $x_{mj} \rightarrow x_j$ και συνεπώς, από τον ορισμό της $\|\cdot\|_2$ συμπεραίνουμε ότι $\|x_m\|_2 \rightarrow \|x\|_2$. Αλλά $\|x_m\|_2 \leq r$ και έτσι $\|x\|_2 \leq r$. Αντιστρόφως, αν $\|x\|_2 < r$ τότε $x \in B(0, r) \subseteq B_2^n(0, r)$. Αν τέλος, $\|x\|_2 = r$ τότε η ακολουθία $(1 - 1/m)x$, για $m \in \mathbb{N}$, έχει ευκλείδεια νόρμα ίση με $(1 - 1/m)r < r$, οπότε ανήκει στο $B(0, r)$ και συγκλίνει στο x . Δηλαδή το x ανήκει στην κλειστή θήκη του $B(0, r)$, δηλαδή στο $B_2^n(0, r)$.

Επιπλέον το $B_2^n(0, r)$ ως κλειστή θήκη του $B(0, r)$ είναι κλειστό σύνολο, δηλαδή $\overline{B_2^n(0, r)} = B_2^n(0, r)$.

Ορισμός 1.1.5. Το σύνολο $B_2^n(0, 1)$ ονομάζεται μοναδιαία ευκλείδεια μπάλα του \mathbb{R}^n και συμβολίζεται απλά με B_2^n .

Εύκολα βλέπουμε ότι το σύνορο $\text{bd}(B_2^n)$ του συνόλου B_2^n είναι το σύνολο $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$.

Ορισμός 1.1.6. Το σύνολο $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$ ονομάζεται μοναδιαία (ευκλείδεια) σφαίρα του \mathbb{R}^n και συμβολίζεται με S^{n-1} .

Ορισμός 1.1.7. Για δυο υποσύνολα A και B του \mathbb{R}^n και $\lambda \in \mathbb{R}$ θα γράφουμε

- (i) $A + B$ για το σύνολο $\{x + y : x \in A \text{ και } y \in B\}$.
- (ii) λA για το σύνολο $\{\lambda x : x \in A\}$.

Παρατηρούμε ότι με τον παραπάνω συμβολισμό $B_2^n(0, r) = rB_2^n$ και γράφοντας $B_2^n(x, r)$ για την ευκλείδεια μπάλα κέντρου x και ακτίνας r ισχύει $B_2^n(x, r) = x + rB_2^n$.

Ορισμός 1.1.8 (Φραγμένο σύνολο). Ένα υποσύνολο K του \mathbb{R}^n λέγεται φραγμένο αν υπάρχει αριθμός $M > 0$ ώστε για κάθε $x \in K$ να ισχύει $\|x\|_2 \leq M$. Φανερά αυτό είναι ισοδύναμο με τον εγκλεισμό $K \subseteq MB_2^n$.

Πρόταση 1.1.9. Έστω ότι το K είναι φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R}^n . Τότε και το \bar{K} είναι φραγμένο.

Απόδειξη: Αν το K είναι φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R}^n τότε υπάρχει αριθμός M ώστε να ισχύει $K \subseteq MB_2^n$. Οπότε $\bar{K} \subseteq \overline{MB_2^n} = MB_2^n$. \square

Πρόταση 1.1.10 (Συμπαγές υποσύνολο του \mathbb{R}^n). Ένα υποσύνολο K του \mathbb{R}^n είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο. \square

Πρόταση 1.1.11. Έστω ότι $K, F \subseteq \mathbb{R}^n$. Αν το K είναι συμπαγές, το F κλειστό και $K \cap F = \emptyset$ τότε υπάρχει $x \in K$ και $y \in F$ ώστε

$$d(K, F) := \inf\{\|z - w\|_2 : z \in K, w \in F\} = \|x - y\|_2 > 0.$$

Απόδειξη: Θέτουμε

$$\rho := \inf\{\|x - y\|_2 : x \in K, y \in F\}.$$

Έστω ότι $x_m \in K, y_m \in F$ ώστε $\|x_m - y_m\|_2 \rightarrow \rho$. Αφού $x_m \in K$ και το K είναι συμπαγές, η x_m έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, έστω την x_{m_k}

με όριο το σημείο x . Το x ανήκει στο K γιατί το K είναι κλειστό. Έχουμε ότι $\|x_{m_k} - y_{m_k}\|_2 \rightarrow \rho$ και $x_{m_k} \rightarrow x$. Από την τριγωνική ανισότητα,

$$\|y_{m_k}\|_2 \leq \|y_{m_k} - x_{m_k}\|_2 + \|x_{m_k}\|_2.$$

Το δεξιό μέρος της παραπάνω ανισότητας είναι φραγμένη ακολουθία (γιατί είναι συγκλίνουσα) άρα και το αριστερό. Θεωρούμε ένα $M > 0$ ώστε $\|y_{m_k}\| \leq M$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, οπότε $y_{m_k} \in B_2^n(0, M)$. Το $B_2^n(0, M)$ είναι κλειστό και φραγμένο σύνολο στον \mathbb{R}^n , άρα είναι συμπαγές. Άρα, η y_{m_k} έχει υπακολουθία $y_{m_{k_l}}$, η οποία συγκλίνει, έστω στο y . Αλλά $y \in F$, αφού το F είναι κλειστό. Η $x_{m_{k_l}}$ είναι υπακολουθία της x_{m_k} οπότε $x_{m_{k_l}} \rightarrow x$. Άρα $\|x_{m_{k_l}} - y_{m_{k_l}}\| \rightarrow \rho$, $x_{m_{k_l}} \rightarrow x \in K$, και $y_{m_{k_l}} \rightarrow y \in F$. Έτσι

$$\rho = \lim_{l \rightarrow \infty} \|x_{m_{k_l}} - y_{m_{k_l}}\| = \|x - y\|_2.$$

Όμως, τα K και F είναι ξένα, άρα το x είναι διάφορο του y . Οπότε, το ρ είναι θετικό. \square

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1.12 (Συνέχεια). Μια συνάρτηση $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ μεταξύ δύο μετρικών χώρων λέγεται συνεχής στο σημείο $x_0 \in X$ αν και μόνον αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε x στο X με $d_X(x, x_0) < \delta$ να ισχύει $d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1.13 (Απόλυτη συνέχεια). Η $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται απόλυτα συνεχής στο υποδιάστημα J του διαστήματος $I \subseteq \mathbb{R}$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, ώστε αν τα $[a_i, b_i]$ για $i = 1, 2, \dots, n$ είναι πεπερασμένη οικογένεια ξένων διαστημάτων στο J και $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$ τότε

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1.14 (Συνάρτηση Lipschitz). Η $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται Lipschitz στο υποδιάστημα J του διαστήματος $I \subseteq \mathbb{R}$, αν υπάρχει $L > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|,$$

για κάθε x, y στο J . Ο αριθμός L ονομάζεται σταθερά Lipschitz της f στο διάστημα J .

Παρατηρούμε ότι το να είναι μια συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz στο υποδιάστημα $J \subseteq I$ σημαίνει ότι οι κλίσεις των χορδών στο γράφημα της f που σχηματίζονται σε σημεία του J είναι φραγμένες.

Πρόταση 1.1.15. Έστω ότι οι (X, d_X) και (Y, d_Y) είναι δυο μετρικοί χώροι και $f : X \rightarrow Y$ μια συνεχής και επί συνάρτηση. Αν ο X είναι συμπαγής τότε και ο Y είναι συμπαγής. Δηλαδή, η συνεχής εικόνα ενός συμπαγούς μετρικού χώρου είναι συμπαγής χώρος. \square

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1.1.1 Αποδείξτε ότι $\text{bd}(B_2^n) = S^{n-1}$.

Άσκηση 1.1.2 Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{αν } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{αν } x = 0, \end{cases}$$

είναι συνεχής αλλά όχι απόλυτα συνεχής. (Υπόδειξη: Θεωρήστε τα διαστήματα $[(\pi/2)^{-1}(4(m+j)+1)^{-1}, (\pi/2)^{-1}(4(m+j))^{-1}]$ για $j = 0, 1, \dots, k$ και αποδείξτε ότι είναι ξένα και έχουν συνολικό μήκος μικρότερο από $(2\pi m)^{-1}$.)

1.2 ...ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΤΗΝ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2.1 (Εσωτερικό γινόμενο). Ένα εσωτερικό γινόμενο στον \mathbb{R}^n είναι μια απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

για την οποία ισχύουν

- (i) $\langle x, x \rangle \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.
- (ii) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- (iii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.
- (iv) $\langle x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \rangle = \lambda_1 \langle x, y_1 \rangle + \lambda_2 \langle x, y_2 \rangle$, για κάθε $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Το πιο συνηθισμένο παράδειγμα είναι το εσωτερικό γινόμενο

$$(1.1) \quad \langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j,$$

όπου τα x_j και y_j είναι οι συντεταγμένες των διανυσμάτων x και y . Στο εξής (εκτός αν ρητά αναφέρεται αλλιώς) κάθε αναφορά σε εσωτερικό γινόμενο θα είναι σε αυτό που ορίζεται στην (1.1). Εύκολα βλέπουμε

ότι το $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι πράγματι εσωτερικό γινόμενο (δηλαδή ικανοποιεί τον παραπάνω ορισμό). Παρατηρούμε ότι $\langle x, x \rangle = \|x\|_2^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Επιπλέον ισχύει η εξής:

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.2.2 (Ανισότητα Cauchy-Schwartz). *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ ισχύει*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \|y\|_2.$$

Απόδειξη: Από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$0 \leq \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle = \|x\|_2^2 + \lambda^2 \|y\|_2^2 - 2\lambda \langle x, y \rangle,$$

άρα το διώνυμο ως προς λ στα δεξιά έχει μη θετική διακρίνουσα. Δηλαδή

$$4\langle x, y \rangle^2 - 4\|x\|_2^2 \|y\|_2^2 \leq 0,$$

οπότε προκύπτει η ζητούμενη. □

Νόρμα είναι μια συνάρτηση από τον \mathbb{R}^n στον \mathbb{R} , η οποία σε κάθε διάνυσμα αντιστοιχεί ένα «μήκος» και ικανοποιεί τις ιδιότητες του παρακάτω ορισμού.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2.3 (Νόρμα). Μια απεικόνιση $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται νόρμα αν:

- (i) είναι μη αρνητική και κάνει μηδέν μόνο στο 0. Δηλαδή $\|x\| \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, $\|0\| = 0$ και αν $\|x\| = 0$ τότε $x = 0$.
- (ii) Είναι θετικά ομογενής: $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (iii) Ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Παράδειγμα νόρμας είναι η ποσότητα $\|x\|_2$ που ορίστηκε στην αρχή του κεφαλαίου και η οποία ονομάζεται ευκλείδεια νόρμα. Για την $\|\cdot\|_2$ οι ιδιότητες (i) και (ii) της νόρμας είναι εύκολο να επιβεβαιωθούν. Η (iii) αποδεικνύεται στο Θεώρημα 2.2.8 παρακάτω.

Η τριγωνική ανισότητα για τις νόρμες έχει την ακόλουθη συνέπεια, η οποία συχνά καλείται «κάτω τριγωνική ανισότητα»:

ΠΟΡΙΣΜΑ 1.2.4 (κάτω τριγωνική ανισότητα). *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ ισχύει*

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x \pm y\|.$$

Απόδειξη: Χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

οπότε $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$. Ομοίως,

$$\|y\| = \|(y - x) + x\| \leq \|y - x\| + \|x\|$$

και αφού $\|x - y\| = \|y - x\|$ παίρνουμε $\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$. Έτσι

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x + y\|$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.2.5 (Συνέχεια ευκλείδειας νόρμας). *Η ευκλείδεια νόρμα είναι συνεχής συνάρτηση (ως προς την ευκλείδεια απόσταση) στον \mathbb{R}^n .*

Απόδειξη: Αν $x_m \rightarrow x$ ως προς την ευκλείδεια απόσταση, θέλουμε να δείξουμε ότι $\|x_m\|_2 \rightarrow \|x\|_2$. Αυτό προκύπτει αμέσως από την κάτω τριγωνική ανισότητα (Πόρισμα 1.2.4), διότι

$$|\|x_m\|_2 - \|x\|_2| \leq \|x_m - x\|_2 \rightarrow 0. \quad \square$$

Εύκολα βλέπουμε ότι κάθε νόρμα $\|\cdot\|$ στον \mathbb{R}^n ορίζει μια μετρική στον \mathbb{R}^n με τη σχέση $d_{\|\cdot\|}(x, y) = \|x - y\|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$. Έτσι ο χώρος με νόρμα $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ είναι και ένας μετρικός χώρος με την προηγούμενη μετρική. Διάφορες ιδιότητες από τη θεωρία των μετρικών χώρων μπορούν να διατυπωθούν με τη βοήθεια της νόρμας. Επίσης, φράσεις όπως «...ως προς την μετρική» και «...ως προς τη νόρμα» εδώ ταυτίζονται. Για παράδειγμα η φράση «η συνάρτηση f είναι συνεχής ως προς την μετρική $d_{\|\cdot\|}$ » ταυτίζεται με τη φράση «η συνάρτηση f είναι συνεχής ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$ ».

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.2.6 (Συνέχεια Εσωτερικού γινομένου). *Το εσωτερικό γινόμενο είναι συνεχής συνάρτηση ως προς και τα δύο ορίσματά του ταυτόχρονα ως προς την ευκλείδεια νόρμα.*

Απόδειξη: Αν $x_m \rightarrow x$ και $y_m \rightarrow y$ ως προς την ευκλείδεια νόρμα, δηλαδή αν $\|x_m - x\|_2 \rightarrow 0$ και $\|y_m - y\|_2 \rightarrow 0$, πρέπει να δείξουμε ότι $\langle x_m, y_m \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$. Ισοδύναμα πρέπει να δείξουμε ότι $|\langle x_m, y_m \rangle - \langle x, y \rangle| \rightarrow 0$. Από

την ανισότητα Cauchy-Schwartz (Πρόταση 1.2.2) έχουμε

$$\begin{aligned} |\langle x_m, y_m \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_m, y_m \rangle - \langle x_m, y \rangle + \langle x_m, y \rangle - \langle x, y \rangle| \\ &= |\langle x_m, y_m - y \rangle + \langle x_m - x, y \rangle| \\ &\leq \|x_m\|_2 \|y_m - y\|_2 + \|x_m - x\|_2 \|y\|_2 \rightarrow 0, \end{aligned}$$

αφού $\|x_m - x\|_2 \rightarrow 0$, $\|y_m - y\|_2 \rightarrow 0$ και η $\|x_m\|_2$ είναι φραγμένη ως συγκλίνουσα από την Πρόταση 1.2.5. \square

Η παρακάτω πρόταση λέει ότι όλες οι νόρμες στον \mathbb{R}^n (και άρα και οι μετρικές που προκύπτουν από αυτές) είναι ισοδύναμες.

Πρόταση 1.2.7. Για κάθε νόρμα $\|\cdot\|$ στον \mathbb{R}^n υπάρχουν σταθερές $c, C > 0$ ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$,

$$c\|x\|_2 \leq \|x\| \leq C\|x\|_2.$$

Απόδειξη: Έστω ότι τα e_1, e_2, \dots, e_n είναι η συνήθης βάση του \mathbb{R}^n . Αν $x \in \mathbb{R}^n$ και x_1, x_2, \dots, x_n οι συντεταγμένες του x ως προς τη βάση, θα έχουμε

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i e_i\| = \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\| = \left\langle (|x_j|)_{j=1}^n, (\|e_j\|)_{j=1}^n \right\rangle \\ (1.2) \quad &\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

όπου στην (1.2) χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Cauchy-Schwartz για τα διανύσματα $(|x_j|)_{j=1}^n$ και $(\|e_j\|)_{j=1}^n$. Θέτουμε $C = \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2 \right)^{1/2}$, οπότε η (1.2) λέει ότι $\|x\| \leq C\|x\|_2$.

Για την αριστερή ανισότητα παρατηρούμε πρώτα ότι η $f(x) = \|x\|$ είναι συνεχής. Πράγματι, αν $x_m \rightarrow x$ ως προς την ευκλείδεια απόσταση, θα δείξουμε ότι $f(x_m) \rightarrow f(x)$. Έχουμε

$$|f(x_m) - f(x)| = \left| \|x_m\| - \|x\| \right| \leq \|x_m - x\| \leq C\|x_m - x\|_2 \rightarrow 0.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι το $\mathbb{S}^{n-1} = \{x : \|x\|_2 = 1\}$ είναι κλειστό και φραγμένο σύνολο στον \mathbb{R}^n , άρα είναι συμπαγές. Οπότε η f , ως συνεχής συνάρτηση σε συμπαγές σύνολο, έχει ελάχιστη τιμή στο \mathbb{S}^{n-1} . Θέτουμε $c = \min_{x \in \mathbb{S}^{n-1}} f(x)$. Το c είναι διαφορετικό του μηδενός διότι, αφού είναι ελάχιστη τιμή της f υπάρχει $x_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ ώστε $f(x_0) = c$, δηλαδή

$\|x_0\| = c$. Αν λοιπόν $c = 0$, τότε $\|x_0\| = 0$ και άρα $x_0 = 0 \in \mathbb{S}^{n-1}$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα $c > 0$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ισχύει $x/\|x\|_2 \in \mathbb{S}^{n-1}$ οπότε $f(x/\|x\|_2) \geq c$ δηλαδή $\|x/\|x\|_2\| \geq c$ από όπου προκύπτει άμεσα $\|x\| \geq c\|x\|_2$. Αν $x = 0$ αυτή η ανισότητα ισχύει ούτως ή άλλως. \square

Παρατήρηση 1.2.8. Στην απόδειξη της τελευταίας πρότασης αποδείξαμε ότι κάθε νόρμα στον \mathbb{R}^n είναι συνεχής συνάρτηση ως προς την ευκλείδεια απόσταση.

Για κάθε διανυσματικό υπόχωρο H του \mathbb{R}^n ορίζουμε μια γραμμική απεικόνιση $\text{Proj}_H : \mathbb{R}^n \rightarrow H$ που την ονομάζουμε ορθογώνια προβολή ή απλά προβολή στον H ως εξής. Θεωρούμε μια ορθοκανονική βάση e_1, \dots, e_k του H (όπου $k \in \mathbb{N}$ με $k \leq n$) την οποία επεκτείνουμε σε μια ορθοκανονική βάση $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ του \mathbb{R}^n . Έτσι κάθε στοιχείο x του \mathbb{R}^n γράφεται ως $\sum_{j=1}^n x_j e_j$ όπου τα x_j είναι οι συντεταγμένες του x ως προς τη βάση e_1, \dots, e_n , δηλαδή $x_j = \langle x, e_j \rangle$ για κάθε $j = 1, \dots, n$. Θέτουμε

$$\text{Proj}_H(x) = \sum_{j=1}^k x_j e_j \in H.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι η Proj_H είναι γραμμική απεικόνιση, και επειδή

$$\|\text{Proj}_H(x)\|_2 = \left(\sum_{j=1}^k |x_j|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{1/2} = \|x\|_2,$$

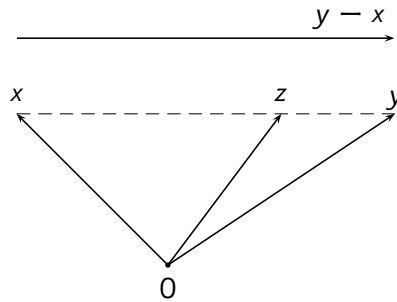
συμπεραίνουμε ότι η Proj_H είναι συνεχής απεικόνιση.

1.3 ...ΑΠΟ ΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΤΗΝ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Αν τα x και y είναι διανύσματα, στοιχεία του \mathbb{R}^n , το ευθύγραμμο τμήμα στον \mathbb{R}^n με άκρα τα x και y είναι το σύνολο

$$[x, y] = \{(1 - \lambda)x + \lambda y : \lambda \in [0, 1]\}.$$

Η απόδειξη περιγράφεται στο Σχήμα 1.1. Ένα διάνυσμα z είναι στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα x, y αν και μόνο αν το z ισούται με το x συν ένα υποπολλαπλάσιο του $y - x$. Δηλαδή, αν και μόνο αν υπάρχει $\lambda \in [0, 1]$ ώστε $z = x + \lambda(y - x)$. Ισοδύναμα $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$.



ΣΧΗΜΑ 1.1: Ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα x και y στον \mathbb{R}^n



ΣΧΗΜΑ 1.2: Ο κύβος είναι κυρτό αλλά όχι γνήσια κυρτό σύνολο. Η ευκλείδεια μπάλα είναι γνήσια κυρτή.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3.1 (Κυρτό Σύνολο). Ένα σύνολο K υποσύνολο του \mathbb{R}^n λέγεται κυρτό αν για κάθε x, y τα οποία ανήκουν στο K το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα x και y περιέχεται στο K . Δηλαδή, για κάθε $x, y \in K$ ισχύει

$$[x, y] = \{(1 - \lambda)x + \lambda y : \lambda \in [0, 1]\} \subseteq K$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3.2 (Γνήσια κυρτό σύνολο). Ένα σύνολο K υποσύνολο του \mathbb{R}^n λέγεται γνήσια κυρτό αν για κάθε x, y τα οποία ανήκουν στο K και για κάθε λ στο διάστημα $(0, 1)$ το σημείο $(1 - \lambda)x + \lambda y$ ανήκει στο $\text{int}(K)$.

Ένα υπερεπίπεδο $H_{x_0, u}$ που περνάει από το σημείο $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και είναι κάθετο στο μοναδιαίο διάνυσμα u είναι το σύνολο

$$\begin{aligned} H_{x_0, u} &= \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x - x_0, u \rangle = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle = \langle x_0, u \rangle\} \end{aligned}$$

και οι αντίστοιχοι ημίχωροι είναι οι

$$H_{x_0, u}^- = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle \leq \langle x_0, u \rangle\} \text{ και } H_{x_0, u}^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle \geq \langle x_0, u \rangle\}.$$

Παρατηρούμε ότι το u ανήκει στο $H_{x_0, u}^+ - x_0$.

Επειδή το $\langle x_0, u \rangle$ μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο \mathbb{R} (ανάλογα με την επιλογή του x_0) ένα υπερεπίπεδο είναι ένα σύνολο της μορφής

$$H_{u, \lambda} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle = \lambda\}$$

για $\lambda \in \mathbb{R}$. Οι ημίχωροι που σχηματίζει τώρα το $H_{u, \lambda}$ είναι τα σύνολα

$$H_{u, \lambda}^- = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle \leq \lambda\} \text{ και } H_{u, \lambda}^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle \geq \lambda\}.$$

Συχνά, αν $\lambda \neq 0$, διαιρούμε το u με το λ , δηλαδή επιτρέπουμε το u να μην είναι μοναδιαίο διάνυσμα, ώστε το υπερεπίπεδο να περιγράφεται από το σύνολο

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle = 1\},$$

όπου το u είναι ένα μη μηδενικό διάνυσμα του \mathbb{R}^n .

Θα ονομάζουμε *λωρίδα* στον \mathbb{R}^n τον χώρο ανάμεσα σε δύο παράλληλα υπερεπίπεδα. Δηλαδή μια λωρίδα είναι ένα σύνολο της μορφής

$$\Lambda_{u, a, b} = \{x \in \mathbb{R}^n : a \leq \langle x, u \rangle \leq b\} = H_{u, a}^+ \cap H_{u, b}^-,$$

όπου $a, b \in \mathbb{R}$ με $a \leq b$ και το u είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα.

Οι ημίχωροι $H_{u, a}^-$ και $H_{u, b}^+$ λέγονται και ημίχωροι της λωρίδας $\Lambda_{u, a, b}$ και συμβολίζονται και με $\Lambda_{u, a, b}^-$ και $\Lambda_{u, a, b}^+$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3.3 (Σημεία σε γενική θέση ή affine-ανεξάρτητα). Τα x_1, \dots, x_m λέγεται ότι βρίσκονται σε γενική θέση ή ότι είναι *affine-ανεξάρτητα* όταν τα $x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_m - x_1$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Παρατήρηση 1.3.4. Αν τα x_1, \dots, x_m είναι σε γενική θέση στον \mathbb{R}^n τότε $m \leq n+1$, διότι $n+2$ σημεία σχηματίζουν $n+1$ διανύσματα ως διαφορές των x_2, \dots, x_{n+2} με το x_1 και αυτά είναι αναγκαστικά γραμμικώς εξαρτημένα, αφού $\dim \mathbb{R}^n = n$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3.5 (Ανάστροφος ενός πίνακα). Έστω T ένας $m \times n$ πίνακας. Ονομάζουμε ανάστροφο του πίνακα T τον πίνακα $n \times m$ που έχει για γραμμές τις στήλες του T και για στήλες τις γραμμές του T . Συμβολίζεται με T^t .

Υπενθυμίζουμε ότι για δύο πίνακες T και S ισχύει $(TS)^t = S^t T^t$ (εφόσον βέβαια το γινόμενο TS έχει νόημα).

Όταν κάνουμε πράξεις με πίνακες και διανύσματα, τα διανύσματα θα τα θεωρούμε ως πίνακες $n \times 1$. Έτσι μπορεί στο κείμενο να γράφουμε για εξοικονόμηση χώρου «το διάνυσμα $x = (x_1, \dots, x_n)$ » αλλά αν είναι να γίνουν πράξεις θα πρέπει να έχουμε στο νου μας ότι τα διανύσματα τα μεταχειριζόμαστε ως στήλες. Έτσι αν $x = (x_1, \dots, x_n)$ και $y = (y_1, \dots, y_n)$ το εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y \rangle$ είναι ίσο με

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x^t y$$

όπου τα παραπάνω γινόμενα είναι γινόμενα πινάκων. Ομοίως, αν ο T είναι $n \times n$ πίνακας τότε

$$\langle T(x), y \rangle = (Tx)^t y = (x^t T^t) y = x^t (T^t y) = \langle x, T^t(y) \rangle.$$

Ο παρακάτω ορισμός είναι γνωστός από την Αναλυτική Γεωμετρία.

Ορισμός 1.3.6. Ένα κυρτό υποσύνολο \mathcal{E} του \mathbb{R}^n λέγεται ελλειψοειδές με κέντρο την αρχή των αξόνων αν υπάρχει ορθοκανονική βάση e_1, \dots, e_n του \mathbb{R}^n και θετικοί αριθμοί a_1, \dots, a_n ώστε

$$\mathcal{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n \frac{\langle x, e_j \rangle^2}{a_j^2} \leq 1 \right\}.$$

Οι θετικοί αριθμοί a_1, \dots, a_n είναι τα μήκη των ημιαξόνων του ελλειψοειδούς.

Μέρος Ι

Εισαγωγή στην κυρτότητα

2.1 ΚΥΡΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1.1 (Κυρτή Συνάρτηση). Μια συνάρτηση $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται *κυρτή* στο K αν το K είναι κυρτό σύνολο και ισχύει

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y),$$

για κάθε λ στο $[0, 1]$ και για κάθε x, y στο K .

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1.2 (Γνήσια κυρτή συνάρτηση). Μια συνάρτηση $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται *γνήσια κυρτή* στο K αν το K είναι κυρτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n και ισχύει

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) < (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

για κάθε λ στο $(0, 1)$ και για κάθε x, y στο K με $x \neq y$.

Παρατήρηση 2.1.3. Μια απλή συνέπεια του παραπάνω ορισμού είναι ότι αν μια συνάρτηση f είναι γνήσια κυρτή και για κάποια x και y ισχύει

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) = (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y),$$

για κάποιο $\lambda \in (0, 1)$, τότε αναγκαστικά θα ισχύει $x = y$.

Παράδειγμα 2.1.4. Η συνάρτηση $e^x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι κυρτή. Για να το αποδείξουμε αυτό, δείχνουμε πρώτα ότι για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό a και για κάθε $\lambda \in [0, 1]$ ισχύει $a^\lambda \leq (1 - \lambda) + \lambda a$. Πράγματι, αν $\lambda = 0$ ή $\lambda = 1$ η ανισότητα προφανώς ισχύει. Αν $\lambda \notin \{0, 1\}$ τότε θεωρούμε τη συνάρτηση $f(a) = (1 - \lambda) + \lambda a - a^\lambda$ και αρκεί να δείξουμε ότι αυτή είναι μη αρνητική για κάθε $a > 0$. Χρησιμοποιώντας παράγωγο βλέπουμε ότι αυτή έχει ελάχιστη τιμή στο $a = 1$. Δηλαδή $f(a) \geq f(1) = 0$

Στην ανισότητα αυτή, θέτουμε $a = e^{y-x}$ οπότε $(e^{y-x})^\lambda \leq (1 - \lambda) + \lambda e^{y-x}$ από όπου με απλές πράξεις προκύπτει ότι

$$e^{(1-\lambda)x+\lambda y} \leq (1 - \lambda)e^x + \lambda e^y,$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και για κάθε $\lambda \in [0, 1]$.

Παρατηρούμε επιπλέον ότι η e^x είναι γνήσια κυρτή, αφού εύκολα ελέγχουμε ότι η παράγωγος της f είναι θετική αν $a > 1$, οπότε η f

είναι γνησίως αύξουσα. Έτσι $f(\alpha) > f(1) = 0$ και συνεχίζουμε όπως παραπάνω υποθέτοντας (χωρίς βλάβη της γενικότητας, αφού τα x, y ήταν τυχαία) ότι $y > x$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 2.1.1 Αν οι συναρτήσεις f, g είναι και οι δύο κυρτές με κοινό πεδίο ορισμού αποδείξτε ότι και η $f + g$ είναι κυρτή.

Άσκηση 2.1.2 Αν η \mathcal{F} είναι μια οικογένεια κυρτών συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού, δείξτε ότι η συνάρτηση $\sup_{f \in \mathcal{F}} f(x)$ είναι κυρτή.

Άσκηση 2.1.3 Αποδείξτε ότι αν η f είναι κυρτή και η g κυρτή και αύξουσα, τότε η σύνθεση $g \circ f$ (όποτε ορίζεται) είναι κυρτή. Είναι σωστό το συμπέρασμα όταν η g δεν είναι αύξουσα;

Άσκηση 2.1.4 Αν η $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ είναι κυρτή συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$, τότε για κάθε x, y, z που ανήκουν στο I με $x < y < z$, ισχύει

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Άσκηση 2.1.5 Έστω ότι το I είναι ένα διάστημα στο \mathbb{R} και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Τότε, σε κάθε συμπαγές υποδιάστημα J του διαστήματος $\text{int}(I)$ η f είναι Lipschitz, οπότε είναι και απόλυτα συνεχής στο J . Επιπλέον, είναι συνεχής στο $\text{int}(I)$. (Υπόδειξη: Θεωρήστε στοιχεία $u < v$ στο I αριστερά του J και στοιχεία $w < z$ στο I δεξιά του J . Για οποιαδήποτε στοιχεία $x, y \in J$ με $x < y$ εφαρμόστε την Άσκηση 2.1.4 στα σημεία $u < v < x < y$ και στα $x < y < w < z$. Διακρίνετε περιπτώσεις αν $f(y) - f(x) < 0$ ή $f(y) - f(x) \geq 0$.)

Άσκηση 2.1.6 Αποδείξτε ότι αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ είναι κυρτή και $f(0) = 0$ τότε η συνάρτηση $F(t) = f(t)/t$ είναι αύξουσα στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Οι Ασκήσεις 2.1.7 έως 2.1.10 έχουν σκοπό την μελέτη της πρώτης και δεύτερης παραγώγου μιας κυρτής συνάρτησης.

Άσκηση 2.1.7 Έστω ότι η ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ από το ανοιχτό διάστημα I στο \mathbb{R} είναι αύξουσα, δηλαδή $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ για κάθε $x \in I$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε επίσης ότι κάθε f_n είναι συνεχής και αύξουσα συνάρτηση. Αποδείξτε ότι αν $f_n(x) \rightarrow g(x)$ για κάθε $x \in I$, τότε η g είναι αριστερά συνεχής σε κάθε σημείο του I .

Άσκηση 2.1.8 Έστω I ανοιχτό διάστημα, υποσύνολο του \mathbb{R} και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή. Αποδείξτε ότι οι f'_-, f'_+ υπάρχουν, είναι αύξουσες και ισχύει ότι $f'_- \leq f'_+$. Δείξτε επίσης ότι η f είναι διαφορίσιμη στα σημεία x του I στα οποία η f'_- είναι συνεχής. Συμπεράνετε ότι η f' είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του I εκτός από ένα αριθμήσιμο πλήθος στοιχείων και η f' είναι αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

(Υπόδειξη: Βήμα 1: Εφαρμόζοντας την Άσκηση 2.1.4 μια φορά για σημεία $u < w < x < z < v < y$ και μια φορά για σημεία $x < z < v < y < u < w$ αποδείξτε ότι οι f'_- και f'_+ υπάρχουν και

$$f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'_-(y) \leq f'_+(y), \quad (*)$$

ανισότητες που αποδεικνύουν ότι οι πλευρικές παράγωγοι είναι αύξουσες συναρτήσεις.

Βήμα 2: Θεωρήστε την ακολουθία συναρτήσεων $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $g_n(x) = (f(x - 1/n) - f(x))/(-1/n)$ και δείξτε ότι είναι αύξουσα ακολουθία συνεχών και αυξουσών συναρτήσεων με όριο την f'_- . Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 2.1.7 για να συμπεράνετε ότι η f'_- είναι αριστερά συνεχής. Δείξτε ομοίως ότι η f'_+ είναι δεξιά συνεχής. Επίσης οι μονότονες συναρτήσεις έχουν το πολύ αριθμήσιμο πλήθος ασυνεχειών.

Βήμα 3: Αν f'_- συνεχής στο x τότε από την (*) για $x < y$ προκύπτει ότι $f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq f'_-(y)$. Αφήστε το $y \rightarrow x^+$ για το συμπέρασμα.)

Άσκηση 2.1.9 Έστω I ανοιχτό και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) Η f είναι κυρτή.
- (ii) Η f' είναι αύξουσα συνάρτηση.

(Υπόδειξη: αν η f είναι διαφορίσιμη, τότε από την Άσκηση 2.1.8 η f'_- είναι συνεχής.)

Άσκηση 2.1.10 Έστω $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, όπου I είναι ανοιχτό και υπάρχει η f'' . Η f είναι κυρτή αν και μόνο αν $f'' \geq 0$.

Άσκηση 2.1.11 Εξετάστε αν οι συναρτήσεις

$$(i) \frac{1+x}{1+x^2} \quad (ii) x^x \quad (iii) \frac{1}{1+x+x^2} \quad (iv) (\log x)^2$$

είναι κυρτές στο πεδίο ορισμού τους.

Άσκηση 2.1.12 Αν I ανοιχτό διάστημα στο \mathbb{R} μια συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ έχει συνάρτηση στήριξης στο σημείο $z \in I$ αν υπάρχει αριθμός $\gamma_z \in \mathbb{R}$ ώστε

$$f(x) \geq f(z) + \gamma_z(x - z)$$

για κάθε $x \in I$. Αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή αν και μόνο αν η f έχει συνάρτηση στήριξης σε κάθε $z \in I$, ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

- (i) αν f κυρτή δείξτε ότι
- (α') υποθέστε ότι $0 \in I$ και $f(0) = 0$. Για κάθε $x \in I \cap (0, +\infty)$ και για κάθε $y \in I \cap (-\infty, 0)$ βρείτε $\lambda \in (0, 1)$ ώστε $0 = (1 - \lambda)x + \lambda y$ και εφαρμόστε την κυρτότητα της f , καταλήγοντας στη σχέση

$$\sup_{y \in I \cap (-\infty, 0)} \frac{f(y)}{y} \leq \inf_{x \in I \cap (0, +\infty)} \frac{f(x)}{x}.$$

(Εναλλακτικά χρησιμοποιήστε την Άσκηση 2.1.6)

(β') Επιλέξτε γ ώστε

$$\sup_{y \in I \cap (-\infty, 0)} \frac{f(y)}{y} \leq \gamma \leq \inf_{x \in I \cap (0, +\infty)} \frac{f(x)}{x},$$

και αποδείξτε ότι η γx είναι συνάρτηση στήριξης της f στο 0 .

(γ') Για τη γενική κυρτή συνάρτηση f και τυχόν $z \in I$, θεωρήστε τη συνάρτηση $h : I - z \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f(z+x) - f(z)$ και αποδείξτε ότι είναι κυρτή με $h(0) = 0$.

(ii) αν η f έχει συνάρτηση στήριξης g_z σε κάθε $z \in I$, δείξτε ότι επειδή $g_x(x) = f(x)$ ισχύει $f(x) = \sup_{z \in I} g_z(x)$ για κάθε $x \in I$. Με αυτόν τον τύπο αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή.

2.2 Η ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ JENSEN

Στα επόμενα το I θα συμβολίζει ένα διάστημα στο \mathbb{R} .

Θεώρημα 2.2.1. Έστω ότι η $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια κυρτή συνάρτηση, τα x_1, x_2, \dots, x_n ανήκουν στο I και $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$ με $\lambda_j \in [0, 1]$ για κάθε $j = 1, \dots, n$. Τότε το $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$ ανήκει στο I και ισχύει

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n).$$

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε την ανισότητα Jensen χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής. Για $n = 2$: $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, άρα $\lambda_1 = 1 - \lambda_2$, έχουμε

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= f((1 - \lambda_2)x_1 + \lambda_2 x_2) \\ &\leq (1 - \lambda_2)f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \\ &\leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \end{aligned}$$

που ισχύει διότι η f είναι κυρτή. Υποθέτουμε ότι ισχύει για n σημεία και θα δείξουμε ότι ισχύει για $n + 1$ σημεία.

Έστω ότι τα x_1, x_2, \dots, x_{n+1} ανήκουν στο I , $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \geq 0$ και $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1$.

Αν $\lambda_{n+1} = 1$ τότε $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Οπότε, πρέπει να ελέγξουμε αν ισχύει $f(\lambda_{n+1} x_{n+1}) \leq \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$. Ισοδύναμα έχουμε ότι $f(x_{n+1}) \leq f(x_{n+1})$, που ισχύει.

Αν $0 \leq \lambda_{n+1} < 1$ τότε:

$$\begin{aligned} & f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{n+1} x_{n+1}) \\ &= f\left((1 - \lambda_{n+1})\left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} x_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} x_n\right) + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \\ &\leq (1 - \lambda_{n+1})f\left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} x_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} x_n\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}), \end{aligned}$$

διότι η f είναι κυρτή. Είναι: $\lambda_j / (1 - \lambda_{n+1}) \geq 0$, για κάθε j και

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\lambda_j}{1 - \lambda_{n+1}}\right) = \frac{1 - \lambda_{n+1}}{1 - \lambda_{n+1}} = 1.$$

Από την επαγωγική υπόθεση θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{n+1} x_{n+1}) \\ &\leq (1 - \lambda_{n+1})\left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} f(x_1) + \dots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} f(x_n)\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\ &= \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}). \end{aligned}$$

□

Η παρακάτω πρόταση μάς δίνει πληροφορίες για την περίπτωση της ισότητας στην ανισότητα Jensen.

Πρόταση 2.2.2. Αν η $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνήσια κυρτή και υπάρχουν $\lambda_j \in (0, 1)$ για $j = 1, \dots, n$ με $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ και

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)$$

για κάποια $x_1, \dots, x_n \in I$ τότε ισχύει $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Απόδειξη: Αν υποθέσουμε ότι

$$x_1 \neq \sum_{j \neq 1} \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_1} x_j$$

τότε από τη γνήσια κυρτότητα της f και την υπόθεση θα ισχύει

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j) &= f\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j\right) \\ &= f\left(\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) \sum_{j \neq 1} \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_1} x_j\right) \\ &< \lambda_1 f(x_1) + (1 - \lambda_1) f\left(\sum_{j \neq 1} \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_1} x_j\right), \end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας την κυρτότητα της f

$$\leq \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j),$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα $x_1 = \sum_{j \neq 1} \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_1} x_j$. Ομοίως, για κάθε $i = 1, \dots, n$ θα ισχύει $x_i = \sum_{j \neq i} \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_i} x_j$. Έτσι,

$$\begin{aligned} (1 - \lambda_1)x_1 &= \sum_{j \neq 1} \lambda_j x_j = \sum_{j \neq 2} \lambda_j x_j - \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ &= (1 - \lambda_2)x_2 - \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ &= x_2 - \lambda_1 x_1. \end{aligned}$$

Άρα $x_1 = x_2$. Ομοίως αποδεικνύουμε ότι όλα τα x_j είναι ίσα με το x_1 . \square

Η ανισότητα Jensen μπορεί να διατυπωθεί και για ολοκληρώματα, υπό την προϋπόθεση ότι το διάστημα ολοκλήρωσης (αν μιλάμε για Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις) ή ο χώρος μέτρου στον οποίο ολοκληρώνουμε (αν μιλάμε γενικά για ολοκληρώσιμες συναρτήσεις) έχει μήκος (αντίστοιχα μέτρο) ίσο με 1. Συγκεκριμένα ισχύει η παρακάτω πρόταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.2.3 (Ανισότητα Jensen για ολοκληρώματα). Αν η $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $b - a = 1$ και η $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ είναι κυρτή συνάρτηση με το διάστημα I να περιέχει το σύνολο τιμών της g τότε

$$f\left(\int_a^b g(x) dx\right) \leq \int_a^b (f \circ g)(x) dx.$$

Γενικότερα, αν η g ορίζεται σε ένα χώρο πιθανότητας (Ω, μ) και η f είναι όπως πριν τότε ισχύει

$$f\left(\int_{\Omega} g d\mu\right) \leq \int_{\Omega} f \circ g d\mu.$$

Απόδειξη: Για την περίπτωση του ολοκληρώματος Riemann επιλέγουμε ακολουθία διαμερίσεων \mathcal{P}_n με λεπτότητα που συγκλίνει στο μηδέν και χρησιμοποιούμε την συνέχεια της f (Άσκηση 2.1.5), οπότε ισχύει

$$f\left(\int_a^b g(x) dx\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\sum_{x_j \in \mathcal{P}_n} g(x_j) \Delta x_j\right)$$

αλλά f κυρτή και $\sum_{x_j \in \mathcal{P}_n} \Delta x_j = 1$, οπότε

$$\begin{aligned} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{x_j \in \mathcal{P}_n} f(g(x_j)) \Delta x_j \\ &\leq \int_a^b (f \circ g)(x) dx. \end{aligned}$$

Για τη γενική περίπτωση θέτουμε $x_0 = \int g d\mu$ και χρησιμοποιούμε την Άσκηση 2.1.12 για να βρούμε $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε $ax + b \leq f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $ax_0 + b = f(x_0)$. Έτσι θα ισχύει $f(g(x)) \geq ag(x) + b$. Ολοκληρώνοντας την τελευταία και χρησιμοποιώντας ότι $\mu(\Omega) = 1$ και τον ορισμό του x_0 παίρνουμε ότι

$$\int (f \circ g) d\mu \geq ax_0 + b = f(x_0) = f\left(\int g d\mu\right),$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη □

2.2.1 Η ανισότητα Αριθμητικού-Γεωμετρικού μέσου

Θεώρημα 2.2.4. Θεωρούμε $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$, και $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$, με $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$. Τότε:

$$(2.1) \quad x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n.$$

Αν επιπλέον $\lambda_j > 0$ για κάθε $j = 1, \dots, n$ τότε η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν όλα τα x_j είναι μεταξύ τους ίσα.

Συγκεκριμένα:

$$(2.2) \quad \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

με ισότητα μόνο αν όλα τα x_j είναι μεταξύ τους ίσα.

Απόδειξη: Η (2.2) προκύπτει αμέσως από την (2.1) αν θέσουμε $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1/n \geq 0$. Προφανώς $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$, οπότε:

$$x_1^{1/n} \dots x_n^{1/n} \leq \frac{1}{n} x_1 + \dots + \frac{1}{n} x_n$$

άρα,

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Ομοίως και η περίπτωση της ισότητας, αφού $1/n > 0$.

Μένει να αποδείξουμε την (2.1) και να εξετάσουμε την περίπτωση της ισότητας. Θέτουμε $f(x) = e^x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Η f είναι κυρτή όπως είδαμε στο Παράδειγμα 2.1.4. Θεωρούμε $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$. Θέτουμε $y_1 = \ln x_1, \dots, y_n = \ln x_n$ και εφαρμόζουμε την ανισότητα Jensen για την f , τα y_1, \dots, y_n και τα $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ οπότε

$$e^{\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n} \leq \lambda_1 e^{y_1} + \dots + \lambda_n e^{y_n}.$$

Έτσι

$$e^{\lambda_1 \ln x_1 + \dots + \lambda_n \ln x_n} \leq \lambda_1 e^{\ln x_1} + \dots + \lambda_n e^{\ln x_n},$$

άρα,

$$e^{\ln(x_1)^{\lambda_1} + \dots + \ln(x_n)^{\lambda_n}} \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$$

επομένως,

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n.$$

Τέλος αν όλα τα λ_j είναι θετικά, και ισχύει η ισότητα στην προηγούμενη ανισότητα, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι η e^x είναι γνήσια κυρτή (Παράδειγμα 2.1.4) και την Πρόταση 2.2.2 για να συμπεράνουμε ότι τα y_j είναι μεταξύ τους ίσα, άρα και τα x_j □

2.2.2 Η ανισότητα Young

Λήμμα 2.2.5. Αν $x, y \geq 0$, $p, q > 1$ και $p^{-1} + q^{-1} = 1$, τότε

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x^p = y^q$.

Απόδειξη: Αν $x = 0$ ή $y = 0$ τότε η ανισότητα ισχύει. Αν τα x και y είναι διάφορα του μηδενός, τότε θέτουμε

$$\lambda_1 = \frac{1}{p}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{q}, \quad x_1 = x^p, \quad x_2 = y^q,$$

και εφαρμόζουμε το Θεώρημα 2.2.4. Οπότε $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ και άρα

$$(x^p)^{1/p} (y^q)^{1/q} \leq \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q,$$

δηλαδή η ζητούμενη. Η περίπτωση της ισότητας προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 2.2.4. □

2.2.3 Η ανισότητα Hölder για αθροίσματα

Θεώρημα 2.2.6. Αν $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n \geq 0$, $p, q > 1$ και $p^{-1} + q^{-1} = 1$ τότε

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \leq (x_1^p + \dots + x_n^p)^{1/p} (y_1^q + \dots + y_n^q)^{1/q}.$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $y_j = 0$ για κάθε $j = 1, \dots, n$ ή υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $x_j^p = \lambda y_j^q$ για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$.

Απόδειξη: Αν όλα τα x_i ή όλα τα y_i είναι μηδέν τότε η ανισότητα είναι προφανής. Έστω τώρα ότι ούτε τα x_i ούτε τα y_i είναι όλα μηδέν, οπότε τα $x_1^p + \dots + x_n^p$ και $y_1^q + \dots + y_n^q$ είναι διάφορα του μηδενός. Εφαρμόζουμε την ανισότητα Young για

$$x = \frac{x_i}{(x_1^p + \dots + x_n^p)^{1/p}} \quad \text{και} \quad y = \frac{y_i}{(y_1^q + \dots + y_n^q)^{1/q}},$$

και παίρνουμε

$$(2.3) \quad \frac{x_i y_i}{\left(\sum_{j=1}^n x_j^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^n y_j^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{x_i^p}{p \left(\sum_{j=1}^n x_j^p\right)} + \frac{y_i^q}{q \left(\sum_{j=1}^n y_j^q\right)},$$

άρα,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{\left(x_1^p + \dots + x_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(y_1^q + \dots + y_n^q\right)^{\frac{1}{q}}} &\leq \frac{1}{p \left(x_1^p + \dots + x_n^p\right)} \sum_{i=1}^n x_i^p \\ &+ \frac{1}{q \left(y_1^q + \dots + y_n^q\right)} \sum_{i=1}^n y_i^q = 1. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(x_1^p + \dots + x_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(y_1^q + \dots + y_n^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $x_j^p = \lambda y_j^q$ για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$ τότε ελέγχουμε εύκολα ότι ισχύει η ισότητα. Ομοίως αν $y_j = 0$ για κάθε $j = 1, \dots, n$.

Αντιστρόφως, αν ισχύει η ισότητα και δεν είναι όλα τα y_j ίσα με το μηδέν, τότε είτε όλα τα x_j είναι ίσα με το μηδέν και ισχύει το ζητούμενο με $\lambda = 0$ είτε καμιά από τις ανισότητες (2.3) για $i = 1, 2, \dots, n$ δεν είναι γνήσια (διότι θα ήταν γνήσιες ανισότητες οι επόμενες). Έτσι σε κάθε μια από τις (2.3) για $i = 1, 2, \dots, n$ ισχύει η ισότητα. Από την περίπτωση της ισότητας στην ανισότητα Young συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{x_i^p}{x_1^p + \dots + x_n^p} = \frac{y_i^q}{y_1^q + \dots + y_n^q}$$

για κάθε $i = 1, \dots, n$. Άρα $x_i^p = \lambda y_i^q$ για κάθε $i = 1, \dots, n$ όπου

$$\lambda = \frac{x_1^p + \dots + x_n^p}{y_1^q + \dots + y_n^q},$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. ◻

2.2.4 Η ανισότητα Hölder για ολοκληρώματα

Για να αποδείξουμε τα παρακάτω χρειαζόμαστε λίγες γνώσεις θεωρίας μέτρου Lebesgue. Συγκεκριμένα χρειαζόμαστε το γεγονός ότι αν για μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : I \rightarrow [0, \infty)$, όπου I διάστημα ή γενικότερα μετρήσιμο υποσύνολο του \mathbb{R} , ισχύει $\int_I f = 0$ τότε η f είναι ίση με μηδέν σχεδόν παντού.

Θεώρημα 2.2.7. Έστω ότι οι $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μη αρνητικές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και $p, q > 1$ με $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Τότε,

$$\int_I fg \leq \left(\int_I f^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_I g^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν είτε $g = 0$ σχεδόν παντού είτε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $f^p = \lambda g^q$ σχεδόν παντού.

Απόδειξη: Αν $\int_I f^p = 0$ τότε $f = 0$ σχεδόν παντού οπότε η ανισότητα ισχύει (ως ισότητα). Ομοίως αν $\int_I g^q = 0$. Υποθέτουμε τώρα ότι $\int_I f^p \neq 0$ και $\int_I g^q \neq 0$. Από την ανισότητα του Young έχουμε:

$$(2.4) \quad \frac{fg}{\left(\int_I f^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_I g^q \right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{f^p}{p \int_I f^p} + \frac{g^q}{q \int_I g^q},$$

άρα,

$$\int_I \frac{fg}{\left(\int_I f^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_I g^q \right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p \int_I f^p} \int_I f^p + \frac{1}{q \int_I g^q} \int_I g^q = 1,$$

δηλαδή η ζητούμενη. Αν ισχύει η ισότητα και g δεν είναι μηδέν σχεδόν παντού, τότε αν $\int_I f^p = 0$ συμπεραίνουμε ότι $f = 0$ σχεδόν παντού. Οπότε το ζητούμενο ισχύει με $\lambda = 0$. Αν τώρα $\int_I f^p \neq 0$ τότε ισχύει ισότητα στην (2.4) σχεδόν παντού (αλλιώς η επόμενη ανισότητα θα είναι γνήσια) και από την περίπτωση της ισότητας στην ανισότητα του Young συμπεραίνουμε ότι $f^p = \lambda g^q$ σχεδόν παντού, με $\lambda = (\int_I f^p) / (\int_I g^q)$. □

2.2.5 Η ανισότητα Minkowski για αθροίσματα

Θεώρημα 2.2.8. Αν $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n \geq 0$ και $p \geq 1$, τότε

$$\left((x_1 + y_1)^p + \dots + (x_n + y_n)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq (x_1^p + \dots + x_n^p)^{\frac{1}{p}} + (y_1^p + \dots + y_n^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν είτε $p = 1$ είτε $y_j = 0$ για κάθε $j = 1, \dots, n$ είτε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $x_j = \lambda y_j$ για κάθε $j = 1, \dots, n$.

Απόδειξη: Αν $p = 1$ η ανισότητα είναι προφανής (ως ισότητα). Έστω ότι $p > 1$. Διαλέγουμε $q > 1$ ώστε $p^{-1} + q^{-1} = 1$, δηλαδή $q = p/(p-1)$. Έχουμε,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (x_j + y_j)^p &= \sum_{j=1}^n (x_j + y_j)(x_j + y_j)^{p-1} \\ &= \sum_{j=1}^n x_j(x_j + y_j)^{p-1} + \sum_{j=1}^n y_j(x_j + y_j)^{p-1} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^n x_j^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^n (x_j + y_j)^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\quad + \left(\sum_{j=1}^n y_j^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^n (x_j + y_j)^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left[\left(\sum_{j=1}^n x_j^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^n y_j^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \left(\sum_{j=1}^n (x_j + y_j)^p \right)^{\frac{p-1}{p}}. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\left(\sum_{j=1}^n (x_j + y_j)^p \right)^{1 - \frac{p-1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^n x_j^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^n y_j^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Αλλά $1 - \frac{p-1}{p} = \frac{1}{p}$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη της ανισότητας.

Εύκολα τώρα ελέγχουμε την περίπτωση της ισότητας χρησιμοποιώντας την περίπτωση της ισότητας του Θεωρήματος 2.2.6. \square

2.2.6 Η ανισότητα Minkowski για ολοκληρώματα

Όπως και στην περίπτωση της ανισότητας Hölder για ολοκληρώματα, έτσι και εδώ θα χρειαστούμε λίγες γνώσεις θεωρίας μέτρου Lebesgue.

Θεώρημα 2.2.9. Αν $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ μη αρνητικές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και $p \geq 1$, τότε

$$\left(\int_I (f + g)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_I f^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_I g^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν είτε $p = 1$ είτε $g = 0$ σχεδόν παντού είτε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $f = \lambda g$ σχεδόν παντού.

Απόδειξη: Αν $\int_I (f + g)^p = 0$ τότε $f = g = 0$ σχεδόν παντού και η ανισότητα ισχύει (ως ισότητα). Υποθέτουμε ότι $\int_I (f + g)^p \neq 0$. Αν $p = 1$ η ανισότητα είναι φανερή (ως ισότητα). Αν $p > 1$ όμοια με πριν θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_I (f + g)^p dx &= \int_I (f + g)(f + g)^{p-1} dx \\ &= \int_I f(f + g)^{p-1} dx + \int_I g(f + g)^{p-1} dx \\ &\leq \left(\int_I f^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_I (f + g)^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\quad + \left(\int_I g^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_I (f + g)^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left[\left(\int_I f^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_I g^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right] \left(\int_I (f + g)^p \right)^{\frac{p-1}{p}}. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\left(\int_I (f + g)^p dx \right)^{1 - \frac{p-1}{p}} \leq \left(\int_I f^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_I g^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Αλλά $1 - \frac{p-1}{p} = \frac{1}{p}$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη της ανισότητας.

Η περίπτωση της ισότητας ελέγχεται εύκολα όπως και πριν. \square

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 2.2.1 Αποδείξτε χρησιμοποιώντας τον ορισμό της κυρτής συνάρτησης και την ανισότητα Young ότι αν η συνάρτηση $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}$ είναι κυρτή, τότε και η συνάρτηση e^φ είναι κυρτή.

Άσκηση 2.2.2 Αποδείξτε ότι για κάθε $0 < p \leq q < \infty$ ισχύει

$$\left(\int_I |g|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_I |g|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

εφόσον τα ολοκληρώματα υπάρχουν, όπου το I είναι διάστημα (ή μετρήσιμο σύνολο) με μήκος (αντίστοιχα μέτρο) ίσο με 1.

Άσκηση 2.2.3 Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^{-n}$ είναι κυρτή στο $(0, \infty)$ και χρησιμοποιήστε την ανισότητα Jensen για να αποδείξετε ότι

$$\left(\int_I |g|^{-n} \right)^{\frac{1}{-n}} \leq \int_I |g|,$$

εφόσον τα ολοκληρώματα υπάρχουν, όπου το I είναι διάστημα (ή μετρήσιμο σύνολο) με μήκος (αντίστοιχα μέτρο) ίσο με 1.

2.3 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Η ανισότητα Minkowski για αθροίσματα μας λέει ότι για κάθε $p \geq 1$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p}$$

(όπου τα x_j είναι οι συντεταγμένες του $x \in \mathbb{R}^n$ ως προς τη συνήθη βάση) ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα. Εύκολα βλέπουμε ότι $\|\cdot\|_p$ ικανοποιεί και τις υπόλοιπες ιδιότητες της νόρμας, και συνεπώς είναι μια νόρμα στον \mathbb{R}^n . Αυτός ο χώρος με νόρμα, του οποίου η μετρική γράφεται d_p (δηλαδή $d_p(x, y) = \|x - y\|_p$), συμβολίζεται με το ℓ_p^n , και είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος. Η πληρότητα ελέγχεται εύκολα διότι η σύγκλιση ως προς τη μετρική d_p είναι ισοδύναμη με τη σύγκλιση

κατά συντεταγμένη, εξαιτίας του ότι

$$|x_j - y_j| \leq \|x - y\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^p \right)^{1/p}.$$

Σημειώνουμε εδώ ότι είναι δυνατόν να ορίσουμε και τον χώρο ℓ_∞^n εφοδιάζοντας τον \mathbb{R}^n με την νόρμα $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$.

Η ανισότητα Minkowski για ολοκληρώματα μας λέει ότι για κάθε $p \geq 1$ στο χώρο των συνεχών συναρτήσεων $C[a, b]$ η

$$\|f\|_p = \left(\int_{[a,b]} |f|^p \right)^{1/p}$$

ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα. Εύκολα ελέγχει κανείς και τις άλλες ιδιότητες της νόρμας. Έτσι ο $C[a, b]$ γίνεται χώρος με τη νόρμα $\|\cdot\|_p$ και άρα και μετρικός χώρος. Σε αντίθεση με το παράδειγμα του ℓ_p^n , αυτός δεν είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος. Για παράδειγμα, η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = x^n$ για $x \in [0, 1]$ και $f_n(x) = 1$ για $x \in [1, 2]$ ανήκει στο $C[0, 2]$ και είναι ακολουθία Cauchy ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_p$, αφού για $n > m$ ισχύει

$$\|f_n - f_m\|_p^p = \int_0^1 (x^m - x^n)^p dx \leq \int_0^1 x^{mp} dx = \frac{1}{mp+1} \rightarrow 0$$

καθώς $m \rightarrow \infty$. Όμως η f_n δεν συγκλίνει σε καμία συνάρτηση στον $C[0, 2]$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_p$: έστω ότι υπάρχει $g \in C[0, 2]$ με $\|f_n - g\|_p \rightarrow 0$. Θέτουμε $f(x) = 0$ για $x \in [0, 1)$ και $f(x) = 1$ για $x \in [1, 2]$. Η f είναι ασυνεχής στο 1 οπότε $f \notin C[0, 2]$. Εύκολα ελέγχουμε ότι $\|f - f_n\|_p \rightarrow 0$. Αλλά

$$\|f - g\|_p \leq \|f - f_n\|_p + \|f_n - g\|_p \rightarrow 0,$$

οπότε $\|f - g\|_p = 0$. Παρατηρούμε τώρα ότι τόσο η f όσο και η g είναι συνεχείς στα διαστήματα $[1, 2]$ και $[0, 1 - 1/m]$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Επιπλέον $\int_0^{1-1/m} |f - g|^p \leq \int_0^2 |f - g|^p = 0$, άρα $g = f$ στο διάστημα $[0, 1 - 1/m]$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Ομοίως $g = f$ στο διάστημα $[1, 2]$. Δηλαδή $g = f \notin C[0, 2]$ το οποίο είναι άτοπο.

Μπορούμε όμως να θεωρήσουμε την πλήρωση του χώρου $(C[a, b], \|\cdot\|_p)$ ο οποίος είναι χώρος με νόρμα και συμβολίζεται με $L_p[a, b]$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 2.3.1 Αποδείξτε ότι η επιλογή του συμβόλου ℓ_∞^n για τον \mathbb{R}^n με νόρμα την $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$ όπου x_j οι συντεταγμένες του x , είναι φυσιολογική, δείχνοντας ότι

$$\left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p} \rightarrow \|x\|_\infty$$

για $p \rightarrow \infty$.

Άσκηση 2.3.2 Αποδείξτε ότι για κάθε $1 \leq p \leq \infty$ ο ℓ_p^n είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Άσκηση 2.3.3 Αποδείξτε ότι η $\|\cdot\|_p$ για $0 < p < 1$ δεν είναι νόρμα. Δείξτε ισοδύναμα ότι το σύνολο $B_p^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p \leq 1\}$ για $0 < p < 1$ δεν είναι κυρτό. (Μπορείτε να δείτε το παραπάνω σύνολο στον \mathbb{R}^3 για $p = 0,6$ και $p = 0,8$ στο Παράρτημα Α'.)

Άσκηση 2.3.4 Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει $\|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$. Γενικότερα, για κάθε $1 \leq p < q < \infty$ ισχύει

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|x\|_q.$$

3.1 ΚΥΡΤΑ ΣΩΜΑΤΑ, ΚΥΡΤΗ ΘΗΚΗ

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.1.1 (Κυρτό Σώμα). Έστω ότι το K είναι ένα υποσύνολο του \mathbb{R}^n . Αν το K είναι κυρτό, συμπαγές και έχει μη κενό εσωτερικό, δηλαδή το σύνολο $\text{int}(K)$ είναι διαφορετικό του κενού, τότε το K λέγεται κυρτό σώμα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.1.2 (Κεντρικά συμμετρικό σύνολο). Έστω ότι το C είναι υποσύνολο του \mathbb{R}^n . Αν όποτε το x ανήκει στο C τότε και το $-x$ ανήκει και αυτό στο C , το C λέγεται κεντρικά συμμετρικό ή συμμετρικό ως προς το 0 .

Πρόταση 3.1.3. Κάθε κυρτό και κεντρικά συμμετρικό σώμα K περιέχει το 0 στο εσωτερικό του: $0 \in \text{int}(K)$.

Απόδειξη: Αφού το K έχει μη κενό εσωτερικό υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ και $\epsilon > 0$ ώστε $B(x, \epsilon) \subseteq K$. Αλλά το K είναι κεντρικά συμμετρικό, οπότε ισχύει και $B(-x, \epsilon) \subseteq K$. Όμως το K είναι κυρτό οπότε

$$\frac{1}{2}B(x, \epsilon) + \frac{1}{2}B(-x, \epsilon) \subseteq K.$$

Η απόδειξη θα ολοκληρωθεί αν δείξουμε ότι

$$B(0, \epsilon) \subseteq \frac{1}{2}B(x, \epsilon) + \frac{1}{2}B(-x, \epsilon).$$

Θεωρούμε $z \in B(0, \epsilon)$, οπότε $\|z\|_2 < \epsilon$. Φανερά $z = \frac{1}{2}(z+x) + \frac{1}{2}(z-x)$, οπότε αρκεί να δειχθεί ότι $z+x \in B(x, \epsilon)$ και $z-x \in B(-x, \epsilon)$. Αλλά $\|x - (z+x)\|_2 = \|z\|_2 < \epsilon$ και $\|(-x) - (z-x)\|_2 = \|z\|_2 < \epsilon$. \square

Ένας τρόπος να περιγράψουμε ένα κυρτό και κεντρικά συμμετρικό σώμα K στον \mathbb{R}^n είναι μέσω μιας νόρμας:

Πρόταση 3.1.4. Αν η $\|\cdot\|$ είναι μια νόρμα στον \mathbb{R}^n τότε το σύνολο

$$K_{\|\cdot\|} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$$

είναι ένα κυρτό, κεντρικά συμμετρικό σώμα στον \mathbb{R}^n .

Απόδειξη: Είναι φανερό ότι το K είναι μη κενό (αφού $0 \in K$) και ότι είναι κεντρικά συμμετρικό σύνολο (αφού $\| -x \| = \|x\|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$). Επίσης είναι κυρτό, διότι αν $x, y \in K$ και $\lambda \in [0, 1]$ τότε

$$\|(1 - \lambda)x + \lambda y\| \leq (1 - \lambda)\|x\| + \lambda\|y\| \leq (1 - \lambda) + \lambda = 1,$$

δηλαδή $(1 - \lambda)x + \lambda y \in K$. Μένει να δειχθεί ότι είναι κλειστό, φραγμένο (οπότε συμπαγές) και με μη κενό εσωτερικό υποσύνολο του $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$.

Το ότι το $K_{\|\cdot\|}$ είναι κλειστό προκύπτει από τη συνέχεια της νόρμας ως προς την ευκλείδεια απόσταση (Πόρισμα 1.2.8): αν $x_m \in K_{\|\cdot\|}$ και $x_m \rightarrow x$ ως προς την ευκλείδεια νόρμα, τότε από τη συνέχεια της $\|\cdot\|$ θα πρέπει $\|x_m\| \rightarrow \|x\|$. Αλλά $x_m \in K_{\|\cdot\|}$ συνεπάγεται ότι $\|x_m\| \leq 1$, άρα $\|x\| \leq 1$ δηλαδή $x \in K_{\|\cdot\|}$.

Το ότι το K είναι φραγμένο και με μη κενό εσωτερικό προκύπτει από την Πρόταση 1.2.7. Σύμφωνα με αυτήν υπάρχουν σταθερές $c, C > 0$ ώστε $c\|x\|_2 \leq \|x\| \leq C\|x\|_2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Άρα αν $x \in K_{\|\cdot\|}$, τότε $\|x\| \leq 1$ οπότε $\|x\|_2 \leq 1/c$. Δηλαδή $K \subseteq B_2^n(0, 1/c)$ και συνεπώς το K είναι φραγμένο. Επίσης, αν $x \in B(0, 1/C)$ τότε $\|x\|_2 < 1/C$. Έτσι $\|x\| \leq C\|x\|_2 \leq 1$ άρα $x \in K_{\|\cdot\|}$. Δηλαδή $B(0, 1/C) \subseteq K_{\|\cdot\|}$ και άρα το $K_{\|\cdot\|}$ έχει μη κενό εσωτερικό. \square

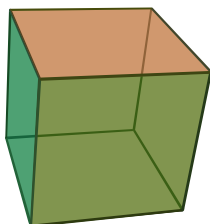
Ορισμός 3.1.5. Κάθε νόρμα $\|\cdot\|$ στον \mathbb{R}^n ορίζει το κυρτό, κεντρικά συμμετρικό σώμα

$$K_{\|\cdot\|} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\},$$

το οποίο ονομάζεται *μοναδιαία μπάλα* του (μετρικού) χώρου $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$.

Παρατήρηση 3.1.6. Η αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή ο ορισμός μιας νόρμας $\|\cdot\|_K$ από ένα δοθέν κυρτό και κεντρικά συμμετρικό σώμα K είναι εφικτή και μάλιστα το κυρτό σώμα που ορίζει η $\|\cdot\|_K$ είναι το K . Με άλλα λόγια η σχέση νόρμας και κυρτού και κεντρικά συμμετρικού σώματος στον \mathbb{R}^n είναι 1-1 και επί. Αυτό θα παρουσιαστεί στην επόμενη ενότητα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1.7 (Το σύνολο B_∞^n). Είναι εύκολο να δούμε ότι η $\|x\|_\infty := \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$ όπου $(x_j)_{j=1}^n$ οι συντεταγμένες του $x \in \mathbb{R}^n$ ορίζει μια νόρμα. Η μοναδιαία μπάλα του χώρου αυτού, δηλαδή το σύνολο $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty \leq 1\}$, είναι ο κύβος ακμής μήκους 2 στις n διαστάσεις, και συμβολίζεται με B_∞^n . Δηλαδή είναι το σύνολο $[-1, 1]^n$. Συχνά χρησιμοποιείται η λέξη *υπερκύβος* για τις διαστάσεις $n \geq 4$. Για $n = 2$ πρόκειται για το τετράγωνο $[-1, 1] \times [-1, 1]$ στο επίπεδο \mathbb{R}^2 .

ΣΧΗΜΑ 3.1: Ο κύβος B_∞^3 στον \mathbb{R}^3 .

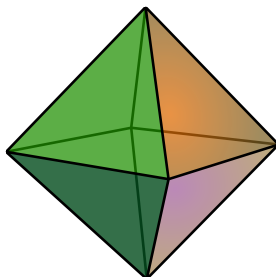
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1.8 (Τα σύνολα B_p^n για $p \geq 1$). Για $p \geq 1$ και $x \in \mathbb{R}^n$ με συντεταγμένες (x_1, x_2, \dots, x_n) ορίζουμε την ποσότητα

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p},$$

η οποία είναι νόρμα στον \mathbb{R}^n (η τριγωνική ανισότητα είναι το Θεώρημα 2.2.8). Σύμφωνα με τα παραπάνω το σύνολο

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p \leq 1\}$$

είναι ένα κυρτό, κεντρικά συμμετρικό σώμα στον \mathbb{R}^n ; η μοναδιαία μπάλα του χώρου $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$. Το σύνολο αυτό συμβολίζεται με B_p^n . Στο Σχήμα 3.2 εικονίζεται το B_1^3 , δηλαδή το σύνολο των σημείων $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ για τα οποία ισχύει $|x_1| + |x_2| + |x_3| \leq 1$, το οποίο είναι ένα κανονικό οκτάεδρο. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι για $1 \leq p < q < \infty$ ισχύει

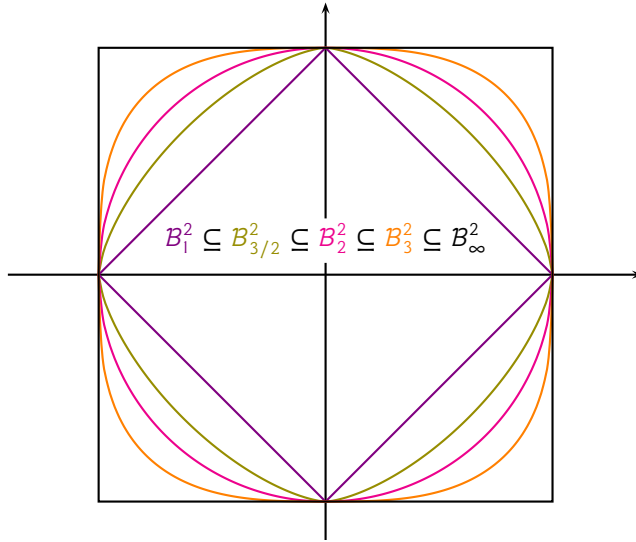
ΣΧΗΜΑ 3.2: Το κανονικό οκτάεδρο είναι η μοναδιαία μπάλα B_1^3 του $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_1)$.

$B_1^n \subseteq B_p^n \subseteq B_q^n \subseteq B_\infty^n$. Πράγματι, αν $\|x\|_p \leq 1$ τότε $|x_j| \leq 1$ για κάθε

συντεταγμένη x_j του x . Άρα, αφού $p < q$ θα ισχύει $|x_j|^q \leq |x_j|^p$ και αθροίζοντας ως προς j θα έχουμε

$$\sum_{j=1}^n |x_j|^q \leq \sum_{j=1}^n |x_j|^p \leq 1.$$

Συνεπώς $\|x\|_q \leq 1$. Για το γενικό $x \in \mathbb{R}^n$ τώρα, θεωρούμε το $x/\|x\|_p$ για



ΣΧΗΜΑ 3.3: $B_1^2 \subseteq B_{3/2}^2 \subseteq B_2^2 \subseteq B_3^2 \subseteq B_\infty^2$.

το οποίο ισχύει $\|x/\|x\|_p\|_p = 1$. Έτσι, από το προηγούμενο $\|x/\|x\|_p\|_q \leq 1$ και άρα $\|x\|_q \leq \|x\|_p$. Επίσης είναι άμεσο ότι $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \leq \|x\|_p$ για κάθε $p \in [1, \infty)$. Τώρα η μονοτονία των συνόλων B_p^n ως προς p προκύπτει από τον ορισμό τους: αν $x \in B_p^n$ τότε $\|x\|_p \leq 1$ άρα $\|x\|_q \leq 1$ συνεπώς $x \in B_q^n$. Το Σχήμα 3.3 δείχνει τα σώματα B_1^2 , $B_{3/2}^2$, B_2^2 , B_3^2 και B_∞^2 . Για μια τρισδιάστατη παρουσίαση αυτών των σωμάτων δείτε στο Παράρτημα Α'.

Μια άλλη διαδικασία να ορίσουμε κυρτά σώματα εκτός από την νόρμα είναι μέσω της κυρτής θήκης.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.1.9 (Κυρτή Θήκη). Δοθέντος ενός συνόλου A υποσυνόλου του \mathbb{R}^n , ορίζουμε την κυρτή θήκη του A ως την τομή όλων των κυρτών

συνόλων K , τα οποία είναι υποσύνολα του \mathbb{R} , με $A \subseteq K$. Γράφουμε

$$\text{conv}(A) = \bigcap_{\{K: K \supseteq A\}} K,$$

όπου το K είναι κυρτό.

Φανερά, το $\text{conv}(A)$ είναι κυρτό και μάλιστα είναι το ελάχιστο κυρτό σύνολο που περιέχει το A .

Ορισμος 3.1.10 (Κυρτός Συνδυασμός). Αν τα x_1, \dots, x_m ανήκουν στον \mathbb{R}^n και $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ είναι μεγαλύτερα ή ίσα του μηδενός με $\sum_{j=1}^m \lambda_j = 1$, τότε το σημείο $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m$ λέγεται κυρτός συνδυασμός των x_1, \dots, x_m .

Λήμμα 3.1.11. Έστω ότι το A είναι υποσύνολο του \mathbb{R}^n . Το $\text{conv}(A)$ ισούται με το σύνολο όλων των κυρτών συνδυασμών στοιχείων του A .

Απόδειξη: Θέτουμε

$$(3.1) \quad K = \left\{ \sum_{j=1}^m \lambda_j x_j, \text{ όπου } \lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^m \lambda_j = 1, x_j \in A, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

(i) Το K είναι κυρτό σύνολο.

Έστω x, y που ανήκουν στο K και έστω $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m$ και $y = \mu_1 y_1 + \dots + \mu_k y_k$, όπου x_j, y_j ανήκουν στο A , $\lambda_j, \mu_j \geq 0$ και

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j = 1 = \sum_{j=1}^k \mu_j.$$

Πρέπει να δείξουμε ότι αν α ανήκει στο $[0, 1]$ τότε το σημείο $(1 - \alpha)x + \alpha y$ ανήκει στο K . Έχουμε,

$$\begin{aligned} (1 - \alpha)x + \alpha y &= (1 - \alpha)(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m) + \alpha(\mu_1 y_1 + \dots + \mu_k y_k) \\ &= (1 - \alpha)\lambda_1 x_1 + \dots + (1 - \alpha)\lambda_m x_m + \alpha\mu_1 y_1 + \dots + \alpha\mu_k y_k. \end{aligned}$$

Τα x_j, y_j ανήκουν στο A , $(1 - \alpha)\lambda_j \geq 0$, $\alpha\mu_j \geq 0$ και

$$\begin{aligned} (1 - \alpha)\lambda_1 + \dots + (1 - \alpha)\lambda_m + \alpha\mu_1 + \dots + \alpha\mu_k \\ &= (1 - \alpha)(\lambda_1 + \dots + \lambda_m) + \alpha(\mu_1 + \dots + \mu_k) \\ &= (1 - \alpha)1 + \alpha 1 = 1. \end{aligned}$$

Συνεπώς, το σημείο $(1 - \alpha)x + \alpha y$ ανήκει στο K . Άρα, το K είναι κυρτό σύνολο.

(ii) Κάθε κυρτό σύνολο F περιέχει οποιονδήποτε κυρτό συνδυασμό οποιωνδήποτε στοιχείων του.

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της επαγωγής στο πλήθος των σημείων.

(α') Για $m = 2$: Τα x_1, x_2 ανήκουν στο F . Άρα, το σημείο $(1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2$ ανήκει στο F , από τον ορισμό του κυρτού συνόλου.

(β') Υποθέτουμε ότι ο κυρτός συνδυασμός m σημείων του F ανήκει στο F . Έστω $x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}$ ανήκουν στο F , $\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1} \geq 0$ και $\sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j = 1$. Πρέπει να δείξουμε ότι το σημείο $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{m+1} x_{m+1}$ ανήκει στο F .

i. Αν $\lambda_{m+1} = 1$ τότε

$$\sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j x_j = \lambda_{m+1} x_{m+1} = x_{m+1},$$

που ανήκει στο F .

ii. Αν $\lambda_{m+1} < 1$ τότε

$$\sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j x_j = (1 - \lambda_{m+1}) \left(\sum_{j=1}^m \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_{m+1}} x_j \right) + \lambda_{m+1} x_{m+1},$$

το οποίο ανήκει στο F , διότι το σημείο $\sum_{j=1}^m \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_{m+1}} x_j$ ανήκει στο F από την επαγωγική υπόθεση και το

$$(1 - \lambda_{m+1}) \left(\sum_{j=1}^m \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_{m+1}} x_j \right) + \lambda_{m+1} x_{m+1},$$

είναι κυρτός συνδυασμός δύο σημείων του κυρτού F .

Από τα παραπάνω λοιπόν, το K όπως ορίστηκε στην (3.1), είναι κυρτό σύνολο και άρα περιέχει οποιονδήποτε κυρτό συνδυασμό οποιωνδήποτε στοιχείων του. Αν λοιπόν το x ανήκει στο A τότε το $x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x$ οπότε ανήκει και στο K . Άρα το K είναι υπερσύνολο της κυρτής θήκης του A γιατί η κυρτή θήκη του A είναι το ελάχιστο κυρτό σύνολο που περιέχει το A . Έτσι $K \supseteq \text{conv}(A)$. Όμως το $\text{conv}(A)$ είναι κυρτό σύνολο,

υπερσύνολο του A . Άρα περιέχει, σύμφωνα με το (ii), τους κυρτούς συνδυασμούς στοιχείων του A , δηλαδή $\text{conv}(A) \supseteq K$. Οπότε, το $\text{conv}(A)$ είναι υπερσύνολο του K . Συνεπώς, $\text{conv}(A) = K$. \square

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1.12 (Το Simplex). Ονομάζουμε simplex την κυρτή θήκη οποιωνδήποτε σημείων στον \mathbb{R}^n τα οποία βρίσκονται σε γενική θέση (affine-ανεξάρτητα). Για παράδειγμα, στο Σχήμα 3.4 βλέπουμε ένα simplex στον \mathbb{R}^3 , δηλαδή την κυρτή θήκη τεσσάρων σημείων σε γενική θέση. Ειδικά για το \mathbb{R}^3 οι κυρτές θήκες τεσσάρων σημείων σε γενική θέση λέγονται και *τετράεδρα*.

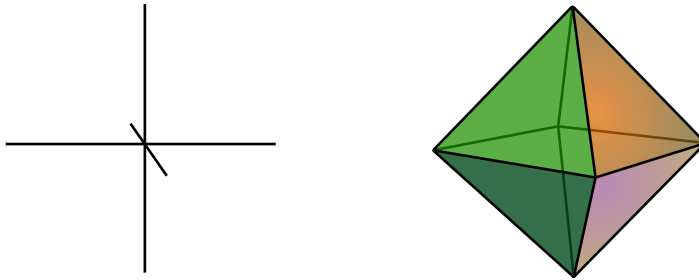


ΣΧΗΜΑ 3.4: Δύο πολύτοπα στον \mathbb{R}^3 . Το πρώτο είναι τετράεδρο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1.13 (Πολύτοπα). Η κυρτή θήκη οσωνδήποτε (πεπερασμένου πλήθους) σημείων στον \mathbb{R}^n ονομάζεται *πολύτοπο*. Βλέπουμε ένα παράδειγμα στο Σχήμα 3.4. Ένα άλλο παράδειγμα είναι το κανονικό οκτάεδρο στο Σχήμα 3.5, το οποίο είναι φανερά η κυρτή θήκη των διανυσμάτων της συνήθους βάσης e_1, \dots, e_n του \mathbb{R}^n και των αντιθέτων τους. Το κανονικό οκτάεδρο σε περισσότερες από τρεις διαστάσεις ονομάζεται «κανονικό υπεροκτάεδρο» ή συχνότερα «σταυρωτό πολύτοπο» (cross-polytope) μια και φανερά είναι η κυρτή θήκη ενός «πολυδιάστατου» σταυρού.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1.14 (Καραθεοδωρή). Έστω A υποσύνολο του \mathbb{R}^n . Τότε η κυρτή θήκη του A ισούται με όλους τους κυρτούς συνδυασμούς σημείων του A σε γενική θέση. Δηλαδή για κάθε $x \in \text{conv}(A)$ υπάρχουν το πολύ $n + 1$ στοιχεία του A ώστε το x να είναι κυρτός συνδυασμός τους.

Απόδειξη (του Radon): Έστω ότι το x ανήκει στο $\text{conv}(A)$ και m ο ελάχιστος ακέραιος ώστε να υπάρχουν x_1, \dots, x_m στο A , $\lambda_1, \dots, \lambda_m > 0$ και $\sum_{j=1}^m \lambda_j = 1$ με $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m$. Θα δείξουμε ότι τα x_1, \dots, x_m είναι σε γενική θέση. Υποθέτουμε το αντίθετο. Οπότε τα $x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_m - x_1$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Έτσι, υπάρχουν μ_2, \dots, μ_m



ΣΧΗΜΑ 3.5: Η κυρτή θήκη του «πολυδιάστατου» σταυρού στα αριστερά δίνει το σταυρωτό πολύτοπο (cross-polytope) στα δεξιά.

όχι όλα μηδέν ώστε $\mu_2(x_2 - x_1) + \dots + \mu_m(x_m - x_1) = 0$. Άρα,

$$(-\mu_2 - \mu_3 - \dots - \mu_m)x_1 + \mu_2x_2 + \dots + \mu_mx_m = 0.$$

Θέτουμε $\mu_1 = -\mu_2 - \mu_3 - \dots - \mu_m$ οπότε τα $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ δεν είναι όλα μηδέν και ισχύει

$$(3.2) \quad \mu_1 + \dots + \mu_m = 0$$

και

$$(3.3) \quad \mu_1x_1 + \dots + \mu_mx_m = 0.$$

Παρατηρούμε ότι λόγω της (3.3) ισχύει

$$x = \sum_{j=1}^m \lambda_j x_j - \frac{\lambda_k}{\mu_k} \left(\sum_{j=1}^m \mu_j x_j \right) = \sum_{j=1}^m \left(\lambda_j - \frac{\lambda_k}{\mu_k} \mu_j \right) x_j,$$

για κάθε k ώστε $\mu_k \neq 0$. Αλλά τώρα ο συντελεστής του x_k (για $j = k$) στο παραπάνω άθροισμα είναι μηδέν, δηλαδή στην πραγματικότητα αυτό το άθροισμα έχει το πολύ $m - 1$ όρους. Έτσι, θα οδηγηθούμε σε αντίφαση με την επιλογή του m αν αποδείξουμε ότι μπορούμε να επιλέξουμε k ώστε το παραπάνω άθροισμα να είναι κυρτός συνδυασμός. Λόγω της (3.2) φανερά $\sum_{j=1}^m (\lambda_j - (\lambda_k/\mu_k)\mu_j) = 1$. Άρα μένει να δειχθεί ότι μπορούμε να επιλέξουμε k ώστε $\lambda_j - (\lambda_k/\mu_k)\mu_j \geq 0$ για κάθε $j = 1, 2, \dots, m$.

Από τη (3.2) και αφού δεν είναι όλα τα μ_j ίσα με το μηδέν, κάποιο

από αυτά είναι θετικό. Σχηματίζουμε τους λόγους λ_j/μ_j για τα j ώστε $\mu_j > 0$ και επιλέγουμε τον μικρότερο λόγο. Έστω ότι είναι ο λ_k/μ_k . Ισχυριζόμαστε ότι

$$\lambda_j - \frac{\lambda_k}{\mu_k} \mu_j \geq 0,$$

για κάθε $j = 1, 2, \dots, m$. Πράγματι, αν $\mu_j \neq 0$ τότε είναι προφανές. Αν $\mu_j > 0$ τότε ισχύει από την επιλογή του λ_k/μ_k . \square

Πόρισμα 3.1.15. Αν A είναι συμπαγές υποσύνολο του \mathbb{R}^n , τότε η κυρτή θήκη του A είναι συμπαγές σύνολο.

Απόδειξη: Το σύνολο

$$B = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}, x_1, \dots, x_{n+1}) : \lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1, x_j \in A \right\},$$

είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^{(n+1)^2}$ οπότε είναι συμπαγές. Από το θεώρημα του Καραθεοδωρή συμπεραίνουμε ότι η συνεχής συνάρτηση

$$\Phi(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}, x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j x_j : B \rightarrow \text{conv}(A)$$

είναι επί. Άρα, το σύνολο $\Phi(B)$ είναι συμπαγές. Επομένως, η κυρτή θήκη του A είναι συμπαγές σύνολο. \square

Πρόταση 3.1.16. Αν το K είναι κυρτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n τότε:

- (i) Το \bar{K} είναι κυρτό σύνολο.
- (ii) Το $\text{int}K$ είναι κυρτό σύνολο.
- (iii) Αν $0 \in \text{int}(K)$ τότε για κάθε $\lambda \in (0, 1)$ ισχύει $\lambda K \subseteq \text{int}(K)$.
- (iv) Αν $\text{int}K \neq \emptyset$ τότε $\bar{K} = \overline{\text{int}K}$.

Απόδειξη:

- (i) Έστω ότι τα x, y ανήκουν στο \bar{K} και λ ανήκει στο $[0, 1]$. Θέλουμε να δείξουμε ότι το σημείο $(1 - \lambda)x + \lambda y$ ανήκει στο \bar{K} . Αφού τα x, y ανήκουν στο \bar{K} τότε θα υπάρχουν, μια ακολουθία x_m στο K ώστε $x_m \rightarrow x$ και μια ακολουθία y_m στο K ώστε $y_m \rightarrow y$. Οι x_m, y_m ανήκουν στο K και το K είναι κυρτό από την υπόθεση. Άρα, το

σημείο $(1-\lambda)x_m + \lambda y_m$ ανήκει στο K . Μένει να δείξουμε, λοιπόν, ότι $(1-\lambda)x_m + \lambda y_m \rightarrow (1-\lambda)x + \lambda y$. Γνωρίζουμε ότι $\|x_m - x\|_2 \rightarrow 0$ και $\|y_m - y\|_2 \rightarrow 0$ και θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\|((1-\lambda)x_m + \lambda y_m) - ((1-\lambda)x + \lambda y)\|_2 \rightarrow 0.$$

Έχουμε,

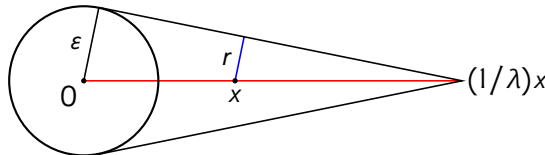
$$\begin{aligned} \|((1-\lambda)x_m + \lambda y_m) - ((1-\lambda)x + \lambda y)\|_2 &= \|(1-\lambda)(x_m - x) + \lambda(y_m - y)\|_2 \\ &\leq \|(1-\lambda)(x_m - x)\|_2 + \|\lambda(y_m - y)\|_2 \\ &= (1-\lambda)\|x_m - x\|_2 + \lambda\|y_m - y\|_2 \rightarrow (1-\lambda)0 + \lambda 0 = 0 \end{aligned}$$

- (ii) Αν $\text{int}K = \emptyset$, προφανώς είναι κυρτό. Αν $\text{int}K \neq \emptyset$, έστω ότι τα x, y ανήκουν στο $\text{int}(K)$. Θέλουμε να δείξουμε ότι το σημείο $(1-\lambda)x + \lambda y$ ανήκει στο $\text{int}(K)$. Το x ανήκει στο $\text{int}(K)$, άρα υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε $B(x, \delta_1) \subseteq K$. Το y ανήκει στο $\text{int}(K)$, άρα υπάρχει $\delta_2 > 0$ ώστε $B(y, \delta_2) \subseteq K$. Θέτουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ και ισχύει ότι τα σύνολα $B(x, \delta)$ και $B(y, \delta)$ είναι υποσύνολα του K . Αν δείξουμε ότι το $B((1-\lambda)x + \lambda y, \delta)$ είναι υποσύνολο του K τότε το σημείο $(1-\lambda)x + \lambda y$ θα ανήκει στο $\text{int}(K)$. Όμως (Άσκηση 3.1.1)

$$B((1-\lambda)x + \lambda y, \delta) = (1-\lambda)B(x, \delta) + \lambda B(y, \delta) \subseteq K,$$

αφού το K είναι κυρτό.

- (iii) Θεωρούμε ένα $\epsilon > 0$ ώστε $B_2^n(0, \epsilon) \subseteq \text{int}(K)$ και $x \in \lambda K$. Τότε $(1/\lambda)x \in K$ και άρα $\text{conv}(B_2^n(0, \epsilon), (1/\lambda)x) \subseteq K$, αφού το K είναι κυρτό. Εύκολα βλέπουμε (με όμοια τρίγωνα στο Σχήμα 3.6) ότι



ΣΧΗΜΑ 3.6: Το σύνολο $\text{conv}\{x, B_2^n(0, \epsilon)\}$. Το r είναι ίσο με $\epsilon(1-\lambda)$.

$$B_2^n(x, \epsilon(1-\lambda)) \subseteq \text{conv}(B_2^n(0, \epsilon), (1/\lambda)x) \subseteq K,$$

οπότε $x \in \text{int}(K)$.

- (iv) Αν $x \in \text{int}(K)$ τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(x, \delta) \subseteq K$, συνεπώς $B(0, \delta) \subseteq K - x$, δηλαδή $0 \in \text{int}(K - x)$. Άρα από το (iii) για κάθε $\lambda \in (0, 1)$ ισχύει $\lambda(K - x) \subseteq \text{int}(K - x)$. Ισοδύναμα, $\lambda K - \lambda x + x \subseteq \text{int}(K)$ και παίρνοντας θήκες $\lambda \bar{K} - \lambda x + x \subseteq \overline{\text{int}(K)}$. Τέλος, αφήνοντας το $\lambda \rightarrow 1^-$ παίρνουμε $\bar{K} \subseteq \overline{\text{int}(K)}$ ως εξής: Αν $z \in \bar{K}$ τότε για κάθε $\lambda \in (0, 1)$ ισχύει

$$\lambda z - \lambda x + x \in \lambda \bar{K} - \lambda x + x \subseteq \overline{\text{int}(K)}.$$

Οπότε $\lambda z - \lambda x + x \in \overline{\text{int}(K)}$ και τώρα αφήνουμε το λ να πάει στο 1 από αριστερά.

Ο αντίστροφος εγκλεισμός είναι προφανής, διότι $\text{int}K \subseteq K$ άρα $\overline{\text{int}K} \subseteq \bar{K}$. \square

Πρόταση 3.1.17. Έστω A φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R}^n . Τότε

$$\overline{\text{conv}(A)} = \text{conv}(\bar{A}).$$

Απόδειξη: Αφού $A \subseteq \text{conv}(A)$ συμπεραίνουμε ότι $\bar{A} \subseteq \overline{\text{conv}(A)}$. Το τελευταίο όμως σύνολο είναι κυρτό από την Πρόταση 3.1.16 (i), άρα $\text{conv}(\bar{A}) \subseteq \overline{\text{conv}(A)}$.

Αντιστρόφως, $A \subseteq \bar{A}$ οπότε $\text{conv}(A) \subseteq \text{conv}(\bar{A})$. Όμως το A είναι φραγμένο και άρα το \bar{A} είναι κλειστό και φραγμένο δηλαδή συμπαγές. Έτσι από το Πόρισμα 3.1.15 και το $\text{conv}(\bar{A})$ είναι συμπαγές, οπότε είναι και κλειστό. Άρα $\overline{\text{conv}(A)} \subseteq \text{conv}(\bar{A})$. \square

Η ισότητα στην παραπάνω πρόταση δεν ισχύει αν το σύνολο A δεν είναι φραγμένο. Αυτό μπορεί να ελεγχθεί εύκολα, για παράδειγμα με το σύνολο

$$A = \{(0, 0)\} \cup \{(x, y) : y = \frac{1}{x}, x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 3.1.1 Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει

$$\frac{1}{2}B(x, \epsilon) + \frac{1}{2}B(-x, \epsilon) = B(0, \epsilon),$$

και γενικότερα, για κάθε $\lambda \in [0, 1]$ και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$(1 - \lambda)B(x, \epsilon) + \lambda B(y, \epsilon) = B((1 - \lambda)x + \lambda y, \epsilon).$$

Άσκηση 3.1.2 Αποδείξτε ότι ένα υποσύνολο A του \mathbb{R}^n είναι κυρτό αν και μόνο αν για κάθε $\lambda \in (0, 1)$ ισχύει $(1 - \lambda)A + \lambda A = A$. Επίσης δώστε ένα παράδειγμα ενός μη κυρτού συνόλου F για το οποίο να υπάρχει $\lambda_0 \in (0, 1)$ ώστε $(1 - \lambda_0)F + \lambda_0 F = F$. (Υπόδειξη: Το σύνολο \mathbb{Q} δεν είναι κυρτό.)

Άσκηση 3.1.3 Έστω ότι ο T είναι ένας $n \times n$ πίνακας πραγματικών αριθμών και $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι

$$T\left(\text{conv}(\{x_1, \dots, x_k\})\right) = \text{conv}(\{Tx_1, \dots, Tx_n\}).$$

Γενικότερα, για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ισχύει $T(\text{conv}(A)) = \text{conv}(T(A))$.

Άσκηση 3.1.4 Αποδείξτε ότι κάθε ελλειψοειδής

$$\mathcal{E} = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n \frac{x_j^2}{a_j^2} \leq 1 \right\}$$

με μήκη ημιαξόνων τους θετικούς αριθμούς a_1, \dots, a_n είναι κυρτό σώμα.

Επίσης βρείτε ένα πίνακα $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ώστε $T(\mathcal{E}) = B_2^n$ και αποδείξτε ότι $\det T \neq 0$. Τέλος, αποδείξτε ότι κάθε ελλειψοειδής στον \mathbb{R}^n με κέντρο το 0 είναι εικόνα του B_2^n μέσω κατάλληλου πίνακα T όπου $\det T \neq 0$.

Άσκηση 3.1.5 Αποδείξτε ότι αν $K \subseteq \mathbb{R}^n$ τότε το σύνολο $\text{kernel}(K)$, όπου

$$\text{kernel}(K) = \{z \in \mathbb{R}^n : [z, x] \subseteq K \text{ για κάθε } x \in K\}$$

είναι κυρτό υποσύνολο του K . Επιπλέον, αν το K είναι κυρτό τότε $K = \text{kernel}(K)$.

Άσκηση 3.1.6 Έστω ότι το K είναι κυρτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n . Δείξτε ότι για κάθε $x \in \text{int}(K)$ και για κάθε $y \in \bar{K}$ ισχύει $[x, y] \subseteq \text{int}(K)$.

Άσκηση 3.1.7 Αποδείξτε ότι αν S είναι το simplex

$$\text{conv}(\{0, e_1, e_2, \dots, e_n\}),$$

όπου e_1, \dots, e_n είναι η συνήθης ορθοκανονική βάση του \mathbb{R}^n , τότε $\text{int}(S) \neq \emptyset$.

(Υπόδειξη: Δείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(x_0, \delta) \subseteq S$ όπου $x_0 = (2n)^{-1} \sum_{j=1}^n e_j$. Κάθε σημείο $y \in B(x_0, \delta)$ πρέπει να έχει όλες τις συντεταγμένες του μη αρνητικές, και επιπλέον το άθροισμα των συντεταγμένων του $\sum_{j=1}^n y_j$ να είναι μικρότερο ή ίσο από το 1. Αν συμβαίνουν αυτά τότε $y \in S$, αφού

$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n + \left(1 - \sum_{j=1}^n y_j\right) 0$$

και ο συνδυασμός αυτός είναι κυρτός.)

Άσκηση 3.1.8 Αποδείξτε ότι για κάθε simplex S στον \mathbb{R}^n που είναι κυρτή θήκη $n + 1$ σημείων σε γενική θέση είναι κυρτό σώμα.

Άσκηση 3.1.9 Για οποιαδήποτε σύνολα A, B υποσύνολα του \mathbb{R}^n δείξτε ότι

$$\text{conv}(A \cup B) = \bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} ((1 - \lambda)A + \lambda B).$$

Άσκηση 3.1.10 Αποδείξτε ότι αν το A είναι ανοικτό στον \mathbb{R}^n τότε και το $\text{conv}(A)$ είναι ανοικτό.

Άσκηση 3.1.11 Δείξτε ότι αν το U είναι ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n και $x \in U$ τότε υπάρχει simplex S ώστε $x \in \text{int}(S)$ και $S \subseteq U$.

Άσκηση 3.1.12 Αποδείξτε ότι για οποιαδήποτε υποσύνολα C, D του \mathbb{R}^n ισχύει

$$\text{conv}(C + D) = \text{conv}(C) + \text{conv}(D).$$

Άσκηση 3.1.13 Αποδείξτε ότι για οποιοδήποτε υποσύνολο C του \mathbb{R}^n ισχύει

$$\text{conv}(\text{int}(C)) = \text{int}(\text{conv}(C)).$$

3.2 ΝΟΡΜΕΣ ΚΑΙ ΚΥΡΤΑ ΣΩΜΑΤΑ

Θα δούμε τώρα ότι κάθε κεντρικά συμμετρικό, κυρτό σώμα μας δίνει την δυνατότητα να ορίσουμε μια νόρμα.

Ορισμός 3.2.1. Έστω ότι το K είναι ένα κυρτό, κεντρικά συμμετρικό σώμα στον \mathbb{R}^n . Το K επάγει στον \mathbb{R}^n μια νόρμα: για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ θέτουμε

$$\|x\|_K = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda K\}.$$

Ο ορισμός είναι καλός, δηλαδή $\{\lambda > 0 : x \in \lambda K\} \neq \emptyset$, διότι το K ως κυρτό και κεντρικά συμμετρικό σώμα περιέχει το 0 στο εσωτερικό του (Πρόταση 3.1.3). Δηλαδή υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $B(0, \epsilon) \subseteq K$. Συνεπώς για $\lambda = 2\|x\|_2/\epsilon$,

$$x \in B(0, \epsilon\lambda) = \lambda B(0, \epsilon) \subseteq \lambda K.$$

Η $\|x\|_K$ είναι νόρμα:

- (i) Φανερά, $\|x\|_K \geq 0$ για κάθε x στον \mathbb{R}^n . Αν $x = 0$ τότε $0 \in \lambda K$ για κάθε $\lambda > 0$, οπότε $\|0\|_K = 0$. Αν $\|x\|_K = 0$ τότε υπάρχει $\lambda_m > 0$ με $\lambda_m \rightarrow 0$ ώστε $x \in \lambda_m K$ συνεπώς $(x/\lambda_m) \in K$. Το K όμως είναι συμπαγές, άρα και φραγμένο. Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|x/\lambda_m\|_2 \leq M$, για κάθε $m \in \mathbb{N}$, οπότε $\|x\|_2 \leq M\lambda_m \rightarrow 0$. Συμπεραίνουμε ότι $x = 0$.

(ii) Αν $t = 0$ η $\|tx\|_K = |t| \cdot \|x\|_K$ είναι προφανής. Αν $t \neq 0$,

$$\|tx\|_K = \inf\{\lambda > 0 : tx \in \lambda K\} = \inf\left\{\lambda > 0 : x \in \frac{\lambda}{t}K\right\}$$

(θέτουμε $\mu = \lambda/|t|$)

$$= \inf\left\{\mu|t| > 0 : x \in \mu \frac{|t|}{t}K\right\}$$

($|t|/t = \pm 1$ και $-K = K$)

$$\begin{aligned} &= \inf\{\mu|t| > 0 : x \in \mu K\} \\ &= |t| \inf\{\mu > 0 : x \in \mu K\} = |t| \cdot \|x\|_K. \end{aligned}$$

(iii) Για κάθε $\epsilon > 0$ από τον ορισμό του infimum υπάρχει $\lambda_{\epsilon,x}$ ώστε $x \in \lambda_{\epsilon,x}K$ και $\|x\|_K + \epsilon > \lambda_{\epsilon,x}$. Ομοίως, υπάρχει $\lambda_{\epsilon,y} > 0$ ώστε $y \in \lambda_{\epsilon,y}K$ και $\lambda_{\epsilon,y} < \|y\|_K + \epsilon$. Επειδή

$$x + y \in \lambda_{\epsilon,x}K + \lambda_{\epsilon,y}K = (\lambda_{\epsilon,x} + \lambda_{\epsilon,y})K$$

θα έχουμε

$$\|x + y\|_K \leq \lambda_{\epsilon,x} + \lambda_{\epsilon,y} < \|x\|_K + \epsilon + \|y\|_K + \epsilon = \|x\|_K + \|y\|_K + 2\epsilon$$

για κάθε $\epsilon > 0$, οπότε $\|x + y\|_K \leq \|x\|_K + \|y\|_K$.

Έχοντας τώρα την νόρμα $\|\cdot\|_K$ που ορίστηκε από το κυρτό και κεντρικά συμμετρικό σώμα K θα μπορούσε κανείς να χρησιμοποιήσει τον Ορισμό 3.1.5 και να ορίσει έτσι ένα νέο κυρτό και κεντρικά συμμετρικό σώμα. Η παρακάτω πρόταση μάς λέει ότι αυτό το σώμα είναι το ίδιο το K .

Πρόταση 3.2.2. Έστω ότι το K είναι ένα κυρτό και κεντρικά συμμετρικό σώμα στον \mathbb{R}^n και $\|\cdot\|_K$ η επαγόμενη νόρμα. Τότε το σύνολο $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_K \leq 1\}$ είναι το ίδιο το K .

Απόδειξη: Ας θέσουμε $A = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_K \leq 1\}$. Θα δείξουμε ότι $A = K$. Αν $x \in K$ τότε

$$\|x\|_K = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda K\} \leq 1,$$

αφού ήδη $x \in 1 \cdot K$. Άρα $x \in A$ και δείξαμε ότι $K \subseteq A$.

Έστω τώρα ένα $x \in A$, δηλαδή $\|x\|_K \leq 1$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $\|(1 - 1/m)x\|_K \leq 1 - 1/m < 1$. Οπότε από τον ορισμό της $\|\cdot\|_K$ θα υπάρχει $\lambda \in (0, 1)$ ώστε $(1 - 1/m)x \in \lambda K$. Όμως $\lambda K \subseteq \text{int}(K) \subseteq K$ (από τις Προτάσεις 3.1.3 και 3.1.16 (iii)). Το K όμως είναι κλειστό υποσύνολο του \mathbb{R}^n οπότε θα περιέχει και το x , αφού αυτό είναι το όριο ως προς την ευκλείδεια νόρμα της ακολουθίας των $(1 - 1/m)x \in K$: $\|(1 - 1/m)x - x\|_2 = \|x\|_2/m \rightarrow 0$ καθώς $m \rightarrow \infty$. \square

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 3.2.1 Αν τα A και B είναι κυρτά συμμετρικά σώματα αποδείξτε ότι $\|x\|_A = \|x\|_B$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ αν και μόνο αν $A = B$.

Άσκηση 3.2.2 Αποδείξτε ότι αν \mathcal{E} είναι το ελλειψοειδές

$$\left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n \frac{x_j^2}{a_j^2} \leq 1 \right\},$$

τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\|x\|_{\mathcal{E}} = \left(\sum_{j=1}^n \frac{x_j^2}{a_j^2} \right)^{1/2}.$$

3.3 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΣΤΗΡΙΞΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.3.1 (Υπερεπίπεδο στήριξης). Έστω ότι το K είναι κλειστό και κυρτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n και H υπερεπίπεδο ($\dim H = n - 1$). Το H λέγεται υπερεπίπεδο στήριξης του κυρτού συνόλου K στο x_0 το οποίο ανήκει στο $\text{bd}(K)$ αν $x_0 \in H$ και το K περιέχεται ή στον ημίχωρο H^- ή στον H^+ .

Για την αποφυγή συγχύσεων θα θεωρούμε ότι $K \subseteq H_{x_0, u}^-$ επιλέγοντας κατάλληλα το $u \in \mathbb{S}^{n-1}$. Ισχύει λοιπόν ότι $\langle x, u \rangle \leq \langle x_0, u \rangle$ για κάθε $x \in K$.

Πρόταση 3.3.2. Έστω ότι το K είναι ένα κυρτό σώμα στο \mathbb{R}^n . Για κάθε $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ υπάρχει μοναδικό επίπεδο στήριξης H_u του K (σε κάποιο σημείο του $\text{bd}(K)$) κάθετο στο u .

Απόδειξη: Αφού το K είναι συμπαγές σύνολο και το εσωτερικό γινόμενο συνεχής συνάρτηση ως προς κάθε μεταβλητή του (Πρόταση 1.2.6), η συνάρτηση $\langle x, u \rangle$, για $x \in K$, έχει μέγιστη τιμή σε κάποιο σημείο $x_0 \in K$.

Παρατηρούμε ότι το x_0 είναι στοιχείο του συνόρου του K . Διότι αν όχι, είναι στο εσωτερικό του, οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $x_0 + \delta B_2^n \subseteq K$. Άρα

$$x_0 + \frac{\delta}{2}u \in x_0 + \delta B_2^n \subseteq K,$$

Αλλά

$$\left\langle x_0 + \frac{\delta}{2}u, u \right\rangle = \langle x_0, u \rangle + \frac{\delta}{2} > \langle x_0, u \rangle,$$

το οποίο είναι άτοπο από την επιλογή του x_0 .

Φανερά $K \subseteq H_{x_0, u}^-$ από την επιλογή του x_0 , οπότε το $H_{x_0, u}$ είναι επίπεδο στήριξης του K στο x_0 .

Τέλος, για τη μοναδικότητα, αν $H_{x_1, u}$ είναι ένα άλλο υπερεπίπεδο στήριξης κάθετο στο u που διέρχεται από το $x_1 \in K$ τότε $\langle x_1, u \rangle = \langle x_0, u \rangle$. Διότι αλλιώς, είτε $\langle x_1, u \rangle < \langle x_0, u \rangle$ οπότε $x_0 \notin H_{x_1, u}^- \supseteq K$ το οποίο είναι άτοπο, είτε $\langle x_1, u \rangle > \langle x_0, u \rangle$ οπότε $x_1 \notin H_{x_0, u}^- \supseteq K$ το οποίο είναι και πάλι άτοπο. Έτσι

$$\begin{aligned} H_{x_1, u} &= \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle = \langle x_1, u \rangle\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle = \langle x_0, u \rangle\} = H_{x_0, u}. \end{aligned} \quad \square$$

Η παραπάνω πρόταση μάς επιτρέπει να ορίσουμε μια συνάρτηση από το \mathbb{S}^{n-1} στο \mathbb{R} ως εξής:

Ορισμός 3.3.3. Έστω ότι το K είναι ένα κυρτό σώμα στον \mathbb{R}^n . Ορίζουμε τη συνάρτηση $h_K : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$h_K(u) = \sup\{\langle x, u \rangle : x \in K\},$$

η οποία σε κάθε διεύθυνση u δίνει την απόσταση του υπερεπιπέδου στήριξης H_u του K από το μηδέν ή αλλιώς το μέγεθος της μεγαλύτερης προβολής στοιχείου του K στη διεύθυνση του u (δείτε Σχήμα 3.7). Η h_K ονομάζεται συνάρτηση στήριξης του κυρτού σώματος K .

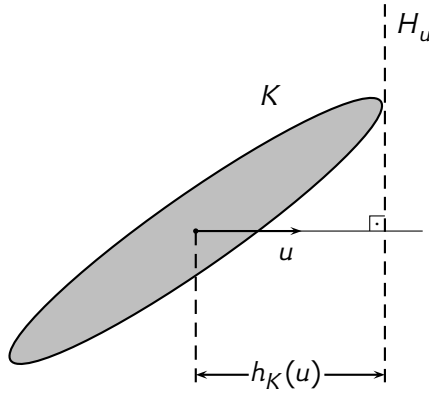
Πρόταση 3.3.4. Έστω ότι τα A και B είναι κυρτά σώματα στον \mathbb{R}^n . Για κάθε $\lambda > 0$ ισχύει

$$h_{A+B} = h_A + h_B$$

και

$$h_{\lambda A} = \lambda h_A,$$

όπου h_A, h_B είναι οι συναρτήσεις στήριξης του A και του B αντίστοιχα.



ΣΧΗΜΑ 3.7: Η συνάρτηση στήριξης στη διεύθυνση $u \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Απόδειξη: Έχουμε

$$\begin{aligned} h_{A+B}(u) &= \sup\{\langle a + b, u \rangle, a \in A, b \in B\} \\ &= \sup\{\langle a, u \rangle + \langle b, u \rangle, a \in A, b \in B\} \\ &= \sup\{\langle a, u \rangle, a \in A\} + \sup\{\langle b, u \rangle, b \in B\} \\ &= h_A(u) + h_B(u). \end{aligned}$$

Επίσης, για $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} h_{\lambda A}(u) &= \sup\{\langle \lambda a, u \rangle : a \in A\} \\ &= \lambda \sup\{\langle a, u \rangle : a \in A\} \\ &= \lambda h_A(u). \end{aligned}$$



Λήμμα 3.3.5. Αν τα A, B είναι κυρτά σώματα στον \mathbb{R}^n , τότε

$$A \subseteq B \text{ αν και μόνο αν } h_A(u) \leq h_B(u),$$

για κάθε u στο S^{n-1} .

Απόδειξη: (\Rightarrow) Επειδή το A είναι υποσύνολο του B ισχύει

$$h_A(u) \leq \sup_{x \in A} \langle x, u \rangle \leq \sup_{x \in B} \langle x, u \rangle = h_B(u).$$

(\Leftarrow) Αν το A δεν είναι υποσύνολο του B θεωρούμε ένα $x_0 \in A \setminus B$.

Η συνάρτηση $f(y) = \|x_0 - y\|_2$ είναι συνεχής στο B διότι

$$|f(y) - f(z)| = \left| \|x_0 - y\|_2 - \|x_0 - z\|_2 \right| \leq \|(x_0 - y) - (x_0 - z)\|_2 = \|y - z\|_2.$$

Το B όμως είναι συμπαγές σύνολο, συνεπώς η f έχει ελάχιστη τιμή στο B έστω στο σημείο $y_0 \in B$. Αφού $x_0 \notin B$ ισχύει $\|x_0 - y_0\|_2 \neq 0$, και μπορούμε να ορίσουμε το διάνυσμα $u = (x_0 - y_0) / \|x_0 - y_0\|_2$ το οποίο ανήκει στη μοναδιαία σφαίρα \mathbb{S}^{n-1} .

Ισχυρισμός: Για κάθε $y \in B$ ισχύει $\langle y, u \rangle \leq \langle y_0, u \rangle$.

[Απόδειξη του Ισχυρισμού: Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $y \in B$ ώστε $\langle y - y_0, u \rangle > 0$. Φανερά $y \neq y_0$ (αλλιώς η προηγούμενη ανισότητα δεν ισχύει). Το K είναι κυρτό και άρα θα περιέχει και το

$$(1 - \lambda)y_0 + \lambda y = y_0 + \lambda(y - y_0).$$

Έτσι, για κάθε $\lambda \in (0, 1)$ ισχύει

$$\begin{aligned} \|x_0 - (y_0 + \lambda(y - y_0))\|_2^2 &= \langle x_0 - y_0 - \lambda(y - y_0), x_0 - y_0 - \lambda(y - y_0) \rangle \\ &= \|x_0 - y_0\|_2^2 + \lambda^2 \|y - y_0\|_2^2 - 2\lambda \langle x_0 - y_0, y - y_0 \rangle \\ &= \|x_0 - y_0\|_2^2 + \lambda(\lambda \|y - y_0\|_2^2 - 2\langle x_0 - y_0, y - y_0 \rangle). \end{aligned}$$

Επειδή λοιπόν

$$\langle x_0 - y_0, y - y_0 \rangle = \langle \|x_0 - y_0\|_2 u, y - y_0 \rangle > 0,$$

για λ αρκετά κοντά στο 0 (συγκεκριμένα, αν $0 < \lambda < 2\langle x_0 - y_0, y - y_0 \rangle / \|y - y_0\|_2^2$) προκύπτει ότι

$$\|x_0 - (y_0 + \lambda(y - y_0))\|_2 < \|x_0 - y_0\|_2$$

το οποίο είναι άτοπο από την επιλογή του y_0 .]

Άρα, για κάθε $y \in B$, $\langle y, u \rangle \leq \langle y_0, u \rangle$. Οπότε,

$$(3.4) \quad h_B(u) = \sup_{y \in B} \langle y, u \rangle = \langle y_0, u \rangle,$$

αφού $y_0 \in B$. Από τον ορισμό του u εύκολα ελέγχουμε ότι $\langle y_0, u \rangle < \langle x_0, u \rangle$, και από την (3.4)

$$h_B(u) \leq \langle y_0, u \rangle < \langle x_0, u \rangle \leq \sup_{x \in A} \langle x, u \rangle = h_A(u),$$

το οποίο είναι άτοπο. Επομένως, $A \subseteq B$. □

Λήμμα 3.3.6. Για κάθε A, B, K κυρτά σώματα στον \mathbb{R}^n ισχύουν τα παρακάτω:

- (i) Αν $A + K = B + K$ τότε $A = B$.
- (ii) Αν $A + K \subseteq B + K$ τότε $A \subseteq B$.

Απόδειξη:

- (i) Η $A + K = B + K$ συνεπάγεται την $h_{A+K}(u) = h_{B+K}(u)$, για κάθε $u \in \mathbb{S}^{n-1}$. Άρα, $h_A(u) + h_K(u) = h_B(u) + h_K(u)$, οπότε $h_A(u) = h_B(u)$. Συνεπώς, $A = B$.
- (ii) Έχουμε, $h_{A+K}(u) \leq h_{B+K}(u)$, το οποίο συνεπάγεται ότι

$$h_A(u) + h_K(u) \leq h_B(u) + h_K(u)$$

συνεπώς $h_A(u) \leq h_B(u)$. Επομένως, $A \subseteq B$. □

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 3.3.1 Για οποιουδήποτε αριθμούς $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m$ με $m \geq n + 1$ θεωρήστε τα σημεία $x_j = x(t_j) := (t_j, t_j^2, t_j^3, \dots, t_j^n) \in \mathbb{R}^n$ πάνω στην «καμπύλη αδρανείας» $M := \{(t, t^2, t^3, \dots, t^n) : t > 0\}$ στον \mathbb{R}^n . Αποδείξτε ότι το πολύτοπο $C(m, n) = \text{conv}\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ (ονομάζεται *κυκλικό πολύτοπο*) έχει την ιδιότητα: αν s_1, s_2, \dots, s_k είναι οποιαδήποτε από τα t_1, t_2, \dots, t_m με $2k \leq n$ τότε υπάρχει υπερεπίπεδο στήριξης H του $C(m, n)$ ώστε

$$C(m, n) \cap H = \text{conv}\{x(s_1), x(s_2), \dots, x(s_k)\},$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} & \text{o κυρτός συνδυασμός οποιονδήποτε } k \text{ κορυφών} \\ & \text{του } C(m, n) \text{ είναι έδρα του διάστασης } k - 1, \end{aligned} \tag{*}$$

χρησιμοποιώντας την παρακάτω διαδικασία:

Θεωρήστε το πολυώνυμο

$$0 \leq p(t) = \prod_{i=1}^k (t - s_i)^2 = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \dots + \beta_{2k} t^{2k},$$

όπου οι συντελεστές του πολυωνύμου εξαρτώνται μόνο από τα s_1, \dots, s_k . Θεωρήστε το υπερεπίπεδο $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, b \rangle = -\beta_0\}$ όπου $b = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{2k}, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι οι κορυφές $x(s_i)$ ανήκουν στο H και όλες οι υπόλοιπες ανήκουν στον ίδιο γνήσιο ημίχωρο που ορίζει το H .

Παρατήρηση 3.3.7. Τα πολύτοπα που έχουν την ιδιότητα (*) ονομάζονται *k-neighborly πολύτοπα*. Παρατηρήστε ότι στο επίπεδο μόνο τα τρίγωνα είναι 2-neighborly, στον \mathbb{R}^3 μόνο οι τριγωνικές πυραμίδες (4 κορυφές) είναι 3-neighborly, και γενικότερα τα simplices στον \mathbb{R}^n είναι *n-neighborly*. Όμως για παράδειγμα στον \mathbb{R}^3 δεν είναι δυνατόν να σχεδιαστεί ένα 2-neighborly πολύτοπο όπως το παραπάνω με 5 ή περισσότερες κορυφές, αφού η συνθήκη $2k \leq n$ απαιτεί το πολύτοπο να βρίσκεται τουλάχιστον στον \mathbb{R}^4 . Αυτός είναι ο λόγος που δεν έχουμε σχήμα σε αυτή την άσκηση.

Άσκηση 3.3.2 Αποδείξτε ότι για κάθε κυρτό σώμα K στον \mathbb{R}^n , για κάθε $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ και για κάθε $n \times n$ πίνακα T ισχύει

$$h_{T(K)}(x) = h_K(T^t x).$$

Άσκηση 3.3.3 Αποδείξτε ότι αν \mathcal{E} είναι το ελλειψοειδές

$$\left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n \frac{x_j^2}{a_j^2} \leq 1 \right\},$$

τότε για κάθε $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$h_{\mathcal{E}}(u) = \left(\sum_{j=1}^n a_j^2 u_j^2 \right)^{1/2}.$$

3.4 ΤΟ ΠΟΛΙΚΟ ΣΩΜΑ

Ορισμός 3.4.1. Αν το K είναι ένα κυρτό σώμα που περιέχει το O στο εσωτερικό του, θέτουμε

$$K^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle \leq 1, \forall x \in K\}.$$

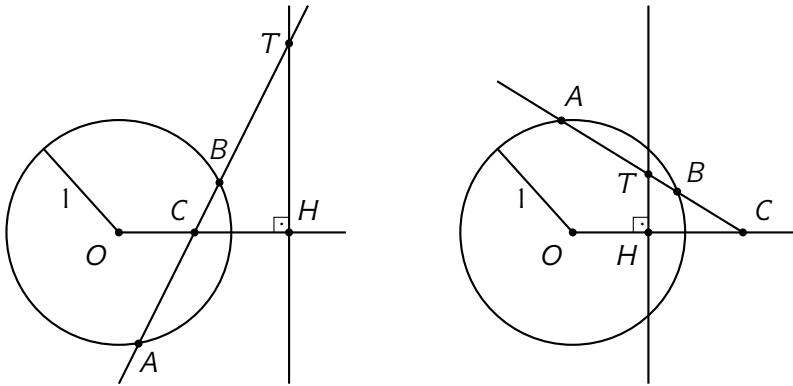
Το K° είναι κυρτό σώμα και ονομάζεται *πολικό σώμα του K* .

Πριν αποδείξουμε ότι το K° είναι πράγματι κυρτό σώμα αξίζει να κάνουμε την εξής (ιστορικού περιεχομένου) παρατήρηση.

Παρατήρηση 3.4.2. Η έννοια του πολικού σώματος προέρχεται από έννοιες της Ευκλείδειας γεωμετρίας οι οποίες μελετήθηκαν πρώτα από τον Απολλώνιο στο Βιβλίο III των κωνικών του. Για κάθε σημείο C στο επίπεδο, διαφορετικό της αρχής των αξόνων, και κάθε ευθεία από το C που τέμνει τον κύκλο κέντρου O και ακτίνας 1 στα σημεία A και B , ορίζουμε το σημείο T ώστε η τετράδα (A, B, C, T) να είναι αρμονική· δηλαδή να ισχύει

$$\frac{CB}{CA} = \frac{TB}{TA}.$$

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων T καθώς αλλάζει η ευθεία που



ΣΧΗΜΑ 3.8: Η πολική ευθεία TH του πόλου C όταν αυτός είναι μέσα ή έξω από τον κυκλικό δίσκο ακτίνας 1.

διέρχεται από το C , είναι μια ευθεία κάθετη στην ευθεία OC , και η οποία ονομάζεται «πολική ευθεία» του C ως προς τον κύκλο ακτίνας 1 και κέντρου O (Σχήμα 3.8). Το σημείο C ονομάζεται «πόλος» της πολικής ευθείας, και μπορεί να δείξει κανείς ότι αν H το σημείο τομής της πολικής ευθείας με την ευθεία OC τότε ισχύει

$$(3.5) \quad OC \cdot OH = 1.$$

(δείτε στο [ΕΓ], Ενότητα 4.9). Ο όρος «πόλος» χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον F. J. Servois το 1810 ενώ ο όρος «πολική ευθεία» προτάθηκε δύο χρόνια αργότερα από τον J. D. Gergonne. Ανάλογοι είναι οι ορισμοί για μεγαλύτερες διαστάσεις ορίζοντας τώρα τα πολικά υπερεπίπεδα ενός σημείου (διάφορου του O) στον χώρο. Μπορεί εύκολα να δείξει κανείς ότι η τομή των ημιχώρων που ορίζονται από τα πολικά υπερεπίπεδα των σημείων του συνόρου του K είναι το σώμα K° (Άσκηση 3.4.5) αλλά και αντίστροφα: η τομή των ημιχώρων που ορίζονται από τα πολικά υπερεπίπεδα των σημείων του συνόρου του K° είναι το σώμα K (Άσκηση 3.4.6). Οι τελευταίες δύο προτάσεις περιέχουν την πληροφορία ότι το K° είναι κυρτό σύνολο (ως τομή ημιχώρων) και το ότι $(K^\circ)^\circ = K$, ιδιότητες που θα δούμε και παρακάτω.

Αποδεικνύουμε τώρα ότι το πολικό ενός κυρτού σώματος K είναι κυρτό σώμα.

(i) Το K° είναι κυρτό σύνολο. Πράγματι, αν $y, z \in K^\circ$ και $\lambda \in [0, 1]$

για κάθε $x \in K$ ισχύει

$$\langle x, (1 - \lambda)y + \lambda z \rangle = (1 - \lambda)\langle x, y \rangle + \lambda\langle x, z \rangle \leq (1 - \lambda)1 + \lambda 1 = 1,$$

συνεπώς $(1 - \lambda)y + \lambda z \in K^\circ$.

(ii) Το K° είναι σώμα.

(α') Το $\text{int}K^\circ$ είναι διάφορο του κενού συνόλου. Πράγματι, παρατηρούμε πρώτα ότι το K είναι φραγμένο. Άρα, υπάρχει $M > 0$ ώστε το K να είναι υποσύνολο του $B_2^n(0, M)$. Ισχυριζόμαστε ότι,

$$(3.6) \quad B_2^n\left(0, \frac{1}{M}\right) \subseteq K^\circ.$$

Αν $y \in B_2^n(0, 1/M)$ τότε $\|y\|_2 \leq 1/M$. Θεωρούμε $x \in K$ οπότε $x \in B_2^n(0, M)$ δηλαδή $\|x\|_2 \leq M$. Άρα

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\|_2 \|y\|_2 \leq \frac{1}{M} M = 1.$$

Έτσι το y ανήκει στο K° επιβεβαιώνοντας την (3.6). Συμπεραίνουμε ότι το 0 ανήκει στο $\text{int}K^\circ$. Άρα το $\text{int}K^\circ$ είναι διάφορο του κενού συνόλου.

(β') Το K° είναι φραγμένο. Πράγματι, επειδή $0 \in \text{int}K$ υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε να ισχύει $B_2^n(0, \epsilon) \subseteq K$. Θα δείξουμε ότι $K^\circ \subseteq B_2^n(0, 1/\epsilon)$. Αν $y \in K^\circ \setminus \{0\}$ το σημείο $\epsilon y / \|y\|_2$ ανήκει στο $B_2^n(0, \epsilon)$ άρα και στο K . Οπότε θα πρέπει να ισχύει $\langle y, \epsilon y / \|y\|_2 \rangle \leq 1$ ισοδύναμα $\|y\|_2 \leq 1/\epsilon$.

(γ') Το K° είναι κλειστό. Πράγματι, έστω ότι $y_m \in K^\circ$ και $y_m \rightarrow y$ ως προς την ευκλείδεια νόρμα. Δηλαδή, $\|y_m - y\|_2 \rightarrow 0$. Για να δείξουμε ότι το y ανήκει στο K° αρκεί να δείξουμε ότι $\langle x, y \rangle \leq 1$ για κάθε $x \in K$. Όμως $\langle x, y_m \rangle \leq 1$ για κάθε $x \in K$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$, οπότε από τη συνέχεια του εσωτερικού γινομένου παίρνουμε ότι $\langle x, y \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle x, y_m \rangle \leq 1$. \square

Πρόταση 3.4.3. Αν το K είναι ένα κυρτό και κεντρικά συμμετρικό σώμα στον \mathbb{R}^n τότε και το K° είναι κυρτό και κεντρικά συμμετρικό σώμα.

Απόδειξη: Αν $y \in K^\circ$ αρκεί να δείξουμε ότι $-y \in K^\circ$. Όμως, για κάθε $x \in K$ ισχύει $-x \in K$, αφού το K είναι κεντρικά συμμετρικό. Άρα

$$\langle x, -y \rangle = \langle -x, y \rangle \leq 1. \quad \square$$

Παράδειγμα 3.4.4. Έστω ότι το \mathcal{E} είναι ένα ελλειψοειδές με κέντρο στο 0 και μήκη ημιαξόνων a_1, \dots, a_n . Αν χρησιμοποιήσουμε τις διευθύνσεις των ημιαξόνων του για το σύστημα συντεταγμένων τότε

$$\mathcal{E} = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n \frac{x_j^2}{a_j^2} \leq 1 \right\}.$$

Το πολικό του \mathcal{E}° είναι το ελλειψοειδές

$$\mathcal{E}^\circ = \left\{ (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n y_j^2 a_j^2 \leq 1 \right\},$$

με τους ίδιους άξονες με το \mathcal{E} και μήκη ημιαξόνων $a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1}$. Αυτό προκύπτει άμεσα από την ανισότητα Cauchy-Schwartz. Πράγματι αν \mathcal{E}' το παραπάνω ελλειψοειδές με μήκη ημιαξόνων $a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1}$, θα δείξουμε ότι $\mathcal{E}' = \mathcal{E}^\circ$. Αν $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{E}'$ και $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{E}$ τότε

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j = \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{a_j} a_j y_j \leq \left(\sum_{j=1}^n \frac{x_j^2}{a_j^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n a_j^2 y_j^2 \right)^{1/2} \leq 1.$$

Άρα $y \in \mathcal{E}^\circ$.

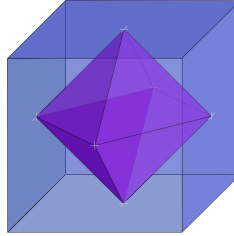
Αντίστροφα, αν $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{E}^\circ$ τότε $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j \leq 1$ για κάθε $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{E}$. Αν $y = 0$ προφανώς $y \in \mathcal{E}'$. Αν $y \neq 0$ τότε θεωρούμε το σημείο $x = (x_j)_{j=1}^n$ με

$$x_j = \frac{a_j^2 y_j}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 y_i^2}},$$

για $j = 1, \dots, n$. Εύκολα ελέγχουμε ότι $x \in \mathcal{E}$ άρα θα πρέπει $\langle x, y \rangle \leq 1$, η οποία με απλές πράξεις δίνει $\sum_{i=1}^n a_i^2 y_i^2 \leq 1$. Συνεπώς $y \in \mathcal{E}'$.

Παράδειγμα 3.4.5. Το πολικό του κυρτού σώματος B_1^n είναι το B_∞^n . Πράγματι, αν $y \in (B_1^n)^\circ$ τότε $\langle x, y \rangle \leq 1$ για κάθε $x \in B_1^n$. Επιλέγουμε j_0 ώστε $|y_{j_0}| = \max_{j=1, \dots, n} |y_j|$. Αν $|y_{j_0}| = 0$ τότε προφανώς $y = 0 \in B_\infty^n$. Αν $|y_{j_0}| \neq 0$ θεωρούμε το διάνυσμα x με συντεταγμένες $x_j = 0$ για κάθε $j \neq j_0$ και $x_{j_0} = y_{j_0} / |y_{j_0}|$. Εύκολα βλέπουμε ότι $x \in B_1^n$ οπότε αφού $y \in (B_1^n)^\circ$ θα πρέπει να ισχύει $\langle x, y \rangle \leq 1$. Αλλά $\langle x, y \rangle = |y_{j_0}|$ δηλαδή $\max_{j=1, \dots, n} |y_j| \leq 1$, από όπου συμπεραίνουμε ότι

$y \in B_\infty^n$. Δείξαμε λοιπόν ότι $(B_1^n)^\circ \subseteq B_\infty^n$. Αντιστρόφως, αν $y \in B_\infty^n$



ΣΧΗΜΑ 3.9: Το πολικό σώμα του B_1^n είναι το B_∞^n

τότε $\max_{j=1, \dots, n} |y_j| \leq 1$, όπου y_j για $j = 1, \dots, n$ οι συντεταγμένες του y . Αν θεωρήσουμε οποιοδήποτε $x \in B_1^n$ θα έχουμε

$$|\langle x, y \rangle| = \left| \sum_{j=1}^n x_j y_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| |y_j| \leq \left(\max_{j=1, \dots, n} |y_j| \right) \sum_{j=1}^n |x_j| \leq 1.$$

Άρα $\langle x, y \rangle \leq 1$ και συνεπώς $y \in (B_1^n)^\circ$.

Παρατήρηση 3.4.6. Στο προηγούμενο παράδειγμα παρατηρούμε ότι το πολικό του ενός πολυτόπου έχει έδρα στη διεύθυνση που το αρχικό πολυτόπο έχει κορυφή. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι αυτό είναι γενικό χαρακτηριστικό των πολυτόπων και των πολικών τους, και δεν ισχύει μόνο για την περίπτωση του B_1^n και του B_∞^n .

Η συνάρτηση στήριξης h_K ορίστηκε για διανύσματα στη μοναδιαία ευκλείδεια σφαίρα. Μπορούμε όμως να επεκτείνουμε τον ορισμό της σε όλο το \mathbb{R}^n αφού ο Ορισμός 3.3.3 είναι καλός και για διανύσματα που δεν έχουν μήκος ίσο με 1.

Ορισμός 3.4.7. Αν το K είναι ένα κυρτό σώμα στον \mathbb{R}^n επεκτείνουμε τον ορισμό της συνάρτησης στήριξης h_K του K σε κάθε σημείο y του \mathbb{R}^n , θέτοντας

$$h_K(y) = \sup\{\langle x, y \rangle : x \in K\}.$$

Παρατηρούμε ότι για $y \neq 0$ ισχύει $h_K(y) = \|y\|_2 h_K(y/\|y\|_2)$.

Από τον ορισμό του πολικού σώματος και τον ορισμό της συνάρτησης στήριξης, προκύπτει εύκολα ότι $K^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : h_K(x) \leq 1\}$. Αν το K είναι κεντρικά συμμετρικό, οπότε είναι και το K° , γνωρίζουμε

ήδη ότι $K^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_{K^\circ} \leq 1\}$ (Πρόταση 3.2.2). Στο φυσιολογικό ερώτημα ποια είναι η σχέση της h_K με την $\|\cdot\|_{K^\circ}$ για κεντρικά συμμετρικά, κυρτά σώματα απαντάει η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 3.4.8. Έστω K κυρτό και συμμετρικό ως προς το 0 σώμα στον \mathbb{R}^n . Τότε

$$h_K(y) = \|y\|_{K^\circ}.$$

Απόδειξη: Ισχύει

(3.7)

$$h_K(y) = \sup\{\langle y, x \rangle : x \in K\} = \|y\|_{K^\circ} \sup\left\{\left\langle \frac{y}{\|y\|_{K^\circ}}, x \right\rangle : x \in K\right\}.$$

Αρκεί να δείξουμε λοιπόν ότι το τελευταίο supremum ισούται με 1. Επειδή το $y/\|y\|_{K^\circ}$ έχει $\|\cdot\|_{K^\circ}$ -νόρμα ίση με 1, ανήκει στο K° . Συνεπώς $\langle y/\|y\|_{K^\circ}, x \rangle \leq 1$ για κάθε $x \in K$, οπότε το παραπάνω supremum είναι μικρότερο ή ίσο του 1. Αν είναι γνήσια μικρότερο το 1, θεωρούμε $\lambda > 1$ ώστε

$$\lambda \sup\left\{\left\langle \frac{y}{\|y\|_{K^\circ}}, x \right\rangle : x \in K\right\} < 1.$$

Έτσι

$$\sup\left\{\left\langle \frac{\lambda y}{\|y\|_{K^\circ}}, x \right\rangle : x \in K\right\} < 1,$$

οπότε $\lambda y/\|y\|_{K^\circ} \in K^\circ$. Αλλά

$$\left\|\frac{\lambda y}{\|y\|_{K^\circ}}\right\|_{K^\circ} = \lambda > 1$$

το οποίο είναι άτοπο (Πρόταση 3.2.2). ◻

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 3.4.1 Αποδείξτε με άμεσο τρόπο (χωρίς τη χρήση της απόδειξης του Παραδείγματος 3.4.4) ότι $(B_2^n)^\circ = B_2^n$ και για κάθε $r > 0$ ισχύει $(rB_2^n)^\circ = r^{-1}B_2^n$.

Άσκηση 3.4.2 Αν $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ αντιστρέψιμος πίνακας, και K κυρτό σώμα που περιέχει το 0 στο εσωτερικό του, αποδείξτε ότι και το $T(K)$ περιέχει το 0 στο εσωτερικό του και $(T(K))^\circ = (T^{-1})^{-1}(K^\circ)$.

Άσκηση 3.4.3 Αποδείξτε με τη χρήση παραγώγων ότι η παράσταση $\langle x, y \rangle$ για

$x \in \mathbb{R}^n$ με $\sum_{j=1}^n x_j^2/a_j^2 \leq 1$ και $y \neq 0$ μεγιστοποιείται για το x με συντεταγμένες

$$x_j = \frac{a_j^2 y_j}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 y_i^2}},$$

$j = 1, \dots, n$, όπου τα y_j είναι οι συντεταγμένες του y και τα a_j είναι θετικοί αριθμοί.

Άσκηση 3.4.4 Αποδείξτε ότι για κάθε $1 < p < \infty$ και $1 < q < \infty$ με $p^{-1} + q^{-1} = 1$ ισχύει $(B_p^n)^\circ = B_q^n$.

Άσκηση 3.4.5 Έστω ότι το K είναι ένα κυρτό σώμα που περιέχει το 0 στο εσωτερικό του.

- (i) Αν $x \in \text{bd}(K)$ αποδείξτε ότι το πολικό υπερεπίπεδο του x όπως ορίστηκε στην Παρατήρηση 3.4.2 είναι επίπεδο στήριξης του πολικού σώματος K° . (Υπόδειξη: παρατηρήστε ότι σύμφωνα με την (3.5) το πολικό υπερεπίπεδο του x είναι το $\{z \in \mathbb{R}^n : \langle z, x \rangle = 1\}$.)
- (ii) Αποδείξτε ότι κάθε υπερεπίπεδο στήριξης του K° έχει πόλο στο $\text{bd}(K)$ και έτσι το K° είναι η τομή των ημιχώρων που ορίζονται από τα πολικά υπερεπίπεδα στοιχείων του $\text{bd}(K)$.

Άσκηση 3.4.6 Έστω ότι το K είναι ένα κυρτό σώμα που περιέχει το 0 στο εσωτερικό του.

- (i) Αν $x \in \text{bd}(K^\circ)$ αποδείξτε ότι το πολικό υπερεπίπεδο του x όπως ορίστηκε στην Παρατήρηση 3.4.2 είναι επίπεδο στήριξης του σώματος K .
- (ii) Αποδείξτε ότι κάθε υπερεπίπεδο στήριξης του K έχει πόλο στο $\text{bd}(K^\circ)$ και έτσι το K είναι η τομή των ημιχώρων που ορίζονται από τα πολικά υπερεπίπεδα στοιχείων του $\text{bd}(K^\circ)$.

3.5 ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΓΝΗΣΙΟΣ ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΣ

Η Άσκηση 3.4.4 έχει ως συνέπεια το γεγονός ότι $((B_p^n)^\circ)^\circ = B_p^n$ για κάθε $0 < p < 1$. Στη συνέχεια θέλουμε να δείξουμε ότι αυτό ισχύει γενικά για κάθε κυρτό σώμα K που περιέχει το 0 στο εσωτερικό του, δηλαδή ισχύει $(K^\circ)^\circ = K$.

Ορισμός 3.5.1. Τα σύνολα K και D στον \mathbb{R}^n διαχωρίζονται από το υπερεπίπεδο $H_{u,\lambda}$ αν $K \subseteq H_{u,\lambda}^-$ και $D \subseteq H_{u,\lambda}^+$ ή $K \subseteq H_{u,\lambda}^+$ και $D \subseteq H_{u,\lambda}^-$.

Έτσι στην περίπτωση που $K \subseteq H_{u,\lambda}^-$ και $D \subseteq H_{u,\lambda}^+$ ισχύει $\langle x, u \rangle \leq \lambda$ για κάθε $x \in K$ και $\langle y, u \rangle \geq \lambda$ για κάθε $y \in D$.

Ορισμός 3.5.2. Τα K, D διαχωρίζονται γνήσια αν υπάρχει λωρίδα $\Lambda_{u,a,b}$ με $a < b$, ώστε $K \subseteq \Lambda_{u,a,b}^-$ και $D \subseteq \Lambda_{u,a,b}^+$ ή $K \subseteq \Lambda_{u,a,b}^+$ και $D \subseteq \Lambda_{u,a,b}^-$.

Στην περίπτωση λοιπόν που ισχύει $K \subseteq \Lambda_{u,a,b}^-$ και $D \subseteq \Lambda_{u,a,b}^+$ θα έχουμε

$$\langle x, u \rangle \leq a < b \leq \langle y, u \rangle,$$

για κάθε $x \in K$ και για κάθε $y \in D$.

Πρόταση 3.5.3. *Αν τα K και D είναι κυρτά υποσύνολα του \mathbb{R}^n , τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

- (i) Τα K και D διαχωρίζονται (αντίστοιχα διαχωρίζονται γνήσια).
- (ii) Το κυρτό σύνολο $K - D = \{c - d : c \in K, d \in D\}$ και το $\{0\}$ διαχωρίζονται (αντίστοιχα διαχωρίζονται γνήσια).

Απόδειξη: (i) \Rightarrow (ii): Το $K - D$ είναι κυρτό, διότι αν $c_1 - d_1, c_2 - d_2 \in K - D$ και $\lambda \in [0, 1]$, έχουμε

$$(1-\lambda)(c_1 - d_1) + \lambda(c_2 - d_2) = ((1-\lambda)c_1 + \lambda c_2) - ((1-\lambda)d_1 + \lambda d_2) \in K - D.$$

Έστω ότι $\Lambda_{u,\alpha,\beta} = \{x : \alpha \leq \langle u, x \rangle \leq \beta\}$, με $\alpha < \beta$, είναι η λωρίδα που διαχωρίζει γνήσια τα K και D . Ας υποθέσουμε ότι $K \subseteq \{x : \langle u, x \rangle \leq \alpha\}$ και $D \subseteq \{y : \langle u, y \rangle \geq \beta\}$. Τότε,

$$K - D \subseteq \{x - y : \langle u, x - y \rangle \leq \alpha - \beta\}.$$

Συνεπώς, αφού $\alpha - \beta < 0$, τα $K - D$ και $\{0\}$ διαχωρίζονται γνήσια από τη λωρίδα

$$\Lambda_{u,\alpha-\beta,0} = \{z : \alpha - \beta \leq \langle u, z \rangle \leq 0\}.$$

(ii) \Rightarrow (i): Έστω ότι η λωρίδα

$$\Lambda_{u,-\gamma,0} = \{z : -\gamma \leq \langle u, z \rangle \leq 0\},$$

με $\gamma > 0$, διαχωρίζει γνήσια το $K - D$ από το $\{0\}$. Άρα, αν $x \in K$ και $y \in D$, θα ισχύει $\langle u, x - y \rangle \leq -\gamma$ οπότε $\langle u, x \rangle + \gamma \leq \langle u, y \rangle$, για κάθε $x \in K$ και για κάθε $y \in D$. Αν θέσουμε $\alpha = \sup\{\langle u, x \rangle : x \in K\}$, ισχύει $\alpha + \gamma \leq \langle u, y \rangle$, για κάθε $y \in D$. Άρα, τα K και D διαχωρίζονται γνήσια από τη λωρίδα

$$\Lambda_{u,\alpha,\alpha+\gamma} = \{z : \alpha \leq \langle u, z \rangle \leq \alpha + \gamma\}. \quad \square$$

Θεώρημα 3.5.4. *Έστω ότι τα K, D είναι κυρτά υποσύνολα του \mathbb{R}^n . Αν το K είναι συμπαγές, το D κλειστό και $K \cap D = \emptyset$, τότε τα K, D διαχωρίζονται γνήσια.*

Απόδειξη: Από την Πρόταση 1.1.11 υπάρχουν $x_0 \in K$, $y_0 \in D$ ώστε

$$d(K, D) = \|x_0 - y_0\|_2 > 0.$$

Θέτουμε, $u = y_0 - x_0$ το οποίο είναι διαφορετικό του μηδενός. Ισχυριζόμαστε τώρα ότι η λωρίδα

$$\{x : \langle x_0, u \rangle \leq \langle x, u \rangle \leq \langle y_0, u \rangle\}$$

διαχωρίζει το K από το D . Πράγματι, αν $x \in K$ τότε

$$\langle x, u \rangle \leq \langle x_0, u \rangle \Leftrightarrow \langle x - x_0, u \rangle \leq 0 \Leftrightarrow \langle x - x_0, y_0 - x_0 \rangle \leq 0.$$

Εάν υποθέσουμε ότι αυτό είναι λάθος, τότε υπάρχει $x_1 \in K$ ώστε $\langle x_1 - x_0, y_0 - x_0 \rangle > 0$. Το $[x_0, x_1]$ είναι υποσύνολο του K , αφού το K είναι κυρτό, άρα

$$z_\lambda = x_0 + \lambda(x_1 - x_0) \in K, \text{ για κάθε } \lambda \in [0, 1].$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} \|y_0 - z_\lambda\|_2^2 &= \|(y_0 - x_0) - (z_\lambda - x_0)\|_2^2 \\ &= \langle (y_0 - x_0) - (z_\lambda - x_0), (y_0 - x_0) - (z_\lambda - x_0) \rangle \\ &= \|y_0 - x_0\|_2^2 + \|z_\lambda - x_0\|_2^2 - 2\langle y_0 - x_0, z_\lambda - x_0 \rangle \\ &= \|y_0 - x_0\|_2^2 + \lambda^2 \|x_1 - x_0\|_2^2 - 2\lambda \langle y_0 - x_0, x_1 - x_0 \rangle \\ &= \|y_0 - x_0\|_2^2 + \lambda(\lambda \|x_1 - x_0\|_2^2 - 2\langle y_0 - x_0, x_1 - x_0 \rangle) \\ &< \|y_0 - x_0\|_2^2 \end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο για $\lambda > 0$ αρκετά κοντά στο μηδέν, αφού η παρένθεση είναι αρνητική καθώς το λ πηγαίνει στο μηδέν από δεξιά. Ομοίως,

$$D \subseteq \{x : \langle u, x \rangle \geq \langle u, y_0 \rangle\}.$$



Δυο κυρτά σύνολα δεν διαχωρίζονται μόνο υπό τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 3.5.4. Αν είναι κυρτά και έχουν ξένα εσωτερικά τότε και πάλι διαχωρίζονται. Τα βήματα που απαιτούνται παρουσιάζονται στην Άσκηση 3.5.5.

Μια εφαρμογή του διαχωρισμού κυρτών συμπαγών συνόλων είναι ότι το πολικό του K° είναι το K .

Πρόταση 3.5.5. Για κάθε κυρτό σώμα K στον \mathbb{R}^n με $0 \in \text{int}(K)$ ισχύει ότι $(K^\circ)^\circ = K$.

Απόδειξη: Αν $x \in K$ τότε $\langle x, y \rangle \leq 1$ για κάθε $y \in K^\circ$. Αλλά αυτό συνεπάγεται (από τον ορισμό του $(K^\circ)^\circ$) ότι $x \in (K^\circ)^\circ$. Άρα $K \subseteq (K^\circ)^\circ$.

Αντίστροφα, έστω ότι $x \in (K^\circ)^\circ$. Πρέπει να δείξουμε ότι $x \in K$. Αν όχι τότε τα $\{x\}$ και K διαχωρίζονται γνησίως. Άρα υπάρχει $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ώστε

$$\langle z, u \rangle \leq 1 < \langle x, u \rangle,$$

για κάθε $z \in K$. Η ανισότητα στα αριστερά μας λέει ότι $u \in K^\circ$. Ως εκ τούτου, η ανισότητα στα δεξιά τώρα μας λέει ότι $x \notin (K^\circ)^\circ$, το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς $(K^\circ)^\circ \subseteq K$. \square

Πρόταση 3.5.6. Αν τα K και L είναι κυρτά σώματα με $0 \in \text{int}(K)$, $0 \in \text{int}(L)$ και $\lambda > 0$ ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

(i) $(\lambda K)^\circ = \frac{1}{\lambda} K^\circ$.

(ii) $K \subseteq L$ αν και μόνο αν $K^\circ \supseteq L^\circ$.

(iii) Για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ισχύει $(T(K))^\circ = (T^t)^{-1}(K^\circ)$.

Απόδειξη: (i) $y \in (\lambda K)^\circ$ αν και μόνο αν $\langle y, \lambda x \rangle \leq 1$ για κάθε $x \in K$. Ισοδύναμα $\langle \lambda y, x \rangle \leq 1$ και άρα $\lambda y \in K^\circ$ ισοδύναμα $y \in (1/\lambda)K^\circ$.

(ii) Έστω ότι $K \subseteq L$. Αν $y \in L^\circ$ τότε $\langle x, y \rangle \leq 1$ για κάθε $x \in L$. Αλλά $K \subseteq L$ άρα η $\langle x, y \rangle \leq 1$ για κάθε $x \in K$. Συνεπώς $y \in K^\circ$. Δείξαμε δηλαδή ότι $L^\circ \subseteq K^\circ$.

Αντιστρόφως, αν $L^\circ \subseteq K^\circ$ από το ευθύ συμπεραίνουμε ότι $(L^\circ)^\circ \supseteq (K^\circ)^\circ$. Η χρήση της Πρότασης 3.5.5 ολοκληρώνει την απόδειξη.

(iii) $y \in (T(K))^\circ$ αν και μόνο αν $\langle x, y \rangle \leq 1$ για κάθε $x \in T(K)$. Ισοδύναμα $\langle T(z), y \rangle \leq 1$ για κάθε $z \in K$. Αλλά

$$\langle T(z), y \rangle = (Tz)^t y = (z^t T^t) y = z^t (T^t y) = \langle z, T^t(y) \rangle.$$

Άρα $y \in (T(K))^\circ$ αν και μόνο αν $T^t(y) \in K^\circ$, ισοδύναμα $z \in (T^t)^{-1}(K^\circ)$. \square

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 3.5.1 Έστω ότι τα K, L είναι κεντρικά συμμετρικά, κυρτά σώματα στον

\mathbb{R}^n . Αποδείξτε ότι $\|x\|_K \leq M\|x\|_L$ αν και μόνο αν $K \supseteq M^{-1}L$ αν και μόνο αν $\|x\|_{K^\circ} \geq M^{-1}\|x\|_{L^\circ}$.

Άσκηση 3.5.2 Έστω ότι το K είναι κεντρικά συμμετρικό, κυρτό σώμα στον \mathbb{R}^n , και F υπόχωρος του \mathbb{R}^n διάστασης k , όπου $k = 1, \dots, n$. Αποδείξτε ότι ισχύει $(K \cap F)^\circ = P_F(K^\circ)$ όπου το πολικό $(K \cap F)^\circ$ εννοείται μέσα στον υπόχωρο F . (Υπόδειξη: Από την Πρόταση 3.5.5 αρκεί να δειχθεί ότι $K \cap F = (P_F(K^\circ))^\circ$.)

Άσκηση 3.5.3 Αποδείξτε ότι αν τα A και B είναι κυρτά σώματα που περιέχουν το 0 στο εσωτερικό τους τότε

$$(i) (A \cap B)^\circ = \overline{\text{conv}(A^\circ \cup B^\circ)}.$$

$$(ii) (A + B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ. \text{ Δώστε ένα παράδειγμα όπου δεν ισχύει η ισότητα.}$$

Άσκηση 3.5.4 Αν το K είναι ένα κυρτό σώμα που περιέχει το 0 στο εσωτερικό του, αποδείξτε ότι για κάθε $t > 0$ ισχύει $(tK) \cap (t^{-1}K^\circ) \subseteq B_2^n$ και $B_2^n \subseteq tK + t^{-1}K^\circ$.

Άσκηση 3.5.5 Έστω ότι τα κυρτά σύνολα K και D έχουν ξένα εσωτερικά. Αποδείξτε ότι τα K και D διαχωρίζονται ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα.

(i) Αποδείξτε ότι αν το K είναι κυρτό σύνολο και $x \in \text{bd}(K)$ τότε υπάρχει υπερεπίπεδο στήριξης του K στο x . (Υπόδειξη: Θεωρήστε ακολουθία $y_m \notin \bar{K}$ ώστε $y_m \rightarrow x$. Διαχωρίστε τα $\{y_m\}$ και \bar{K} με υπερεπίπεδα κάθετα στα μοναδιαία u_m σύμφωνα με το Θεώρημα 3.5.4 και περάστε σε συγκλίνουσα υπακολουθία της u_m .)

(ii) Θεωρήστε το σύνολο $E = \text{int}(K) - \text{int}(D)$. Φανερά $0 \notin E$. Δείξτε ότι το E είναι ανοικτό σύνολο. Έτσι είτε $0 \notin \bar{E}$ είτε $0 \in \partial E$. Στην πρώτη περίπτωση εφαρμόστε το Θεώρημα 3.5.4 και την Πρόταση 3.5.3, ενώ στη δεύτερη περίπτωση χρησιμοποιήστε το (i).

Άσκηση 3.5.6 Αποδείξτε ότι το σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι κυρτό αν και μόνο αν

$$K = \bigcap \{H^- : H \text{ υπερεπίπεδο στήριξης του } K\},$$

όπου με H^- συμβολίζουμε τον ημίχωρο που σχηματίζει το υπερεπίπεδο H ο οποίος περιέχει το K .

Άσκηση 3.5.7 Αποδείξτε ότι αν τα x και y δεν ανήκουν στο $\text{conv}(C)$ τότε

$$\text{conv}(C \cup \{x\}) = \text{conv}(C \cup \{y\})$$

αν και μόνο αν $x = y$.

Άσκηση 3.5.8 Το y λέγεται βαρύκεντρο του κυρτού σώματος K , και γράφουμε $y = \text{bar}(K)$, αν $y = \int_K x \, dx$, δηλαδή αν $y = (y_1, \dots, y_n)$ και

$$y_j = \int_K x_j \, dx = \int_K \langle x, e_j \rangle \, dx,$$

όπου $(e_j)_{j=1}^n$ η συνήθης βάση του \mathbb{R}^n . Αποδείξτε ότι

(i) Το y είναι το βαρύκεντρο του K αν και μόνο αν

$$\langle z, y \rangle = \int_K \langle z, x \rangle dx$$

για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$.

(ii) $\text{bar}(K - \text{bar}(K)) = 0$.

(iii) Το βαρύκεντρο κυρτών σωμάτων ανήκει στο εσωτερικό τους: $\text{bar}(K) \in \text{int}(K)$.

(iv) $(K - \text{bar}(K))^{\circ\circ} = K - \text{bar}(K)$.

4.1 ΟΓΚΟΣ ΚΥΡΤΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1.1 (Όγκος Παραλληλεπιπέδου). Ορίζουμε τον όγκο $\text{vol}_n(B)$ ενός παραλληλεπιπέδου B στον \mathbb{R}^n να είναι το γινόμενο n «ανεξάρτητων» ακμών, δηλαδή αν $B = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ (ως προς κατάλληλη ορθοκανονική βάση) τότε

$$\text{vol}_n(B) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j).$$

Όταν η διάσταση εννοείται, τότε γράφουμε $\text{vol}(B)$ ή και $|B|$.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε τον όγκο ενός πολυπαραλληλεπιπέδου, δηλαδή ενός συνόλου που είναι ένωση πεπερασμένου πλήθους παραλληλεπιπέδων με παράλληλες μεταξύ τους ακμές και ξένα εσωτερικά, να είναι το άθροισμα των όγκων των παραλληλεπιπέδων.

Ορισμός 4.1.2. Αν $A = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k$ με B_j παραλληλεπίπεδα και

$$\text{int}(B_j) \cap \text{int}(B_i) = \emptyset$$

για i διαφορετικό του j , τότε ορίζουμε τον όγκο του A να είναι

$$\text{vol}_n(A) = \sum_{j=1}^n \text{vol}_n(B_j).$$

Παρατήρηση 4.1.3. Ο ορισμός αυτός αποδεικνύεται εύκολα ότι είναι καλός. Δηλαδή αν ένα πολυπαραλληλεπίπεδο γράφεται ως πεπερασμένη ένωση παραλληλεπιπέδων με ξένα εσωτερικά με δύο τρόπους τότε και οι δύο τρόποι δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα. Για να γίνει σαφές αυτό που περιγράφουμε εδώ, σκεφτείτε ότι το $[0, 1] \times [0, 1]$ γράφεται και ως

$$([0, 1/2] \times [0, 1]) \cup ([1/2, 1] \times [0, 1])$$

αλλά και ως

$$([0, 1/2] \times [0, 1/2]) \cup ([1/2, 1] \times [0, 1/2]) \cup ([0, 1] \times [1/2, 1]).$$

Το να είναι καλός ο παραπάνω ορισμός σημαίνει ότι και οι δύο γραφές πρέπει να δίνουν το ίδιο εμβαδόν. Και πράγματι αυτό συμβαίνει. Τα βήματα για την απόδειξη ότι ο ορισμός είναι καλός περιγράφονται στην Άσκηση 4.1.1.

Παρατήρηση 4.1.4. Τόσο ο όγκος παραλληλεπιπέδου όσο και ο όγκος πολυπαραλληλεπιπέδου ικανοποιούν προφανώς τις ιδιότητες

$$\text{vol}_n(x + B) = \text{vol}_n(B) \text{ και } \text{vol}_n(\lambda B) = \lambda^n \text{vol}_n(B),$$

για κάθε παραλληλεπίπεδο ή πολυπαραλληλεπίπεδο B , για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε $\lambda > 0$.

Τέλος, σταθεροποιούμε ένα σύστημα αξόνων και ορίζουμε τον όγκο ενός κυρτού σώματος K ως εξής:

Ορισμός 4.1.5. Το σύνολο K , υποσύνολο του \mathbb{R}^n , λέγεται Jordan μετρήσιμο αν

$$\sup\{\text{vol}_n(A) : A \subseteq K\} = \inf\{\text{vol}_n(B) : B \supseteq K\}.$$

όπου τα A και B είναι πολυπαραλληλεπίπεδα.

Αν αυτό συμβαίνει τότε την κοινή τιμή την ονομάζουμε όγκο του κυρτού σώματος K και τη συμβολίζουμε με $\text{vol}_n(K)$ ή αν δεν υπάρχει ασάφεια για τη διάσταση του χώρου, με $\text{vol}(K)$ ή $|K|$.

Παρατήρηση 4.1.6. Θα δούμε παρακάτω ότι ο ορισμός αυτός είναι ανεξάρτητος του συστήματος αξόνων που σταθεροποιήσαμε (δείτε Πρόταση 4.1.9 (v)).

Παρατήρηση 4.1.7. Αν θέσουμε $\chi_K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με $\chi_K(x) = 1$ αν $x \in K$ και $\chi_K(x) = 0$ αν $x \notin K$ τότε εύκολα βλέπουμε ότι το K είναι Jordan μετρήσιμο αν και μόνο αν η χ_K είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο \mathbb{R}^n , και σε αυτή την περίπτωση

$$\text{vol}(K) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \chi_K((x_1, \dots, x_n)) dx_1 \dots dx_n.$$

Ο Ορισμός 4.1.5 μπορεί να δοθεί για κάθε υποσύνολο K του \mathbb{R}^n . Υπάρχουν όμως και σύνολα για τα οποία η παραπάνω ισότητα δεν ισχύει. Τότε λέμε ότι το K δεν έχει όγκο. Αλλά αν το K είναι κυρτό σώμα τότε είναι πάντα Jordan μετρήσιμο, δηλαδή έχει όγκο.

Θεώρημα 4.1.8. Αν το K είναι κυρτό σώμα στον \mathbb{R}^n τότε το K είναι Jordan μετρήσιμο.

Απόδειξη: Αποδεικνύουμε πρώτα τον ακόλουθο ισχυρισμό.

Ισχυρισμός: Αν το K είναι υποσύνολο του U , όπου U είναι ανοιχτό σύνολο, τότε υπάρχει πολυπαραλληλεπίπεδο A ώστε να ισχύει $K \subseteq A \subseteq U$.

[*Απόδειξη του ισχυρισμού:* Θέτουμε $\rho = d(K, \mathbb{R}^n \setminus U)$, οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 1.1.11 ισχύει $\rho > 0$. Επίσης θέτουμε

$$B_0 = \left[\frac{-\rho}{4\sqrt{n}}, \frac{\rho}{4\sqrt{n}} \right]^n.$$

Το B_0 είναι ένας κύβος στον \mathbb{R}^n με κέντρο το 0 και

$$\text{diam} B_0 = 2\sqrt{n} \frac{\rho}{4\sqrt{n}} = \frac{\rho}{2} < \rho.$$

Αν το x ανήκει στο K , τότε

$$(4.1) \quad x + B_0 \subseteq U,$$

όπου το $x + B_0$ είναι κύβος με κέντρο το x . Η (4.1) ισχύει διότι το B_0 δεν επιτρέπει μεγάλες μεταβολές της νόρμας. Οι μεταβολές της νόρμας μέσα στο $x + B_0$ είναι πάντα μικρότερες του ρ , διότι η διάμετρος του κύβου είναι μικρότερη του ρ . Το x είναι το κέντρο του κύβου, άρα το x ανήκει στο $\text{int}(x + B_0)$. Οπότε κάθε σημείο x του K καλύπτεται με έναν κύβο κέντρου x . Έτσι

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} \text{int}(x + B_0).$$

Το K είναι συμπαγές, άρα έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Δηλαδή, υπάρχουν x_1, \dots, x_n στο K ώστε

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^N \text{int}(x_i + B_0) \subseteq \bigcup_{i=1}^N (x_i + B_0) \text{ συνεπώς } K \subseteq A \subseteq U,$$

με $A = \bigcup_{i=1}^N (x_i + B_0)$ πολυπαραλληλεπίπεδο.]

Το K είναι σώμα, άρα το $\text{int}(K)$ δεν είναι κενό. Αν $x \in \text{int}(K)$ θέτουμε $\tilde{K} = K - x$ οπότε $0 \in \text{int}(\tilde{K})$. Θα δείξουμε ότι το \tilde{K} είναι Jordan μετρήσιμο. Έστω ένα $\epsilon > 0$. Θεωρούμε το σύνολο $(1 - \epsilon)\tilde{K}$. Από την Πρόταση 3.1.16(iii) ισχύει $(1 - \epsilon)\tilde{K} \subseteq \text{int}(\tilde{K})$. Άρα, από τον ισχυρισμό, υπάρχει πολυπαραλληλεπίπεδο A_0 ώστε $(1 - \epsilon)\tilde{K} \subseteq A_0 \subseteq \text{int}\tilde{K} \subseteq \tilde{K}$, και άρα

$$A_0 \subseteq \tilde{K} \subseteq \frac{1}{1 - \epsilon} A_0.$$

Συμπεπώς

$$A_0 + x \subseteq K \subseteq x + \frac{1}{1-\epsilon} A_0.$$

Έτσι με τα A και B να συμβολίζουν πολυπαραλληλεπίπεδα έχουμε

$$\begin{aligned} \text{vol}(x + A_0) &= \text{vol}(A_0) \leq \sup\{\text{vol}(A), A \subseteq K\} \leq \inf\{\text{vol}(B), B \supseteq K\} \\ &\leq \text{vol}\left(x + \frac{1}{1-\epsilon} A_0\right) = \text{vol}\left(\frac{1}{1-\epsilon} A_0\right) \\ &= \left(\frac{1}{1-\epsilon}\right)^n \text{vol}(A_0). \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε ότι

(4.2)

$$0 \leq \inf\{\text{vol}(B), B \supseteq K\} - \sup\{\text{vol}(A), A \subseteq K\} \leq \left(\left(\frac{1}{1-\epsilon}\right)^n - 1\right) \text{vol}(A_0).$$

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη πρέπει να αφήσουμε το ϵ να πάει στο μηδέν. Αλλά πρέπει να ξεπεράσουμε πρώτα το πρόβλημα ότι το A_0 εξαρτάται από το ϵ . Για να το κάνουμε αυτό παρατηρούμε ότι $A_0 \subseteq \tilde{K}$ και το \tilde{K} , ως κυρτό σώμα, είναι φραγμένο. Οπότε υπάρχει κύβος Q με μήκος ακμής, έστω, $M > 0$ ώστε $\tilde{K} \subseteq Q$. Άρα $A_0 \subseteq Q$ και από τον ορισμό του όγκου για τα πολυπαραλληλεπίπεδα $\text{vol}(A_0) \leq \text{vol}(Q) = M^n$. Έτσι η (4.2) γίνεται

$$0 \leq \inf\{\text{vol}(B), B \supseteq K\} - \sup\{\text{vol}(A), A \subseteq K\} \leq \left(\left(\frac{1}{1-\epsilon}\right)^n - 1\right) M^n.$$

Αφήνοντας το ϵ να πάει στο μηδέν από δεξιά ολοκληρώνεται η απόδειξη. \square

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 4.1.1 Αποδείξτε ότι ο Ορισμός 4.1.2 είναι καλός ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα.

- (i) Υποθέστε ότι το πολυπαραλληλεπίπεδο A γράφεται ως πεπερασμένη ένωση των παραλληλεπιπέδων B_i με ξένα εσωτερικά για $i = 1, \dots, k$ και πεπερασμένη ένωση των παραλληλεπιπέδων C_j με ξένα εσωτερικά για $j = 1, \dots, m$.

- (ii) Αποδείξτε ότι $\sum_{i=1}^k \text{vol}(B_i) = \sum_{j=1}^m \text{vol}(C_j)$ εξηγώντας πρώτα γιατί $B_i = \cup_{j=1}^m (B_i \cap C_j)$ με τα $B_i \cap C_j$ να έχουν ξένα εσωτερικά.

4.1.1 Ιδιότητες Όγκου

Οι ιδιότητες του όγκου που παρουσιάζονται στις παρακάτω προτάσεις μπορούν να αποδειχθούν τόσο με τον ορισμό του όγκου μέσω πολυπαραλληλεπιπέδων όσο και με τη βοήθεια του ολοκληρώματος Riemann των χαρακτηριστικών συναρτήσεων (Παρατήρηση 4.1.7).

Πρόταση 4.1.9. Για σύνολα που έχουν όγκο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- (i) Αν $K_1 \subseteq K_2$ τότε $\text{vol}(K_1) \leq \text{vol}(K_2)$.
- (ii) Αν $K \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, τότε $\text{vol}_n(K) = 0$.
- (iii) $\text{vol}(\lambda K) = \lambda^n \text{vol}(K)$.
- (iv) $\text{vol}(K + t) = \text{vol}(K)$.
- (v) Αν $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ πίνακας με $T^t T = I$ τότε $\text{vol}(T(K)) = \text{vol}(K)$.

Απόδειξη: Αποδεικνύουμε μόνο το (v).

Το (v) ισχύει αν K παραλληλεπίπεδο: θεωρούμε το

$$B = [0, \alpha_1] \times \cdots \times [0, \alpha_n] = \left\{ \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j, 0 \leq \lambda_j \leq \alpha_j \right\}.$$

Έχουμε,

$$T(B) = \left\{ T \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \right), 0 \leq \lambda_j \leq \alpha_j \right\} = \left\{ \sum_{j=1}^n \lambda_j (Te_j), 0 \leq \lambda_j \leq \alpha_j \right\}.$$

Αλλά,

$$\|Te_j\|_2^2 = \langle Te_j, Te_j \rangle = (Te_j)^t Te_j = e_j^t T^t Te_j = e_j^t e_j = \langle e_j, e_j \rangle = 1.$$

Άρα, το μήκος του διανύσματος Te_j είναι 1.

$$\langle Te_i, Te_j \rangle = (Te_i)^t Te_j = e_i^t (T^t T) e_j = e_i^t e_j = \langle e_i, e_j \rangle = 0,$$

διότι το i είναι διαφορετικό του j . Άρα, τα Te_j είναι ορθοκανονικά διανύσματα. Συνεπώς, το $T(B)$ είναι παραλληλεπίπεδο με μήκη ακμών

πάλι τα $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Άρα,

$$\text{vol}(T(B)) = \alpha_1 \dots \alpha_n = \text{vol}(B).$$

Για πολυπαραλληλεπίπεδα ισχύει, αφού αυτά είναι ένωση παραλληλεπιπέδων και για το γενικό σώμα παίρνουμε supremum ως προς όλα τα πολυπαραλληλεπίπεδα μέσα σε αυτό. \square

Η ακόλουθη πρόταση μάς λέει πώς συμπεριφέρεται ο όγκος όταν εφαρμόζουμε στο σώμα K έναν αντιστρέψιμο πίνακα.

Πρόταση 4.1.10. Αν ο $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι αντιστρέψιμος πίνακας τότε $\text{vol}(T(K)) = |\det T| \text{vol}(K)$.

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει εύκολα αν καταφύγουμε στο θεώρημα αλλαγής μεταβλητών του απειροστικού λογισμού. Αν για $x \in T(K)$ θέσουμε $y = T^{-1}(x) \in K$ τότε η Ιακωβιανή αυτής της αλλαγής μεταβλητών είναι η $\det T$. Επίσης $\chi_{T(K)} = 1$ αν και μόνο αν $\chi_K(T^{-1}(x)) = 1$. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} \text{vol}(T(K)) &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{T(K)}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(T^{-1}(x)) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(y) |\det T| dy = |\det T| \text{vol}(K). \end{aligned} \quad \square$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 4.1.1 Αποδείξτε με τη βοήθεια του ολοκληρώματος Riemann ότι αν το σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}^n$ έχει όγκο, τότε $\text{vol}(\lambda K) = \lambda^n \text{vol}(K)$ και $\text{vol}(K + t) = \text{vol}(K)$ για κάθε $\lambda > 0$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}^n$.

Άσκηση 4.1.2 Θέτουμε $s(K) = \text{vol}(K) \text{vol}(K^\circ)$. Αποδείξτε ότι για κάθε κυρτό σώμα K με το 0 στο εσωτερικό του και για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ισχύει $s(T(K)) = s(K)$.

Άσκηση 4.1.3 Αποδείξτε, χρησιμοποιώντας το θεώρημα αλλαγής μεταβλητών του Απειροστικού Λογισμού, ότι αν $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ πίνακας με $T^t T = I$ τότε

$$\text{vol}(T(K)) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{T(K)}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(x) dx = \text{vol}(K).$$

Άσκηση 4.1.4 [Όγκος του simplex] Θεωρούμε n γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα x_1, x_2, \dots, x_n στον \mathbb{R}^n , θέτουμε $x_0 = 0$, $a_1 = \|x_1\|_2$, και για κάθε

$k = 2, \dots, n$ θέτουμε a_k την απόσταση του x_k από το $\text{span}\{x_1, \dots, x_{k-1}\}$ και $S_n = \text{conv}\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Αποδείξτε με επαγωγή στο n ότι

$$\text{vol}(S_n) = \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n a_k.$$

Άσκηση 4.1.5 Έστω ότι τα K και L είναι δυο κυρτά σώματα στον \mathbb{R}^n με το L κεντρικά συμμετρικό. Θεωρούμε ένα υποσύνολο \mathcal{N} του K με την ιδιότητα για κάθε $x, y \in \mathcal{N}$ με $x \neq y$ ισχύει $\|x - y\|_L \geq 1$. Αποδείξτε ότι το \mathcal{N} είναι αναγκαστικά πεπερασμένο και η πληθικότητά του είναι μικρότερη ή ίση του πηλίκου

$$\frac{\text{vol}(K + 2^{-1}L)}{\text{vol}(2^{-1}L)}.$$

(Υπόδειξη: Δείξτε ότι τα $x + 2^{-1}L$, για $x \in \mathcal{N}$, έχουν ξένα εσωτερικά.)

Άσκηση 4.1.6 Έστω ότι τα K και L είναι κυρτά σώματα στον \mathbb{R}^n . Ορίζουμε τον αριθμό κάλυψης $N(K, L)$ του K από το L να είναι ο

$$N(K, L) = \min \left\{ N \in \mathbb{N} : \text{υπάρχουν } x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^n \text{ ώστε } K \subseteq \bigcup_{j=1}^N (x_j + L) \right\}.$$

Αποδείξτε τις ακόλουθες ιδιότητες:

- (i) $\text{vol}(K) \leq N(K, L)\text{vol}(L)$. Επιπλέον για κάθε κυρτό σώμα T ισχύει $\text{vol}(K + T) \leq N(K, L)\text{vol}(L + T)$.
- (ii) $\frac{\text{vol}(K + L)}{\text{vol}(L)} \leq 2^n N(K, L)$.
- (iii) Αν το L είναι κεντρικά συμμετρικό τότε

$$N(K, L) \leq \frac{\text{vol}(K + 2^{-1}L)}{\text{vol}(2^{-1}L)} \leq 2^n \frac{\text{vol}(K + L)}{\text{vol}(L)}.$$

(Υπόδειξη: Εξηγήστε πρώτα με βάση την Άσκηση 4.1.5 γιατί μπορείτε να θεωρήσετε ένα μεγιστικής πληθικότητας υποσύνολο \mathcal{N} του K με την ιδιότητα που περιγράφεται σε εκείνη άσκηση.)

- (iv) Αν το L είναι κεντρικά συμμετρικό και $\text{vol}(K) = \text{vol}(L)$ τότε $N(K, L)^{1/n} \leq 4N(L, K)^{1/n}$.

4.2 Ο ΟΓΚΟΣ ΤΟΥ B_p^n ΓΙΑ $1 \leq p \leq \infty$

Φανερά το σύνολο B_∞^n είναι ένα παραλληλεπίπεδο με μήκος κάθε ακμής του ίσο με 2. Συνεπώς ο όγκος του είναι 2^n .

Θα υπολογίσουμε τώρα τον όγκο του B_p^n για $1 \leq p < \infty$. Θεωρούμε

το ολοκλήρωμα

$$I_p = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\|x\|_p^p) dx = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp(-|t|^p) dt \right)^n.$$

Ισχύει

$$\begin{aligned} I_p &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\|x\|_p}^{\infty} \frac{d}{dt}(-e^{-t^p}) \right) dt dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^{\infty} \chi_{[\|x\|_p, \infty)}(t) \frac{d}{dt}(-e^{-t^p}) \right) dt dx \end{aligned}$$

και αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης

$$= \int_0^{\infty} \left(\frac{d}{dt}(-e^{-t^p}) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{[\|x\|_p, \infty)}(t) dx \right) \right) dt.$$

Παρατηρούμε ότι $\chi_{[\|x\|_p, \infty)}(t) = 1$ αν και μόνο αν $\|x\|_p \leq t$ αν και μόνο αν $x \in tB_p^n$ δηλαδή αν και μόνο αν $\chi_{tB_p^n}(x) = 1$. Αλλιώς ταυτόχρονα και οι δυο χαρακτηριστικές είναι μηδέν. Άρα

$$I_p = \int_0^{\infty} \left(\frac{d}{dt}(-e^{-t^p}) \text{vol}(tB_p^n) \right) dt = \text{vol}(B_p^n) p \int_0^{\infty} t^{n+p-1} e^{-t^p} dt.$$

Έτσι έχουμε αποδείξει ότι

$$\text{vol}(B_p^n) p \int_0^{\infty} t^{n+p-1} e^{-t^p} dt = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp(-|t|^p) dt \right)^n,$$

από όπου προκύπτει ότι

$$(4.3) \quad \text{vol}(B_p^n) = \frac{\left(2 \int_0^{\infty} e^{-t^p} dt \right)^n}{\int_0^{\infty} p t^{n+p-1} e^{-t^p} dt} = \frac{\left(2\Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right) \right)^n}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{p}\right)},$$

όπου

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Η συνάρτηση Γ είναι από τις ιδιαίτερα ενδιαφέρουσες συναρτήσεις στα Μαθηματικά και μερικές ιδιότητές της παρουσιάζονται στο Παράρτημα Β'. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε μια ασυμπτωτική εκτίμηση της συνάρτησης Γ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(x+1)}{\sqrt{2\pi x} (x/e)^x} = 1.$$

Από αυτή τη σχέση εύκολα συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν σταθερές $c_1(p)$ και $c_2(p)$ ώστε

$$c_1(p) \frac{1}{n^{1/p}} \leq \text{vol}(B_p^n)^{1/n} \leq c_2(p) \frac{1}{n^{1/p}}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 4.2.1 Χρησιμοποιήστε τα παραπάνω καθώς και της ιδιότητες της συνάρτησης Γ όπως αυτές παρουσιάζονται στο Παράρτημα Β' για να αποδείξετε ότι

(i) $\text{vol}_n(B_1^n) = 2^n/n!$.

(ii)

$$\text{vol}_n(B_2^n) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}^n}{(n/2)!} & \text{αν } n \text{ άρτιος,} \\ 2^n \sqrt{\pi}^{n-1} \frac{((n-1)/2)!}{n!} & \text{αν } n \text{ περιττός.} \end{cases}$$

Στις παρακάτω ασκήσεις μελετάμε την κατανομή του όγκου μέσα στην Ευκλείδεια μπάλα.

Άσκηση 4.2.2 Υπολογίστε τον $n-1$ -όγκο της τομής της B_2^n με ένα υπερεπίπεδο που απέχει t από την αρχή των αξόνων.

Άσκηση 4.2.3 Εκτιμήστε το $r_n \in \mathbb{R}$ ώστε $\text{vol}_n(r_n B_2^n) = 1$.

Άσκηση 4.2.4 Αποδείξτε ότι για το σύνολο $A = \text{conv}\{B_2^n, x\}$ για $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\text{vol}_n(A) \geq \frac{1}{n} \text{vol}_{n-1}(B_2^{n-1}) \|x\|_2.$$

Στη συνέχεια αποδείξτε ότι αν ένα κυρτό σύνολο K ικανοποιεί τις $B_2^n \subseteq K$ και $\text{vol}_n(K) < \infty$ τότε το K είναι φραγμένο.

Άσκηση 4.2.5 Αν $r_n \in \mathbb{R}$ ώστε $\text{vol}_n(r_n B_2^n) = 1$ και H_t υπερεπίπεδο που απέχει απόσταση t από την αρχή των αξόνων, υπολογίστε τον όγκο $\text{vol}_{n-1}(r_n B_2^n \cap H_t)$ και αποδείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{vol}_{n-1}(r_n B_2^n \cap H_t) = \sqrt{e} e^{-\pi e t^2}.$$

Άσκηση 4.2.6 Θέτουμε $L_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_n| \leq 1\}$. Αποδείξτε ότι

$$\text{vol}_n(r_n B_2^n \cap L_n) \geq 1 - \frac{1}{\pi\sqrt{e}} e^{-\pi e}.$$

Παρατηρήστε ότι το προηγούμενο μας λέει ότι το μεγαλύτερο μέρος του όγκου της $r_n B_2^n$ βρίσκεται σε κάθε(!) λωρίδα πλάτους 2 γύρω από την αρχή των αξόνων. Αποδείξτε όμως ότι ο περισσότερος όγκος δεν είναι στην τομή όλων αυτών των λωρίδων αφού $\text{vol}_n((r_n/2)B_2^n) = 1/2^n \rightarrow 0$.

Άσκηση 4.2.7 Η προηγούμενη άσκηση μάς υποδεικνύει ότι ο όγκος σε μια Ευκλείδεια μπάλα συγκεντρώνεται ισχυρά κοντά στην επιφάνειά της. Επιβεβαιώστε αυτό το γεγονός αποδεικνύοντας ότι για κάθε $\epsilon > 0$ η ποσότητα $\text{vol}_n(r_n B_2^n) - \text{vol}_n((1-\epsilon)r_n B_2^n)$ τείνει στη μονάδα με εκθετικό, ως προς τη διάσταση, ρυθμό.

Η παρακάτω άσκηση έχει ως στόχο να απαντηθεί το ερώτημα των Busemann-Petty, το οποίο ρωτάει το εξής: αν τα K και T είναι δυο κεντρικά συμμετρικά, κυρτά σώματα στον \mathbb{R}^n με την ιδιότητα για κάθε υπερεπίπεδο H που περνάει από το μηδέν να ισχύει $\text{vol}_n(K \cap H) < \text{vol}_n(T \cap H)$ είναι σωστό ότι $\text{vol}_n(K) < \text{vol}_n(T)$;

Άσκηση 4.2.8 Θέτουμε Q_n για τον κύβο όγκου 1 στον \mathbb{R}^n , δηλαδή $Q_n = [1/2, 1/2]^n$. Περί το 1985 ο Keith Ball απέδειξε (στο [Ball1988]) ότι για κάθε υπερεπίπεδο H που περνάει από το μηδέν ισχύει $1 \leq \text{vol}_{n-1}(Q_n \cap H) \leq \sqrt{2}$. Χρησιμοποιήστε αυτό το γεγονός και τους υπολογισμούς που έγιναν στις προηγούμενες ασκήσεις για την $r_n B_2^n$ για να δείξετε ότι η απάντηση στο πρόβλημα Busemann-Petty είναι αρνητική.

Άσκηση 4.2.9* Η τεχνική που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό του όγκου του B_p^n , δηλαδή μέσω ενός ολοκληρώματος που υπολογίζεται με δύο τρόπους είναι αρκετά συνηθισμένη. Για ένα άλλο παράδειγμα (που απαιτεί όμως γνώση θεωρίας μέτρου), αποδείξτε ότι για κάθε $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ ισχύει

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u, \theta \rangle|^q d\sigma(u) = \frac{2\Gamma\left(\frac{1+q}{2}\right)\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\Gamma\left(\frac{n+q}{2}\right)},$$

όπου σ το μέτρο Haar στην \mathbb{S}^{n-1} . Από το παραπάνω να συμπεράνεται ότι

$$\left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u, \theta \rangle|^q d\sigma(u) \right)^{1/q} \simeq \sqrt{\frac{q}{q+n}}$$

(Υπόδειξη: Ξεκινήστε με το ολοκλήρωμα

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, \theta \rangle|^q \frac{e^{-|x|^2/2}}{(\sqrt{2\pi})^n} dx.$$

Ελέξτε ότι αν αλλάξετε σε πολικές συντεταγμένες αυτό γίνεται

$$\frac{\text{vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})}{(\sqrt{2\pi})^n} \left(\int_0^\infty r^{n+q-1} e^{-r^2/2} dr \right) \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u, \theta \rangle|^q d\sigma(u) \right).$$

Για έναν δεύτερο τρόπο υπολογισμού παρατηρήστε ότι το αρχικό ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο του $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ και συνεπώς μπορεί να υπολογιστεί αν θέσουμε $\theta = (1, 0, 0, \dots, 0)$, στην οποία περίπτωση ισούται με το $\int_{-\infty}^\infty |x|^q e^{-x^2/2} / \sqrt{2\pi} dx$.

Άσκηση 4.2.10* Χρησιμοποιήστε την προηγούμενη άσκηση για να αποδείξετε ότι αν $\|\cdot\|_K$ η νόρμα που επάγει στον \mathbb{R}^n ένα κεντρικά συμμετρικό κυρτό σώμα K τότε υπάρχει σταθερά $c_n > 0$ με $c_n \rightarrow \sqrt{\pi/2}$ ώστε $\|x\|_K \leq c_n \sqrt{n} M \|x\|_2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, όπου $M = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \|\theta\|_K d\sigma(\theta)$. Συμπεράνεται ότι υπάρχει σταθερά $c > 0$ (ανεξάρτητη του n και του K) ώστε $\|x\|_K \leq c \sqrt{n} M \|x\|_2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. (Υπόδειξη: Έστω ότι b είναι η μικρότερη σταθερά ώστε $\|x\|_K \leq b \|x\|_2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Θεωρήστε $x_0 \in \partial K \cap (b^{-1} \mathbb{S}^{n-1})$, θέστε $u = x_0 / \|x_0\|_2$ και αποδείξτε ότι $K \subseteq \Lambda_{u, -b^{-1}, b^{-1}}$. Εξηγήστε γιατί αυτό συνεπάγεται ότι $b |\langle x, u \rangle| \leq b \|x\|_K \|u\|_{K^\circ} \leq \|x\|_K$, και στη συνέχεια ολοκληρώστε πάνω στην \mathbb{S}^{n-1} .)

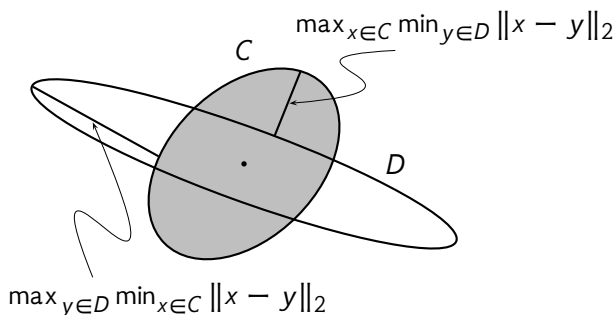
ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΚΥΡΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

5

5.1 Η ΑΠΟΣΤΑΣΗ HAUSDORFF

Ορισμός 5.1.1. Για C, D κυρτά σώματα στον \mathbb{R}^n ορίζουμε την απόσταση Hausdorff, $\delta(C, D)$ να είναι η ποσότητα:

$$\delta(C, D) = \max \left\{ \max_{x \in C} \min_{y \in D} \|x - y\|_2, \max_{y \in D} \min_{x \in C} \|x - y\|_2 \right\}.$$



ΣΧΗΜΑ 5.1: Η απόσταση Hausdorff μεταξύ του C και του D είναι η μεγαλύτερη από τις δύο αποστάσεις στο σχήμα.

Ελέγχουμε τώρα ότι η δ είναι μετρική. Φανερά, λόγω συμμετρίας του ορισμού, $\delta(C, D) = \delta(D, C)$. $\delta(C, D) = 0$ αν και μόνο αν

$$\max \left\{ \max_{x \in C} \min_{y \in D} \|x - y\|_2, \max_{y \in D} \min_{x \in C} \|x - y\|_2 \right\} = 0.$$

Ισοδύναμα θα έχουμε,

$$\begin{cases} \max_{x \in C} \min_{y \in D} \|x - y\|_2 = 0 \\ \max_{y \in D} \min_{x \in C} \|x - y\|_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in C, \min_{y \in D} \|x - y\|_2 = 0 \\ \forall y \in D, \min_{x \in C} \|x - y\|_2 = 0. \end{cases}$$

Οπότε,

$$\begin{cases} \forall x \in C, x \in D \\ \forall y \in D, y \in C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C \subseteq D \\ D \subseteq C. \end{cases}$$

Συνεπώς, $C = D$.

Η τριγωνική ανισότητα ελέγχεται με στοιχειώδεις πράξεις, αλλά θα την δείξουμε γρηγορότερα με την βοήθεια της ακόλουθης πρότασης.

Πρόταση 5.1.2. Αν C, D κυρτά σώματα στον \mathbb{R}^n , τότε

$$(i) \delta(C, D) = \inf\{\delta \geq 0 : C \subseteq D + \delta B_2^n, D \subseteq C + \delta B_2^n\}.$$

$$(ii) \delta(C, D) = \max\{|h_C(u) - h_D(u)| : u \in \mathbb{S}^{n-1}\}.$$

Απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας: Έστω ότι τα C, D, E είναι κυρτά σώματα στον \mathbb{R}^n . Από την (ii) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \delta(C, D) &= \max\{|h_C(u) - h_D(u)|, u \in \mathbb{S}^{n-1}\} \\ &\leq \max\{|h_C(u) - h_E(u)| + |h_E(u) - h_D(u)|, u \in \mathbb{S}^{n-1}\} \\ &\leq \max\{|h_C(u) - h_E(u)|, u \in \mathbb{S}^{n-1}\} + \max\{|h_E(u) - h_D(u)|, u \in \mathbb{S}^{n-1}\} \\ &\leq \delta(C, E) + \delta(E, D). \end{aligned}$$

□

Απόδειξη της Πρότασης 5.1.2:

- (i) Θέτουμε $\alpha_1 = \max_{x \in C} \min_{y \in D} \|x - y\|_2$. Έτσι, για κάθε $x \in C$ ισχύει $\min_{y \in D} \|x - y\|_2 \leq \alpha_1$, οπότε λόγω της συμπίεσης του D , υπάρχει y στο D ώστε $\|x - y\|_2 \leq \alpha_1$. Άρα $x - y \in \alpha_1 B_2^n$, συνεπώς

$$x \in y + \alpha_1 B_2^n \subseteq D + \alpha_1 B_2^n.$$

Έτσι

$$C \subseteq D + \alpha_1 B_2^n \subseteq D + \delta(C, D) B_2^n.$$

Ομοίως, αν $\alpha_2 = \max_{y \in D} \min_{x \in C} \|x - y\|_2$, τότε

$$D \subseteq C + \alpha_2 B_2^n \subseteq C + \delta(C, D) B_2^n.$$

Άρα,

$$\inf\{\lambda > 0 : C \subseteq D + \lambda B_2^n, D \subseteq C + \lambda B_2^n\} \leq \delta(C, D).$$

Αντίστροφα, έστω $\lambda > 0$, $C \subseteq D + \lambda B_2^n$ και $D \subseteq C + \lambda B_2^n$. Τότε για κάθε x στο C έχουμε ότι $x \in D + \lambda B_2^n$. Άρα, υπάρχει $y \in D$ ώστε $\|x - y\|_2 \leq \lambda$ οπότε

$$\max_{x \in C} \min_{y \in D} \|x - y\|_2 \leq \lambda.$$

Ομοίως, $\max_{y \in D} \min_{x \in C} \|x - y\|_2 \leq \lambda$. Συμπεραίνουμε ότι $\delta(C, D) \leq \lambda$. Δηλαδή,

$$\delta(C, D) \leq \inf\{\lambda > 0 : C \subseteq D + \lambda B_2^n, D \subseteq C + \lambda B_2^n\}.$$

Επομένως,

$$\delta(C, D) = \inf\{\lambda > 0 : C \subseteq D + \lambda B_2^n, D \subseteq C + \lambda B_2^n\}.$$

- (ii) Για κάθε $\lambda > 0$ ώστε $C \subseteq D + \lambda B_2^n$ και $D \subseteq C + \lambda B_2^n$ έχουμε ότι για κάθε $u \in \mathbb{S}^{n-1}$

$$h_C(u) \leq h_{D+\lambda B_2^n}(u) = h_D(u) + h_{\lambda B_2^n}(u) = h_D(u) + \lambda,$$

άρα $h_C(u) - h_D(u) \leq \lambda$. Ομοίως, για κάθε $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ έχουμε ότι $h_D(u) - h_C(u) \leq \lambda$, οπότε $|h_D(u) - h_C(u)| \leq \lambda$, και άρα $\max_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} |h_D(u) - h_C(u)| \leq \lambda$. Παίρνοντας infimum ως προς το λ προκύπτει ότι $\max_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} |h_D(u) - h_C(u)| \leq \delta(C, D)$.

Αντίστροφα: Χωρίς βλάβη της γενικότητας, ας υποθέσουμε ότι

$$\begin{aligned} \delta(C, D) &= \max \left\{ \max_{x \in C} \min_{y \in D} \|x - y\|_2, \max_{y \in D} \min_{x \in C} \|x - y\|_2 \right\} \\ &= \max_{y \in D} \min_{x \in C} \|x - y\|_2. \end{aligned}$$

Λόγω της συμπίεσης των C και D , υπάρχουν $x_0 \in C$ και $y_0 \in D$ ώστε

$$\delta(C, D) = \|x_0 - y_0\|_2.$$

Αν $\delta(C, D) = 0$ τότε $C = D$ οπότε $h_C = h_D$ και το ζητούμενο ισχύει. Αν $\delta(C, D) \neq 0$ θέτουμε

$$u_0 = \frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|} \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

Ισχυρισμός: Το υπερεπίπεδο H που είναι κάθετο στο u_0 και περνάει από το x_0 στηρίζει το C στο x_0 .

[Απόδειξη ισχυρισμού: Αν ο ισχυρισμός δεν είναι αληθής, τότε υπάρχει x_1 στο C ώστε $\langle x_1, u_0 \rangle > \langle x_0, u_0 \rangle$. Οπότε $\langle x_1 - x_0, u_0 \rangle > 0$. Θέτουμε $z_\lambda = (1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1 \in C$ και καταλήγουμε σε άτοπο όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.5.4 δείχνοντας ότι υπάρχει $\lambda > 0$ ώστε $\|y_0 - z_\lambda\|_2 < \|y_0 - x_0\|_2$.]

Από τον παραπάνω ισχυρισμό συμπεραίνουμε ότι $h_C(u_0) = \langle x_0, u_0 \rangle$. Φανερά, αφού $h_D(u_0) = \sup\{\langle y, u_0 \rangle : y \in D\}$ ισχύει

$$h_D(u_0) \geq \langle y_0, u_0 \rangle.$$

Τώρα όμως,

$$\begin{aligned} h_D(u_0) - h_C(u_0) &\geq \langle y_0, u_0 \rangle - \langle x_0, u_0 \rangle = \langle y_0 - x_0, u_0 \rangle \\ &= \frac{\|y_0 - x_0\|_2^2}{\|y_0 - x_0\|_2} \\ &= \|y_0 - x_0\|_2. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \max_{u \in S^{n-1}} |h_D(u) - h_C(u)| &\geq h_D(u_0) - h_C(u_0) \\ &\geq \|y_0 - x_0\|_2 = \delta(C, D). \quad \square \end{aligned}$$

Πόρισμα 5.1.3. Έστω ότι τα K, K_1, K_2, \dots , είναι κυρτά σώματα με $0 \in \text{int}(K)$. Τότε $K_m \rightarrow K$ ως προς τη μετρική Hausdorff για $m \rightarrow \infty$ αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $m \geq m_0$ ισχύει

$$(1 - \epsilon)K \subseteq K_m \subseteq (1 + \epsilon)K.$$

Απόδειξη: Αν $\delta(K_m, K) \rightarrow 0$ για κάθε $\theta > 0$ υπάρχει $m_0 = m_0(\theta) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $m \geq m_0$ να ισχύει $\delta(K_m, K) < \theta$. Συνεπώς $K_m \subseteq K + \theta B_2^n$ και $K \subseteq K_m + \theta B_2^n$. Αφού $0 \in \text{int}(K)$ υπάρχει $\rho > 0$ ώστε $\rho B_2^n \subseteq K$. Έτσι συνεχίζοντας τους προηγούμενους εγκλεισμούς παίρνουμε

$$K_m \subseteq K + \theta B_2^n = K + \frac{\theta}{\rho} \rho B_2^n \subseteq K + \frac{\theta}{\rho} K = \left(1 + \frac{\theta}{\rho}\right) K.$$

Επίσης

$$\left(1 - \frac{\theta}{\rho}\right) K + \frac{\theta}{\rho} K = K \subseteq K_m + \theta B_2^n = K_m + \frac{\theta}{\rho} \rho B_2^n \subseteq K_m + \frac{\theta}{\rho} K,$$

οπότε από τον κανόνα της διαγραφής (Λήμμα 3.3.6)

$$\left(1 - \frac{\theta}{\rho}\right) K \subseteq K_m.$$

Έτσι αν επιλέξουμε $\theta > 0$ ώστε $\theta < \rho\epsilon$ θα πάρουμε

$$(1 - \epsilon)K \subseteq K_m \subseteq (1 + \epsilon)K,$$

για κάθε m μεγαλύτερο του m_0 που αντιστοιχεί σε αυτό το θ .

Αντιστρόφως, η $(1 - \epsilon)K \subseteq K_m \subseteq (1 + \epsilon)K$ συνεπάγεται την $h_{(1 - \epsilon)K} \leq h_{K_m} \leq h_{(1 + \epsilon)K}$ και από τις ιδιότητες της συνάρτησης στήριξης (Πρόταση 3.3.4), $(1 - \epsilon)h_K \leq h_{K_m} \leq (1 + \epsilon)h_K$ από όπου προκύπτει $|h_{K_m} - h_K| \leq \epsilon h_K$. Η τελευταία ποσότητα είναι οσοδήποτε μικρή επιθυμούμε, αφού το K ως κυρτό σώμα είναι φραγμένο. \square

5.2 ΟΓΚΟΣ ΚΑΙ ΑΠΟΣΤΑΣΗ HAUSDORFF

Θεώρημα 5.2.1. *Ο όγκος $\text{vol}(C)$ ως συνάρτηση, από τα κυρτά σώματα εφοδιασμένα με τη μετρική Hausdorff στο \mathbb{R}^n , είναι συνεχής.*

Απόδειξη: Έστω ότι τα $C, C_1, C_2, \dots, C_m, \dots$ είναι μια ακολουθία κυρτών σωμάτων ώστε $\delta(C_m, C) \rightarrow 0$. Θα δείξουμε ότι $\text{vol}(C_m) \rightarrow \text{vol}(C)$. Επειδή ο όγκος και η απόσταση Hausdorff είναι αναλλοίωτα στις μεταφορές, υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι το 0 ανήκει στο εσωτερικό του C (το C ως κυρτό σώμα έχει μη κενό εσωτερικό). Από το Πρόσχημα 5.1.3 για κάθε $\theta > 0$ υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $m \geq m_0$ να ισχύει

$$(1 - \theta)C \subseteq C_m \subseteq (1 + \theta)C.$$

Παίρνοντας όγκους στην παραπάνω προκύπτει ότι

$$(1 - \theta)^n \text{vol}(C) \leq \text{vol}(C_m) \leq (1 + \theta)^n \text{vol}(C),$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι

$$|\text{vol}(C_m) - \text{vol}(C)| \leq \max\left\{((1 + \theta)^n - 1), (1 - (1 - \theta)^n)\right\} \text{vol}(C).$$

Επιλέγοντας κατάλληλο $\theta > 0$ ώστε η τελευταία ποσότητα να είναι μικρότερη δοθέντος $\epsilon > 0$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα. \square

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 5.2.1 Χρησιμοποιήστε τον Ισχυρισμό της απόδειξης του Θεωρήματος 4.1.8 για να αποδείξετε ότι για κάθε κυρτό σώμα K υπάρχει ακολουθία πολυπαραλληλεπιπέδων $P_m \subseteq K$ η οποία συγκλίνει στο K ως προς τη

μετρική Hausdorff (Παρατηρήστε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ αν $0 \in \text{int}(K)$ τότε $(1 - \epsilon)K \subseteq \text{int}(K)$).

5.3 ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΤΟΥ BLASCHKE

Θεώρημα 5.3.1. *Κάθε φραγμένη ακολουθία κυρτών σωμάτων στον \mathbb{R}^n έχει συγκλίνουσα υπακολουθία ως προς τη μετρική Hausdorff.*

Απόδειξη: Έστω ότι τα C_1, C_2, \dots είναι μια ακολουθία κυρτών σωμάτων, η οποία είναι φραγμένη. Δηλαδή, περιέχεται στο $B := RB_2^n$ για κατάλληλο $R > 0$.

Ισχυρισμός: Η C_1, C_2, \dots περιέχει μια ακολουθία D_1, D_2, \dots για την οποία ισχύει

$$\delta(D_m, D_k) \leq \frac{1}{2^{\min\{m,k\}}}.$$

[Απόδειξη του ισχυρισμού: Θα δείξουμε ότι υπάρχουν ακολουθίες

$$\begin{array}{ccc} C_{11}, & C_{12}, & \dots \\ C_{21}, & C_{22}, & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

όπου κάθε γραμμή στον παραπάνω πίνακα είναι υπακολουθία της προηγούμενης ώστε

$$(5.1) \quad \delta(C_{mi}, C_{mj}) \leq \frac{1}{2^m}.$$

Αν αυτό γίνει, τότε θα θέσουμε

$$D_1 = C_{11}, D_2 = C_{22}, \dots, D_m = C_{mm},$$

οπότε τα D_m, D_k βρίσκονται και τα δύο στον παραπάνω πίνακα στη γραμμή $\min\{m, k\}$. Οπότε,

$$\delta(D_m, D_k) \leq \frac{1}{2^{\min\{m,k\}}},$$

από την (5.1). Θα κατασκευάσουμε τώρα τον πίνακα των υπακολουθιών. Ας υποθέσουμε ότι έχει κατασκευαστεί η m γραμμή, δηλαδή η C_{m1}, C_{m2}, \dots με $\delta(C_{mi}, C_{mj}) \leq 1/2^m$. Θα κατασκευάσουμε την $m + 1$ γραμμή, ώστε

$$\delta(C_{m+1,i}, C_{m+1,j}) \leq \frac{1}{2^{m+1}}.$$

Το B είναι συμπαγές, άρα

$$B = RB_2^n \subseteq \bigcup_{x \in B} \text{int} \left(B_2^n \left(x, \frac{1}{2^{m+2}} \right) \right).$$

Άρα, υπάρχει πεπερασμένο πλήθος μπαλών της μορφής $B \left(x, 1/2^{m+2} \right)$ που καλύπτουν το B .

Σε κάθε ένα από τα C_{mi} , για $i = 1, 2, 3, \dots$ αντιστοιχούμε εκείνες τις μπάλες $B \left(x, 1/2^{m+2} \right)$ από το προηγούμενο βήμα που το τέμνουν, οι οποίες το καλύπτουν, αφού όλες καλύπτουν το B . Όλες οι υποοικογένειες των πεπερασμένου πλήθους $B \left(x, 1/2^{m+2} \right)$ είναι πεπερασμένο πλήθος και σε αυτές απεικονίζουμε το απειροσύνολο $\{C_{m1}, C_{m2}, \dots\}$. Άρα, υπάρχει μια υποοικογένεια των $B \left(x, 1/2^{m+2} \right)$ στην οποία απεικονίζεται ένα άπειρο πλήθος από τα C_{m1}, C_{m2}, \dots την οποία ονομάζουμε $C_{m+1,1}, C_{m+1,2}, \dots$. Μένει να δείξουμε ότι

$$\delta(C_{m+1,i}, C_{m+1,j}) \leq \frac{1}{2^{m+1}}.$$

Έστω ότι $x \in C_{m+1,i}$. Αυτό βρίσκεται σε μια από τις μπάλες με ακτίνα $1/2^{m+2}$ που τέμνουν το $C_{m+1,i}$. Αν c είναι το κέντρο αυτής της μπάλας τότε

$$\|x - c\|_2 \leq \frac{1}{2^{m+2}}.$$

Όμως, το $C_{m+1,j}$ καλύπτεται από τις ίδιες μπάλες ακτίνας $1/2^{m+2}$, διότι έτσι επιλέχθηκε. Δηλαδή,

$$B \left(c, \frac{1}{2^{m+2}} \right) \cap C_{m+1,j} \neq \emptyset.$$

Συνεπώς, υπάρχει y στο $C_{m+1,j}$ ώστε $\|c - y\|_2 \leq \frac{1}{2^{m+2}}$. Αλλά τότε

$$\begin{aligned} \|x - y\|_2 &= \|(x - c) - (y - c)\|_2 \\ &\leq \|x - c\|_2 + \|c - y\|_2 \\ &\leq \frac{1}{2^{m+2}} + \frac{1}{2^{m+2}} = \frac{1}{2^{m+1}}. \end{aligned}$$

Δείξαμε δηλαδή, ότι για κάθε x που ανήκει στο $C_{m+1,i}$, υπάρχει y στο

$C_{m+1,j}$ ώστε

$$\|x - y\|_2 \leq \frac{1}{2^{m+1}}.$$

Ομοίως, για κάθε y που ανήκει στο $C_{m+1,j}$, υπάρχει x στο $C_{m+1,i}$ ώστε

$$\|x - y\|_2 \leq \frac{1}{2^{m+1}}.$$

Άρα,

$$\delta(C_{m+1,i}, C_{m+1,j}) \leq \frac{1}{2^{m+1}}. \quad]$$

Θα δείξουμε τώρα ότι

$$D_m \rightarrow D = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(D_k + \frac{1}{2^{k-1}} B_2^n \right).$$

Τα $D_k + (1/2^{k-1})B_2^n$ είναι κλειστά και φραγμένα σύνολα. Άρα και η τομή τους είναι κλειστό και φραγμένο σύνολο. Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $D_k + (1/2^{k-1})B_2^n$ είναι φθίνουσα. Έχουμε $\delta(D_1, D_2) \leq 1/2$ άρα

$$D_1 + \frac{1}{2} B_2^n \supseteq D_2.$$

Ομοίως $\delta(D_2, D_3) \leq 1/2^2$ άρα

$$D_2 + \frac{1}{2^2} B_2^n \supseteq D_3 \dots,$$

και γενικά έχουμε ότι

$$D_k + \frac{1}{2^k} B_2^n \supseteq D_{k+1},$$

διότι $\delta(D_k, D_{k+1}) \leq 1/2^k$. Έτσι,

$$\begin{aligned} D_1 + B_2^n &= D_1 + \frac{1}{2} B_2^n + \frac{1}{2} B_2^n \supseteq D_2 + \frac{1}{2} B_2^n = D_2 + \frac{1}{2^2} B_2^n + \frac{1}{2^2} B_2^n \\ &\supseteq D_3 + \frac{1}{2^2} B_2^n = D_3 + \frac{1}{2^3} B_2^n + \frac{1}{2^3} B_2^n \supseteq \dots \supseteq D_k + \frac{1}{2^{k-1}} B_2^n \\ &= D_k + \frac{1}{2^k} B_2^n + \frac{1}{2^k} B_2^n \supseteq D_{k+1} + \frac{1}{2^k} B_2^n. \end{aligned}$$

Άρα, η D είναι φθίνουσα τομή μη κενών συμπαγών συνόλων. Οπότε, το D θα είναι διαφορετικό του κενού συνόλου. Έχουμε ότι, το D είναι υποσύνολο του $D_k + (1/2^{k-1})B_2^n$. Επίσης, ισχύει

$$D \subseteq D_k + \frac{1}{2^{k-1}}B_2^n \subseteq D_k + \epsilon B_2^n,$$

για k αρκετά μεγάλο ($k \geq 1 + \log_2(1/\epsilon)$). Μένει να δείξουμε ότι $D_k \subseteq D + \epsilon B_2^n$. Έτσι θα καταλήξουμε στο $\delta(D, D_k) \leq \epsilon$. Θέτουμε $G = \text{int}(D + \epsilon B_2^n)$, το οποίο είναι διαφορετικό του κενού συνόλου (αφού περιέχει μεταφορά της ευκλείδειας μπάλας). Από το ότι η $D_k + (1/2^{k-1})B_2^n$ είναι φθίνουσα έχουμε

$$(D_1 + B_2^n) \setminus G \supseteq \left(D_2 + \frac{1}{2}B_2^n \right) \setminus G \supseteq \dots$$

Η τομή αυτής της ακολουθίας είναι υποσύνολο του D , αφού

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \left(\left(D_k + \frac{1}{2^{k-1}}B_2^n \right) \setminus G \right) \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(D_k + \frac{1}{2^{k-1}}B_2^n \right) = D.$$

Επίσης, φανερά το D είναι υποσύνολο του $G = \text{int}(D + \epsilon B_2^n)$, διότι αν πάρουμε ένα x στο D τότε θα έχουμε $x + \epsilon B_2^n \subseteq D + \epsilon B_2^n$ οπότε $B_2^n(x, \epsilon) \subseteq D + \epsilon B_2^n$ και άρα $x \in \text{int}(D + \epsilon B_2^n)$. Θέτουμε

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(\left(D_k + \frac{1}{2^{k-1}}B_2^n \right) \setminus G \right) = \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \left(D_k + \frac{1}{2^{k-1}}B_2^n \right) \right) \setminus G.$$

Άρα, το A είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^n \setminus G$, το οποίο, αφού $D \subseteq G$, είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^n \setminus D$. Συνεπώς, το A είναι το κενό σύνολο γιατί τα στοιχεία του ανήκουν στο D και στο συμπλήρωμα του D . Άρα, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε το σύνολο $(D_{k_0} + (1/2^{k_0-1})B_2^n) \setminus G$ να είναι το κενό. Άρα

$$D_{k_0} + \frac{1}{2^{k_0-1}}B_2^n \subseteq G \subseteq D + \epsilon B_2^n.$$

Όμως για κάθε $k \geq k_0$

$$D_k \subseteq D_{k_0} + \frac{1}{2^{k_0-1}}B_2^n,$$

αφού

$$D_k + \frac{1}{2^{k-1}}B_2^n \subseteq D_{k_0} + \frac{1}{2^{k_0-1}}B_2^n \subseteq D + \epsilon B_2^n.$$

Οπότε,

$$D_k \subseteq D_k + \frac{1}{2^{k-1}}B_2^n \subseteq D + \epsilon B_2^n.$$

Έτσι, για αρκετά μεγάλο k ισχύει $D_k \subseteq D + \epsilon B_2^n$ και $D \subseteq D_k + \epsilon B_2^n$.
Επομένως, $\delta(D_k, D) \leq \epsilon$. □

Η παρουσίαση των επόμενων θεμάτων με πλήρη αυστηρότητα απαιτεί τη γνώση θεωρίας μέτρου κάτι που ξεφεύγει από τους σκοπούς του παρόντος. Οι αναγνώστες που δεν έχουν αυτές τις γνώσεις θα πρέπει να αποδεχθούν τα ακόλουθα:

- (i) Οι συναρτήσεις που θα εμφανίζονται παρακάτω θα είναι πάντα ολοκληρώσιμες.
- (ii) Σε οποιοδήποτε πολλαπλό ολοκλήρωμα που εμφανίζεται παρακάτω μπορούμε να αλλάζουμε τη σειρά της ολοκλήρωσης (Θεώρημα Fubini).
- (iii) Το συνολικό «μήκος» ενός υποσυνόλου του \mathbb{R} είναι το supremum των μηκών συμπαγών υποσυνόλων του (εσωτερική κανονικότητα του μέτρου Lebesgue). Για παράδειγμα, $|(2, 5)| = 5 - 2 = 3$ και το $\left[2 + \frac{1}{n}, 5 - \frac{1}{n}\right]$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $(2, 5)$, με

$$\begin{aligned} \sup_n \left| \left[2 + \frac{1}{n}, 5 - \frac{1}{n} \right] \right| &= \sup_n \left(5 - \frac{1}{n} - \left(2 + \frac{1}{n} \right) \right) \\ &= \sup_n \left(3 - \frac{2}{n} \right) = 3. \end{aligned}$$

6.1 Η ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ PREKOPA-LEINDLER

Θεώρημα 6.1.1. Έστω ότι οι $f, g, h \geq 0$ είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις από το \mathbb{R}^n στο \mathbb{R} και $0 < \lambda < 1$. Αν ισχύει

$$(6.1) \quad h((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq f(x)^{1-\lambda} g(y)^\lambda$$

για κάθε x, y στο \mathbb{R}^n τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x) dx \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y) dy \right)^\lambda.$$

Παρατήρηση 6.1.2. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $k(x) = f(x)^{1-\lambda} g(x)^\lambda$ τότε από την ανισότητα Hölder για $p = 1/(1 - \lambda)$ και $q = 1/\lambda$ (οπότε

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) προκύπτει

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} k(x) dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} (f(x)^{1-\lambda})^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (g(x)^\lambda)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y) dy \right)^\lambda. \end{aligned}$$

Δηλαδή, η αντίστροφη της παραπάνω ανισότητας. Η διαφορά εδώ είναι ότι η h πρέπει να ικανοποιεί την (6.1) για κάθε x και για κάθε y , οπότε θα είναι μεγαλύτερη από την $k(x)$ που ικανοποιεί την (6.1) (με ισότητα) μόνο για $x = y$. Με αυτή την έννοια η ανισότητα Prekopa-Leindler ερμηνεύεται ως «αντίστροφη μορφή» της ανισότητας Hölder.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.1 θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 6.1.3. *Αν η $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση τότε*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_0^\infty |\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq t\}| dt.$$

Απόδειξη: Θέτουμε $A_t = \{x : f(x) \geq t\}$ για κάθε $t \geq 0$. Παρατηρούμε τώρα ότι $\chi_{[0, f(x)]}(t) = 1$ αν και μόνο αν $0 \leq t \leq f(x)$, αν και μόνο αν $\chi_{A_t}(x) = 1$ για $t \geq 0$. Αλλιώς και οι δύο αυτές χαρακτηριστικές συναρτήσεις είναι ίσες με μηδέν. Έτσι, αλλάζοντας την κατάλληλη στιγμή τη σειρά ολοκλήρωσης, έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} \int_0^{f(x)} dt dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \chi_{[0, f(x)]}(t) dt dx \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \chi_{A_t}(x) dx dt \\ &= \int_0^\infty |\{x : f(x) \geq t\}| dt. \end{aligned} \quad \square$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.1: Θα κάνουμε επαγωγή στο n . Πριν αποδείξουμε την περίπτωση $n = 1$ αποδεικνύουμε το εξής:

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ: Αν τα $R, S, T \subseteq \mathbb{R}$ είναι μη κενά σύνολα που έχουν «μήκος» (δηλαδή είναι μετρήσιμα) και $0 < \lambda < 1$ ώστε $R \supseteq (1 - \lambda)S + \lambda T$ τότε $|R| \geq (1 - \lambda)|S| + \lambda|T|$, όπου $|\cdot|$ είναι το μήκος (μέτρο Lebesgue).

[Απόδειξη του ισχυρισμού: Επειδή $|(1 - \lambda)S| = (1 - \lambda)|S|$ και $|\lambda T| = \lambda|T|$ αρκεί να αποδείξουμε ότι $|S + T| \geq |S| + |T|$. Σύμφωνα με την ιδιότητα του μήκους που περιγράψαμε στην αρχή του κεφαλαίου, θα υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι τα S, T είναι συμπαγή. Άρα, το S έχει μέγιστο στοιχείο, έστω το s , και το T έχει ελάχιστο στοιχείο, έστω το t . Έτσι, $S - s \subseteq (-\infty, 0]$ και $T - t \subseteq [0, \infty)$. Επιπλέον, τα σύνολα αυτά έχουν κοινό στοιχείο μόνο το 0. Οπότε, αφού $0 \in T - t$ συνεπάγεται ότι $S - s \subseteq (S - s) + (T - t)$ και, αφού $0 \in S - s$ συνεπάγεται ότι $T - t \subseteq (S - s) + (T - t)$. Άρα, αφού η μόνη τομή του $S - s$ με το $T - t$ είναι το $\{0\}$ συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} |S + T| &= |S + T - (s + t)| = |(S - s) + (T - t)| \\ &\geq |(S - s) \cup (T - t)| \geq |(S - s)| + |(T - t)| \\ &\geq |S| + |T|. \end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη του ισχυρισμού.]

Ξεκινάμε την επαγωγική διαδικασία. Έστω ότι $n = 1$. Από την (6.1) εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει:

$$\{z : h(z) \geq t\} \supseteq (1 - \lambda)\{x : f(x) \geq t\} + \lambda\{y : g(y) \geq t\},$$

διότι αν $f(x) \geq t$ και $g(y) \geq t$ τότε, από την υπόθεση, $h((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq t$, άρα $(1 - \lambda)x + \lambda y \in \{z : h(z) \geq t\}$. Άρα, από τον παραπάνω ισχυρισμό ισχύει

$$|\{z : h(z) \geq t\}| \geq (1 - \lambda)|\{x : f(x) \geq t\}| + \lambda|\{y : g(y) \geq t\}|.$$

Χρησιμοποιούμε τώρα το Λήμμα 6.1.3 και ολοκληρώνοντας ως προς t παίρνουμε:

$$\int_{\mathbb{R}} h \geq (1 - \lambda) \int_{\mathbb{R}} f + \lambda \int_{\mathbb{R}} g \geq \left(\int_{\mathbb{R}} f \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} g \right)^{\lambda},$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Αριθμητικού-Γεωμετρικού Μέσου (Θεώρημα 2.2.4). Αυτό επιβεβαιώνει το πρώτο βήμα της επαγωγής.

Έστω ότι το αποτέλεσμα ισχύει για $n - 1$ και ότι $f, g, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

όπως στην υπόθεση. Επειδή $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$ θέτουμε $f_t : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_t(x) = f(t, x)$, και ομοίως ορίζουμε τις g_t και h_t . Έτσι, αν $t = (1 - \lambda)t_1 + \lambda t_2$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^{n-1}$ ισχύει

$$h_t((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq (f_{t_1}(x))^{1-\lambda} (g_{t_2}(x))^\lambda.$$

Εφαρμόζοντας την επαγωγική υπόθεση συμπεραίνουμε ότι

$$(6.2) \quad \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_t(x) dx \geq \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{t_1}(x) dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_{t_2}(x) dx \right)^\lambda.$$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις $F, G, H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ θέτοντας $F(t) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_t(x) dx$ και ομοίως για τις G και H . Η (6.2) γράφεται ως $H((1 - \lambda)t_1 + \lambda t_2) \geq F(t_1)^{1-\lambda} G(t_2)^\lambda$.

Έτσι αναχθήκαμε στην περίπτωση $n = 1$ που την έχουμε επιβεβαιώσει. Συνεπώς

$$\int_{\mathbb{R}} H(t) dt \geq \left(\int_{\mathbb{R}} F(t) dt \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} G(t) dt \right)^\lambda,$$

οπότε

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h(t, x) dt dx \geq \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(t, x) dt dx \right)^{1-\lambda} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(t, x) dt dx \right)^\lambda,$$

που είναι η ζητούμενη. ◻

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 6.1.1 Επεκτείνετε το Λήμμα 6.1.3 στον \mathbb{R}^n δείχνοντας ότι αν $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ μετρήσιμη συνάρτηση τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_0^\infty \text{vol}_n\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq t\} dt.$$

Άσκηση 6.1.2 Χρησιμοποιήστε την προηγούμενη άσκηση για να αποδείξετε

ότι για κάθε κυρτό σώμα K ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|_K} dx = n! \operatorname{vol}_n(K).$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδείξτε ότι για κάθε $p > 0$ ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|_K^p} dx = \Gamma\left(1 + \frac{n}{p}\right) \operatorname{vol}_n(K).$$

Άσκηση 6.1.3 Έστω ότι η $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ ικανοποιεί την $0 < \int_{\mathbb{R}^n} f < \infty$ και η $\log f$ είναι κοίλη συνάρτηση (δηλαδή, η $-\log f$ είναι κυρτή). Αποδείξτε ότι υπάρχει $t \in (0, 1)$ ώστε το σύνολο $K(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\}$ να έχει θετικό μέτρο Lebesgue, και είναι κυρτό, φραγμένο και με μη κενό εσωτερικό. (Υποδείξη: για το φραγμένο χρησιμοποιήστε την Άσκηση 4.2.4, ενώ για το μη κενό εσωτερικό αποδείξτε το ότι λόγω θετικού μέτρου περιέχει $n + 1$ σημεία σε γενική θέση.)

6.2 Η ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ BRUNN-MINKOWSKI

Η ανισότητα Brunn-Minkowski παίζει κεντρικό ρόλο στη θεωρία των κυρτών σωμάτων. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι να αποδειχθεί. Εδώ επιλέγουμε τη χρήση της ανισότητας Prekopa-Leindler.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.2.1 (Πολλαπλασιαστική μορφή της ανισότητας Brunn-Minkowski). *Έστω ότι τα S, T είναι μη κενά, συμπαγή υποσύνολα του \mathbb{R}^n . Τότε:*

$$\operatorname{vol}((1 - \lambda)S + \lambda T) \geq \operatorname{vol}(S)^{1-\lambda} \operatorname{vol}(T)^\lambda,$$

για κάθε $\lambda \in [0, 1]$.

Απόδειξη: Θέτουμε $f = \chi_S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ και $g = \chi_T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in S \\ 0, & \text{αν } x \notin S \end{cases} \quad \text{και} \quad \chi_T(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in T \\ 0, & \text{αν } x \notin T. \end{cases}$$

Οπότε $\int f = \operatorname{vol}(S)$ και $\int g = \operatorname{vol}(T)$. Θέτουμε $R = (1 - \lambda)S + \lambda T$ και $h = \chi_R$. Οι h, f, g ικανοποιούν τις υποθέσεις της ανισότητας Prekopa-Leindler, αφού αν $f(x) = 0$ ή $g(y) = 0$ η υπόθεση της Prekopa-Leindler ισχύει. Ενώ αν $f(x) \neq 0$ και $g(y) \neq 0$ τότε $x \in S$ και $y \in T$, οπότε $(1 - \lambda)x + \lambda y \in (1 - \lambda)S + \lambda T$ και άρα $h((1 - \lambda)x + \lambda y) = 1$. Έτσι και πάλι επαληθεύονται οι υποθέσεις της Prekopa-Leindler.

Συνεπώς,

$$\int h \geq \left(\int f \right)^{1-\lambda} \left(\int g \right)^\lambda \quad \text{δηλαδή} \quad \int \chi_R \geq \left(\int \chi_S \right)^{1-\lambda} \left(\int \chi_T \right)^\lambda,$$

άρα

$$\text{vol}(R) \geq \text{vol}(S)^{1-\lambda} \text{vol}(T)^\lambda,$$

οπότε

$$\text{vol}((1-\lambda)S + \lambda T) \geq \text{vol}(S)^{1-\lambda} \text{vol}(T)^\lambda. \quad \square$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.2.2 (Αθροιστική μορφή της ανισότητας Brunn-Minkowski).
Έστω ότι τα S, T είναι μη κενά και συμπαγή υποσύνολα του \mathbb{R}^n . Τότε:

$$\text{vol}(S + T)^{1/n} \geq \text{vol}(S)^{1/n} + \text{vol}(T)^{1/n}.$$

Αν επιπλέον τα S και T είναι κυρτά σώματα και ισχύει η ισότητα τότε ένα από τα S, T είναι πολλαπλάσιο του άλλου.

Απόδειξη: Η απόδειξη της περίπτωσης της ισότητας δεν θα γίνει σε αυτό το σημείο γιατί απαιτεί άλλου είδους απόδειξη η οποία είναι πιο περίπλοκη (δείτε στο [Gru2007] ή στο [AGM2015]). Θα αποδείξουμε μόνο την ανισότητα.

Γράφοντας $|A|$ αντί για $\text{vol}(A)$ θέτουμε

$$K = \frac{S}{|S|^{1/n}}, \quad L = \frac{T}{|T|^{1/n}} \quad \text{και} \quad \lambda = \frac{|T|^{1/n}}{|S|^{1/n} + |T|^{1/n}}$$

(αν $|S| = 0$ ή $|T| = 0$ βλέπουμε εύκολα ότι η ζητούμενη ανισότητα ισχύει, οπότε υποθέτουμε ότι $|S| \neq 0$ και $|T| \neq 0$). Παρατηρούμε ότι $\lambda \in [0, 1]$ και ότι $1 - \lambda = |S|^{1/n} / (|S|^{1/n} + |T|^{1/n})$. Επίσης $|K| = 1$ και $|L| = 1$. Εφαρμόζουμε την πολλαπλασιαστική μορφή της ανισότητας Brunn-Minkowski:

$$\left| \left(\frac{|S|^{1/n}}{|S|^{1/n} + |T|^{1/n}} \frac{S}{|S|^{1/n}} + \frac{|T|^{1/n}}{|S|^{1/n} + |T|^{1/n}} \frac{T}{|T|^{1/n}} \right) \right| \geq 1^{1-\lambda} \cdot 1^\lambda = 1.$$

Άρα

$$\left| \left(\frac{S}{|S|^{1/n} + |T|^{1/n}} + \frac{T}{|S|^{1/n} + |T|^{1/n}} \right) \right| \geq 1,$$

από όπου προκύπτει

$$|S + T|^{1/n} \geq |S|^{1/n} + |T|^{1/n}. \quad \square$$

Παρατήρηση 6.2.3. Η πολλαπλασιαστική μορφή της ανισότητας Brunn-Minkowski σε σχέση με την προσθετική της μορφή έχει το πλεονέκτημα ότι είναι ανεξάρτητη της διάστασης n . Παρόλα αυτά, εύκολα βλέπει κανείς ότι, οι δύο μορφές είναι ισοδύναμες (Άσκηση 6.2.1).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 6.2.1 Αποδείξτε ότι η πολλαπλασιαστική μορφή της ανισότητας Brunn-Minkowski ισχύει αν και μόνο αν ισχύει η προσθετική της μορφή.

Άσκηση 6.2.2 Αποδείξτε ότι η απεικόνιση $\det^{1/n}$ στο σύνολο των $n \times n$ πινάκων με μη αρνητική ορίζουσα είναι κοίλη: αν $A, B \geq 0$ τότε

$$\det(A + B)^{1/n} \geq \det(A)^{1/n} + \det(B)^{1/n}.$$

Άσκηση 6.2.3 Αποδείξτε με επαγωγή ότι αν $\lambda_i > 0$ και K_i κυρτά σώματα για $i = 1, \dots, m$ τότε ισχύει

$$\text{vol}_n(\lambda_i K_i) \geq \prod_{i=1}^m \text{vol}(K_i)^{\lambda_i}.$$

Χρησιμοποιήστε αυτή την ανισότητα για να αποδείξετε ότι για $n \times n$ πίνακες A_i με θετική ορίζουσα ισχύει

$$\det \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i A_i \right) \geq \prod_{i=1}^m \det(A_i)^{\lambda_i}.$$

Συμπεράνετε ότι η παραπάνω ισχύει και για πίνακες A_i με μη αρνητική ορίζουσα.

Άσκηση 6.2.4 Σε αυτή την άσκηση περιγράψουμε πώς μπορεί να αποδειχθεί η ανισότητα Brunn-Minkowski με στοιχειώδη τρόπο.

- (i) Αποδείξτε την ανισότητα όταν τα σύνολα T και S είναι ορθογώνια παραλληλεπίπεδα με έδρες κάθετες στους βασικούς άξονες του \mathbb{R}^n και μη κενά εσωτερικά.
- (ii) Υποθέστε τώρα ότι $T = \bigcap_{i=1}^N T_i$ και $S = \bigcup_{j=1}^M S_j$ όπου τα T_i και S_j είναι παραλληλεπίπεδα όπως στο (i) και τόσο τα T_i για $i = 1, \dots, N$ όσο και τα S_j για $j = 1, \dots, M$ έχουν ξένα εσωτερικά. Θεωρήστε τον αριθμό $p = N + M$ και κάντε επαγωγή στον p . Η περίπτωση $p = 2$ είναι η περίπτωση (i). Για το επαγωγικό βήμα μεταφέρετε το T ώστε να μπορείτε να βρείτε ένα

υπερεπίπεδο H με $0 \in H$ που να διαχωρίζει τα εσωτερικά δύο από τα T_i (εξηγήστε γιατί αυτό είναι εφικτό, αφού τα T_i έχουν ξένα εσωτερικά). Παρατηρήστε τώρα ότι τόσο τα $T_i \cap H^+$ όσο και τα $T_i \cap H^-$ που δεν έχουν κενό εσωτερικό είναι λιγότερα ή ίσα του $N - 1$. Μεταφέρετε το S ώστε να κοπεί κατάλληλα από το υπερεπίπεδο H .

- (iii) Χρησιμοποιείστε τον ορισμό του όγκου όπως δόθηκε με τα πολυπαραλληλεπίπεδα (Ορισμός 4.1.5) για να ολοκληρώσετε την απόδειξη της ανισότητας Brunn-Minkowski.

6.3 Η ΙΣΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ

Ορισμός 6.3.1. Έστω ότι το A είναι διαφορετικό του κενού και συμπαγές υποσύνολο του \mathbb{R}^n που έχει όγκο. Το εμβαδόν επιφανείας του A ορίζεται να είναι το όριο

$$\partial A = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\text{vol}(A + tB_2^n) - \text{vol}(A)}{t},$$

εφόσον το όριο αυτό υπάρχει.

Παρατήρηση 6.3.2. Μπορεί κανείς να αποδείξει ότι το παραπάνω όριο υπάρχει πάντα για κυρτά σώματα. Για παράδειγμα, δείτε την απόδειξη του Θεωρήματος 14.2.7 παρακάτω. Εν τούτοις, αυτό δεν είναι σωστό για κάθε σύνολο A που απλώς έχει όγκο. Για αυτό τον λόγο συχνά ορίζουμε το εμβαδό επιφανείας (ή αλλιώς «περιεχόμενο Minkowski») χρησιμοποιώντας \liminf στη θέση του παραπάνω \lim .

Λήμμα 6.3.3. Αν A υποσύνολο του \mathbb{R}^n το οποίο έχει εμβαδόν επιφανείας τότε για κάθε $r > 0$ το rA έχει εμβαδόν επιφανείας και ισχύει

$$\partial(rA) = r^{n-1} \partial(A).$$

Απόδειξη: Γράφοντας $|\cdot|$ αντί για vol_n , από τον ορισμό του εμβαδού επιφανείας έχουμε

$$\begin{aligned} \partial(rA) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|rA + tB_2^n| - |rA|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{r^n |A + (t/r)B_2^n| - r^n |A|}{t} \\ &= r^n \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|A + (t/r)B_2^n| - |A|}{t} = r^{n-1} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|A + (t/r)B_2^n| - |A|}{t/r} \\ &= r^{n-1} \partial(A), \end{aligned}$$

□

Για να αποδείξουμε την ισοπεριμετρική ανισότητα θα αποδείξουμε πρώτα ένα θεώρημα το οποίο μας λέει ότι από όλα τα σώματα με τον ίδιο όγκο, το ελάχιστο εμβαδόν επιφανείας το έχει η ευκλείδεια μπάλα.

Θεώρημα 6.3.4. *Αν $\text{vol}_n(B_2^n) = \text{vol}_n(A)$, με το A να είναι υποσύνολο του \mathbb{R}^n που έχει όγκο και εμβαδόν επιφανείας, τότε*

$$\partial A \geq \partial B_2^n.$$

Απόδειξη: Γράφοντας $|\cdot|$ αντί για vol_n και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Brunn-Minkowski έχουμε

$$\begin{aligned} \partial A &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|A + tB_2^n| - |A|}{t} \geq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\left(|A|^{1/n} + |tB_2^n|^{1/n}\right)^n - |A|}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\left(|A|^{1/n} + t|B_2^n|^{1/n}\right)^n - |A|}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{n \left(|A|^{1/n} + t|B_2^n|^{1/n}\right)^{n-1} |B_2^n|^{1/n}}{1} \\ &= n|A|^{\frac{n-1}{n}} |B_2^n|^{\frac{1}{n}} = n|B_2^n|^{\frac{n-1}{n}} |B_2^n|^{\frac{1}{n}} = n|B_2^n|. \end{aligned}$$

Όμως,

$$\begin{aligned} \partial(B_2^n) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|B_2^n + tB_2^n| - |B_2^n|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|(1+t)B_2^n| - |B_2^n|}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(1+t)^n |B_2^n| - |B_2^n|}{t} = |B_2^n| \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(1+t)^n - 1}{t} \\ &= |B_2^n| \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{n(1+t)^{n-1}}{1} = n|B_2^n|. \end{aligned}$$

Συνεπώς, $\partial A \geq \partial(B_2^n)$. □

Θεώρημα 6.3.5 (Η Ισοπεριμετρική ανισότητα). *Έστω ότι το A είναι υποσύνολο του \mathbb{R}^n το οποίο έχει όγκο και εμβαδόν επιφανείας. Αν $\partial A = \partial(rB_2^n)$ τότε*

$$\text{vol}_n(A) \leq \text{vol}_n(rB_2^n).$$

Απόδειξη: Το σύνολο $(|rB_2^n|^{1/n}/|A|^{1/n})A$ έχει όγκο ίσο με $|rB_2^n|$, διότι:

$$\left| \frac{|rB_2^n|^{1/n}}{|A|^{1/n}} A \right| = \left(\frac{|rB_2^n|^{1/n}}{|A|^{1/n}} \right)^n |A| = |rB_2^n|.$$

Οπότε, θα έχουμε ότι

$$\partial \left(\frac{|rB_2^n|^{1/n}}{|A|^{1/n}} A \right) \geq \partial(rB_2^n).$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 6.3.3 συμπεραίνουμε ότι

$$\left(\frac{|rB_2^n|^{1/n}}{|A|^{1/n}} \right)^{n-1} \partial A \geq \partial(rB_2^n),$$

οπότε $|rB_2^n|/|A| \geq 1$. Επομένως, $|A| \leq |rB_2^n|$. □

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 6.3.1 Έστω ότι το A είναι υποσύνολο του \mathbb{R}^n το οποίο έχει όγκο και εμβαδόν επιφανείας. Αποδείξτε ότι

$$\left(\frac{|A|}{|B_2^n|} \right)^{1/n} \leq \left(\frac{\partial A}{\partial B_2^n} \right)^{1/(n-1)}.$$

6.4 Η ΑΡΧΗ ΤΟΥ BRUNN

Μια άλλη εφαρμογή της ανισότητας Brunn-Minkowski είναι η αρχή του Brunn. Μας περιγράφει μια ιδιότητα του όγκου των τομών ενός σώματος K με υπερεπίπεδο κάθετο σε συγκεκριμένη διεύθυνση.

Θεώρημα 6.4.1. Έστω ότι το K είναι ένα κυρτό σώμα στον \mathbb{R}^n και $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$. Θέτουμε $\theta^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta \rangle = 0\}$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $f_\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_\theta(t) = \text{vol}_{n-1}(K \cap (\theta^\perp + t\theta)).$$

Τότε η $f_\theta^{1/(n-1)}$ είναι κοίλη στον φορέα της.

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\theta = e_n$. Έτσι $f_\theta(t) = \text{vol}_{n-1}(K \cap \{x : x_n = t\})$. Θέτουμε $K(t) = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : (x, t) \in K\}$ οπότε $f_\theta(t) = \text{vol}_{n-1}(K(t))$. Αν τα t, s είναι στον φορέα της f_θ (δηλαδή αν $f_\theta(t) \neq 0$ και $f_\theta(s) \neq 0$) και $\lambda \in [0, 1]$ ισχύει

$$K((1 - \lambda)t + \lambda s) \supseteq (1 - \lambda)K(t) + \lambda K(s).$$

Πράγματι, αν $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$ με $x \in K(t)$ και $y \in K(s)$, τότε $(x, t) \in K$ και $(y, s) \in K$ και από την κυρτότητα του K συμπεραίνουμε ότι $(1 - \lambda)(x, t) + \lambda(y, s) \in K$. Οπότε $((1 - \lambda)x + \lambda y, (1 - \lambda)t + \lambda s) \in K$, δηλαδή $(1 - \lambda)x + \lambda y \in K((1 - \lambda)t + \lambda s)$.

Εφαρμόζουμε τώρα την ανισότητα Brunn-Minkowski στον \mathbb{R}^{n-1} και (γράφοντας $|\cdot|$ για τον $n - 1$ -όγκο) παίρνουμε

$$\begin{aligned} |K((1 - \lambda)t + \lambda s)|^{1/(n-1)} &\geq |(1 - \lambda)K(t) + \lambda K(s)|^{1/(n-1)} \\ &\geq (1 - \lambda)|K(t)|^{1/(n-1)} + \lambda|K(s)|^{1/(n-1)}, \end{aligned}$$

δηλαδή το ζητούμενο. □

Η αρχή του Brunn αποδείχθηκε ως συνέπεια της ανισότητας Brunn-Minkowski. Όμως για κυρτά σύνολα είναι ισοδύναμη με αυτήν. Οι λεπτομέρειες δίνονται στην Άσκηση 6.4.1.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 6.4.1 Αποδείξτε ότι η αρχή του Brunn συνεπάγεται την ανισότητα Brunn-Minkowski ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα.

- (i) Για δυο κυρτά σύνολα K και T στον \mathbb{R}^n θεωρήστε τα $K_1 = K \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $T_1 = T \times \{1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ και

$$L = \text{conv}\{K_1, T_1\} = \{(1 - \lambda)(x, 0) + \lambda(y, 1) : \lambda \in [0, 1], x \in K, y \in T\}.$$

Δείξτε ότι $L(t) = (1 - t)K + tT$ για κάθε $t \in [0, 1]$.

- (ii) Εφαρμόστε την αρχή του Brunn για τα $L(0)$, $L(1)$ και $L(1/2)$.

6.5 ΤΟ ΛΗΜΜΑ ΤΟΥ BOREL

Το λήμμα του Borel μας λέει ότι ο όγκος μειώνεται πολύ γρήγορα από τη στιγμή που αποκοπεί από ένα κυρτό σώμα ένα κυρτό τμήμα του όγκου μεγαλύτερου του $1/2$.

Θεώρημα 6.5.1. Έστω ότι το K είναι ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον \mathbb{R}^n και A ένα κεντρικά συμμετρικό κλειστό και κυρτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n που ικανοποιεί την $\text{vol}_n(K \cap A) =: \delta > 1/2$. Τότε για κάθε $t > 1$ ισχύει

$$\text{vol}_n(K \cap (tA)^c) \leq \delta \left(\frac{1-\delta}{\delta} \right)^{(t+1)/2}.$$

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι

$$(6.3) \quad A^c \supseteq \frac{2}{t+1}(tA)^c + \frac{t-1}{t+1}A.$$

Πράγματι, αν όχι, τότε υπάρχει $a \in A$ ώστε

$$a = \frac{2}{t+1}x + \frac{t-1}{t+1}y,$$

όπου $y \in A$ και $x \in (tA)^c$, δηλαδή $x \notin tA$. Κάνοντας στοιχειώδεις πράξεις προκύπτει ότι

$$\frac{1}{t}x = \frac{t+1}{2t}a + \frac{t-1}{2t}(-y).$$

Το $-y$ ανήκει στο A , αφού το A είναι κεντρικά συμμετρικό. Άρα το x/t γράφεται ως κυρτός συνδυασμός στοιχείων του A . Επειδή το A είναι κυρτό συμπεραίνουμε ότι $x/t \in A$, δηλαδή $x \in tA$ το οποίο είναι άτοπο.

Επιστρέφοντας στην (6.3) και τέμνοντας με το K παίρνουμε

$$K \cap A^c \supseteq \frac{2}{t+1}((tA)^c \cap K) + \frac{t-1}{t+1}(A \cap K).$$

Η ανισότητα Brunn-Minkowski στην πολλαπλασιαστική της μορφή δίνει

$$1 - \delta = |K \cap A^c| \geq |(tA)^c \cap K|^{2/(t+1)} |A \cap K|^{(t-1)/(t+1)},$$

από όπου με απλές πράξεις προκύπτει η ζητούμενη. \square

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 6.5.1 Διερευνήστε και επιβεβαιώστε το λήμμα του Borel όταν $K = B_2^n / |B_2^n|^{1/n}$ και το A είναι κατάλληλο πολλαπλάσιο του K .

Άσκηση 6.5.2 Ίδια άσκηση με την προηγούμενη όταν $K = B_\infty^n / |B_\infty^n|^{1/n}$ και

$$K = \mathcal{B}_i^n / |\mathcal{B}_i^n|^{1/n}.$$

Έστω ότι το K είναι ένα κυρτό σώμα και H υπερεπίπεδο στον \mathbb{R}^n με $0 \in H$. Το συμμετρικό κατά Steiner του K ως προς το H ορίζεται ως εξής: Για κάθε ευθεία L κάθετη στο H με $K \cap L \neq \emptyset$ μετατοπίζουμε το ευθύγραμμο τμήμα $K \cap L$ πάνω στην L μέχρι το κέντρο του να βρεθεί πάνω στο H . Η ένωση όλων αυτών των μετατοπισμένων ευθύγραμμων τμημάτων συμβολίζεται με $St_H(K)$ (ή $St(K)$ αν εννοείται ποιο είναι το υπερεπίπεδο ως προς το οποίο γίνεται η συμμετρικοποίηση), και λέγεται Steiner συμμετρικό του K ως προς το υπερεπίπεδο H . Θα ακολουθήσει ο αυστηρός ορισμός της συμμετρικοποίησης.

7.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΠΟΙΗΣΗΣ STEINER

Αν το H είναι υπερεπίπεδο που περνάει από την αρχή των αξόνων θα γράφουμε $Proj_H$ για την ορθογώνια προβολή πάνω το H . Αν για παράδειγμα το u είναι μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο H τότε $Proj_H(x) = x - \langle x, u \rangle u$.

Ορισμός 7.1.1. Έστω ότι το K είναι ένα κυρτό σώμα στον \mathbb{R}^n και H υπερεπίπεδο στον \mathbb{R}^n ώστε $0 \in H$. Το συμμετρικό κατά Steiner του K ως προς το H ορίζεται να είναι το σύνολο

$$St_H(K) = \left\{ y + \lambda u : y \in Proj_H(K) \text{ και } |\lambda| \leq \frac{1}{2} |K \cap (y + \mathbb{R}u)| \right\},$$

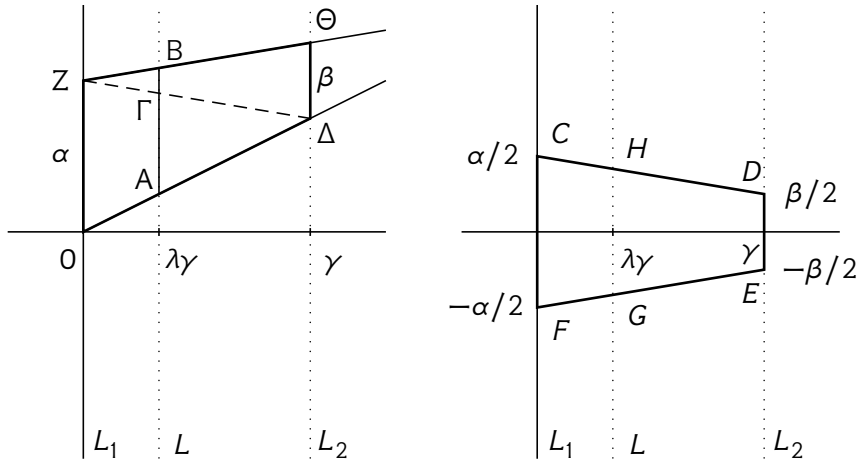
όπου το u να είναι κάθετο στο H , $\|u\|_2 = 1$ και $\mathbb{R}u := \{ru : r \in \mathbb{R}\}$.

Στα παρακάτω το H θα είναι ένα υπερεπίπεδο με $0 \in H$ και L η κάθετη ευθεία στο H που περνάει από το 0 , όπως στο Σχήμα 7.2 (σελίδα 105). Αν το υπερεπίπεδο εννοείται ποιο είναι ή ισχύει κάτι οποιοδήποτε και αν είναι το H τότε θα γράφουμε και $St(K)$ παραλείποντας το H από τον συμβολισμό.

Ακολουθεί μια σειρά προτάσεων που περιγράφουν διάφορες από τις ιδιότητες της συμμετρικοποίησης Steiner.

Λήμμα 7.1.2. Αν το $T \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι ένα τραπέζιο με τις παράλληλες πλευρές του κάθετες στο υπερεπίπεδο (εδώ ευθεία) H τότε η συμμετρικοποίηση Steiner του T ως προς το H είναι και πάλι τραπέζιο.

Πριν δώσουμε την αυστηρή απόδειξη και για να γίνει αυτή ευκολότερα κατανοητή κοιτάξτε στο Σχήμα 7.1. Στα αριστερά βλέπουμε το τραπέζιο T το οποίο είναι να συμμετριοποιηθεί. Στα δεξιά έχουμε το τραπέζιο που σχηματίζεται με την κυρτή θήκη των συμμετριοποιημένων βάσεων του αρχικού τραapeζίου. Δηλαδή το σχήμα που εικονίζεται στα δεξιά δεν



ΣΧΗΜΑ 7.1: Τραπεζίο και η κυρτή θήκη των συμμετριοποιημένων πλευρών πάνω στις ευθείες L_1 και L_2 .

είναι a priori το συμμετριοποιημένο τραπέζιο του δεξιού σχήματος, αλλά το τραπέζιο που σχηματίζεται αν συμμετριοποιήσουμε τις βάσεις (και μόνο) του αρχικού τραapeζίου και στη συνέχεια πάρουμε την κυρτή τους θήκη. Αυτό που θέλουμε να δείξουμε για να αποδειχθεί το παραπάνω λήμμα είναι ότι $St(T) = CDEF$. Αυτό θα είναι σωστό αν αποδείξουμε ότι η τομή του T με την ευθεία L , δηλαδή το ευθύγραμμο τμήμα AB , έχει το ίδιο μήκος με την τομή του $CDEF$ με την L , δηλαδή το τμήμα GH .

Απόδειξη του λήμματος: Θεωρούμε τραπέζιο T με τις βάσεις του κάθετες στον άξονα των x και υποθέτουμε επίσης ότι η μία κορυφή του είναι στην αρχή των αξόνων, με τη μία βάση του μήκους a πάνω τον άξονα των y , ενώ η άλλη βάση του με μήκος b έχει τετμημένη γ (δείτε Σχήμα 7.1). Έστω ότι $\lambda \in (0, 1)$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι το μήκος της τομής του T με την ευθεία L παράλληλη στις βάσεις του τραapeζίου και με τετμημένη $\lambda\gamma$ έχει μήκος $(1 - \lambda)a + \lambda b$. Αν αποδειχθεί αυτό θα ολοκληρωθεί η απόδειξη αφού τα στοιχεία που συνιστούν αυτή την έκφραση (δηλαδή

τα λ , α και β) παραμένουν τα ίδια και στο τραπέζιο

$$\text{conv}\{\{0\} \times [-\alpha/2, \alpha/2], \{\gamma\} \times [-\beta/2, \beta/2]\},$$

που είναι σχεδιασμένο στα δεξιά του Σχήματος 7.1. Αυτό τώρα είναι εύκολο: φέρνουμε τη βοηθητική ευθεία $Z\Delta$ που τέμνει την AB στο Γ . Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι τα όμοια τρίγωνα έχουν λόγο ομοιότητας ίσο με τον λόγο των υψών τους παίρνουμε ότι

$$\frac{B\Gamma}{\beta} = \frac{\lambda\gamma}{\gamma} = \lambda \quad \text{and} \quad \frac{A\Gamma}{\alpha} = \frac{(1-\lambda)\gamma}{\gamma} = 1 - \lambda.$$

Οπότε

$$AB = A\Gamma + B\Gamma = (1 - \lambda)\alpha + \lambda\beta,$$

δηλαδή το ζητούμενο. \square

Λήμμα 7.1.3. Για κάθε (μετρήσιμο) σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}^n$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει $\text{St}_H(K + x) = \text{St}_H(K) + \text{Proj}_H(x)$.

Απόδειξη: Έστω ότι $H = \mathbb{R}^{n-1}$ και u ένα κάθετο στον H μοναδιαίο διάνυσμα. Αν πάρουμε ένα στοιχείο $(z, \lambda) \in \mathbb{R}^n$, όπου $z \in \mathbb{R}^{n-1}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε αυτό ανήκει στο $\text{St}_H(K + x)$ αν και μόνο αν γράφεται ως (z, λ) όπου $z \in \text{Proj}_H(K + x)$ και $|\lambda| \leq (1/2)|(K + x) \cap (z + \mathbb{R}u)|$. Αλλά από τη γραμμικότητα της προβολής ισχύει $\text{Proj}_H(K + x) = \text{Proj}_H(K) + \text{Proj}_H(x)$. Επίσης

$$|(K + x) \cap (z + \mathbb{R}u)| = |K \cap ((z - x) + \mathbb{R}u)|,$$

αφού το μήκος είναι αναλλοίωτο στις μεταφορές. Εύκολα βλέπουμε (επειδή $u \perp H$) ότι $(z - x) + \mathbb{R}u = z - \text{Proj}_H(x) + \mathbb{R}u$. Οπότε $(z, \lambda) \in \text{St}_H(K + x)$ αν και μόνο αν $z - \text{Proj}_H(x) \in \text{Proj}_H(K)$ και

$$|\lambda| \leq \frac{1}{2} \left| K \cap \left((z - \text{Proj}_H(x)) + \mathbb{R}u \right) \right|.$$

Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν $(z - \text{Proj}_H(x), \lambda) \in \text{St}_H(K)$ δηλαδή αν και μόνο αν $(z, \lambda) \in \text{St}_H(K) + \text{Proj}_H(x)$. \square

Πρόταση 7.1.4. Για κάθε κυρτό σώμα K , το $\text{St}(K)$ είναι κυρτό σώμα.

Απόδειξη: Το K ως συμπαγές είναι φραγμένο. Άρα υπάρχει $R > 0$ ώστε $K \subseteq B_2^n(0, R)$. Συνεπώς $\text{St}(K) \subseteq B_2^n(0, R)$, οπότε το $\text{St}(K)$ φραγμένο.

Επίσης εύκολα βλέπουμε ότι είναι κλειστό. Πράγματι,

$$\text{St}(K) = \left\{ (y, \lambda) : y \in \text{Proj}_H(K) \text{ και } |\lambda| \leq \frac{1}{2}|K \cap (y + \mathbb{R}u)| \right\},$$

όπου το u είναι κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στον υπερεπίπεδο H και τα y θεωρούνται ως σημεία του \mathbb{R}^{n-1} . Έτσι, αν θεωρήσουμε μια ακολουθία σημείων (y_m, λ_m) μέσα στο $\text{St}(K)$ που συγκλίνει έστω στο (y, λ) (ως προς την ευκλείδεια νόρμα) τότε από τις ιδιότητες της απόστασης $y_m \rightarrow y$ και $\lambda_m \rightarrow \lambda$. Αλλά η προβολή $\text{Proj}_H(K)$ είναι κλειστό σύνολο, αφού το K είναι συμπαγές η απεικόνιση Proj_H είναι συνεχής όπως είδαμε στο τέλος της Ενότητας 1.2 σελίδα 11 (δείτε και Πρόταση 1.1.15). Άρα $y \in \text{Proj}_H(K)$. Επίσης $|\lambda_m| \leq \frac{1}{2}|K \cap (y_m + \mathbb{R}u)|$ και περνώντας στο όριο συμπεραίνουμε $|\lambda| \leq \frac{1}{2}|K \cap (y + \mathbb{R}u)|$. Συνεπώς $(y, \lambda) \in \text{St}(K)$ οπότε το $\text{St}(K)$ είναι κλειστό. Αφού είναι και φραγμένο είναι συμπαγές υποσύνολο του \mathbb{R}^n .

Επειδή το K έχει μη κενό εσωτερικό θεωρούμε μια ευκλείδεια μπάλα $B_2^n(x, \epsilon) \subseteq K$ για κατάλληλα $x \in K$ και $\epsilon > 0$. Οπότε $B_2^n(0, \epsilon) \subseteq K - x$. Επειδή η συμμετρικοποίηση Steiner αφήνει αναλλοίωτες τις ευκλείδειες μπάλες, συμπεραίνουμε ότι $B_2^n(0, \epsilon) \subseteq \text{St}(K - x)$. Από το Λήμμα 7.1.3 έχουμε ότι $\text{St}(K - x) = \text{St}(K) - \text{Proj}_H(x)$ οπότε $B_2^n(\text{Proj}_H(x), \epsilon) \subseteq \text{St}(K)$, δηλαδή το συμμετρικοποιημένο K έχει μη κενό εσωτερικό. Μένει ναδειχθεί ότι το $\text{St}(K)$ είναι κυρτό. Αν τα x, y ανήκουν στο $\text{St}(K)$ θεωρούμε το τραπέζιο

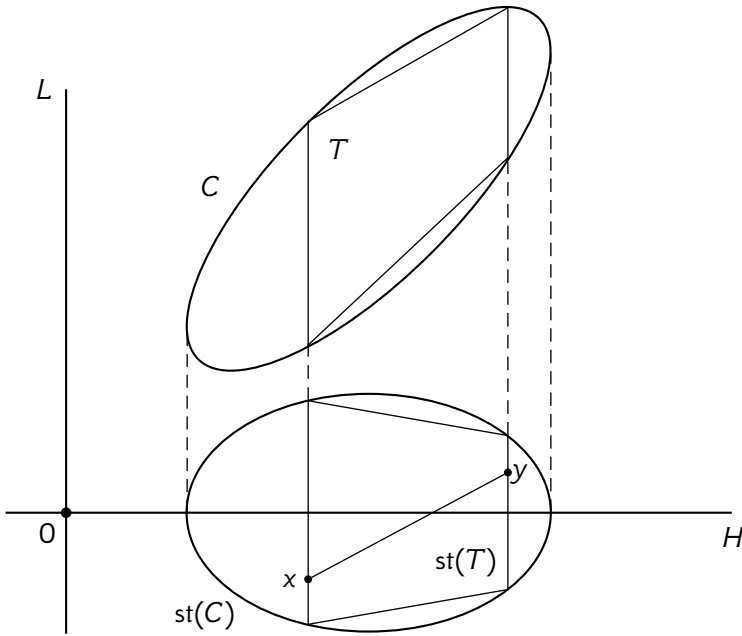
$$T = \text{conv}((K \cap (L + x)) \cup (K \cap (L + y))) \subseteq K$$

(δείτε Σχήμα 7.2). Αφού τα x, y ανήκουν στο $\text{St}(T)$ και από το Λήμμα 7.1.2 το $\text{St}(T)$ είναι τραπέζιο, οπότε κυρτό, συνεπάγεται ότι $[x, y] \subseteq \text{St}(T) \subseteq \text{St}(K)$, δηλαδή το $\text{St}(K)$ είναι κυρτό, ολοκληρώνοντας την απόδειξη. \square

Πρόταση 7.1.5. Για κάθε K κυρτό σώμα στον \mathbb{R}^n και $c \geq 0$ ισχύει

$$\text{St}(cK) = c\text{St}(K).$$

Απόδειξη: Έστω ότι $c \in \mathbb{R}$ μεγαλύτερο του 0. Από τον ορισμό της



ΣΧΗΜΑ 7.2: Η συμμετρικοποίηση Steiner. Το συμμετρικοποιημένο σώμα είναι κυρτό.

συμμετρικοποίησης θα έχουμε,

$$\begin{aligned}
 \text{St}(cK) &= \left\{ y + \lambda u : y \in \text{Proj}_H(cK) \text{ και } |\lambda| \leq \frac{1}{2} |cK \cap (y + \mathbb{R}u)| \right\} \\
 &= \left\{ y + \lambda u : y \in c\text{Proj}_H(K) \text{ και } |\lambda| \leq \frac{1}{2} \left| cK \cap c \left(\frac{y}{c} + \mathbb{R}u \right) \right| \right\} \\
 &= \left\{ y + \lambda u : \frac{y}{c} \in \text{Proj}_H(K) \text{ και } \frac{|\lambda|}{c} \leq \frac{1}{2} \left| K \cap \left(\frac{y}{c} + \mathbb{R}u \right) \right| \right\}.
 \end{aligned}$$

Θέτουμε $x = y/c$ και $\mu = \lambda/c$. Οπότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{St}(cK) &= \left\{ cx + c\mu u : x \in \text{Proj}_H(K) \text{ και } |\mu| \leq \frac{1}{2}|K \cap (x + \mathbb{R}u)| \right\} \\ &= c \left\{ x + \mu u : x \in \text{Proj}_H(K) \text{ και } |\mu| \leq \frac{1}{2}|K \cap (x + \mathbb{R}u)| \right\} \\ &= c\text{St}(K). \end{aligned} \quad \square$$

Πρόταση 7.1.6. Για οποιαδήποτε κυρτά σώματα K, D στον \mathbb{R}^n ισχύει

$$\text{St}(K + D) \supseteq \text{St}(K) + \text{St}(D).$$

Απόδειξη: Έστω ότι $x \in \text{St}(K)$ και $y \in \text{St}(D)$. Ισοδύναμα θα έχουμε ότι $x = h + l$ και $y = k + m$, όπου τα h, k ανήκουν στο H και τα l, m ανήκουν στην L , και ισχύει

$$|l| \leq \frac{1}{2}|(K \cap (L + x))| \quad \text{και} \quad |m| \leq \frac{1}{2}|(D \cap (L + y))|.$$

Έτσι, $x + y = (h + k) + (l + m)$. Φανερά $h + k \in H$, $l + m \in L$ και

$$(7.1) \quad |l + m| \leq |l| + |m| \leq \frac{1}{2} (|(K \cap (L + x))| + |(D \cap (L + y))|).$$

Όμως

$$K \cap (L + x) + D \cap (L + y) \subseteq (K + D) \cap (L + x + y)$$

και από την Brunn-Minkowski παίρνουμε ότι

$$|K \cap (L + x) + D \cap (L + y)| \geq |(K \cap (L + x))| + |(D \cap (L + y))|.$$

Έτσι συνεχίζοντας την (7.1) οδηγούμαστε στην

$$|l + m| \leq |l| + |m| \leq \frac{1}{2} |(K + D) \cap (L + x + y)|.$$

Συμπεπώς, το $x + y$ ανήκει στο $\text{St}(K + D)$. □

Πρόταση 7.1.7. Για οποιαδήποτε κυρτά σώματα K, D στον \mathbb{R}^n , αν $K \subseteq D$ τότε $\text{St}(K) \subseteq \text{St}(D)$.

Απόδειξη: Αφού $K \subseteq D$ ισχύει $K \cap (L + x) \subseteq D \cap (L + x)$ οπότε θα έχουμε

ότι

$$(7.2) \quad |K \cap (L + x)| \leq |D \cap (L + x)|.$$

Έστω ότι $z \in \text{St}(K)$. Τότε

$$z = (\text{Proj}_H z) + \lambda u \text{ με } |\lambda| \leq |K \cap (L + z)|.$$

Από την (7.2) συνεπάγεται ότι

$$z = (\text{Proj}_H z) + \lambda u \text{ με } |\lambda| \leq |D \cap (L + z)|.$$

Άρα, $z \in \text{St}(D)$. Επομένως, $\text{St}(K) \subseteq \text{St}(D)$. □

Πρόταση 7.1.8. *Για κάθε υπερεπίπεδο H η St_H ως απεικόνιση από τα κυρτά σώματα στα κυρτά σώματα είναι συνεχής.*

Απόδειξη: Αν τα K, K_1, K_2, \dots είναι κυρτά σώματα στον \mathbb{R}^n και $K_m \rightarrow K$, θα δείξουμε ότι

$$\text{St}(K_m) \rightarrow \text{St}(K).$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $0 \in \text{int}(K)$. Από το Πρόρισμα 5.1.3, το K_m συγκλίνει στο K αν και μόνον αν για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $m \geq m_0$ να ισχύει

$$(1 - \epsilon)K \subseteq K_m \subseteq (1 + \epsilon)K.$$

Άρα,

$$(1 - \epsilon)\text{St}(K) \subseteq \text{St}(K_m) \subseteq \text{St}(K)(1 + \epsilon)$$

δηλαδή το ζητούμενο. □

Πρόταση 7.1.9. *Για κάθε κυρτό σώμα K στον \mathbb{R}^n ισχύει*

$$\text{vol}(\text{St}(K)) = \text{vol}(K).$$

Απόδειξη: Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η συμμετρικοποίηση είναι ως προς το υπερεπίπεδο των πρώτων $n-1$ συντεταγμένων.

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 \text{vol}(K) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \chi_K((x_1, x_2, \dots, x_n)) dx_n dx_1 \dots dx_{n-1} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |K \cap (L + (x_1, \dots, x_{n-1}))| dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |\text{St}(K) \cap (L + (x_1, \dots, x_{n-1}))| dx_1 dx_2 \dots dx_n \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\text{St}(K)}((x_1, x_2, \dots, x_n)) dx_n dx_1 \dots dx_{n-1} \\
 &= \text{vol}(\text{St}(K)),
 \end{aligned}$$

αφού από τον ορισμό της συμμετρικοποίησης ισχύει $|K \cap (L + x)| = |\text{St}(K) \cap (L + x)|$. \square

Πρόταση 7.1.10. Για κάθε κυρτό σώμα K στον \mathbb{R}^n ισχύει

$$\partial(\text{St}(K)) \leq \partial(K).$$

Απόδειξη: Έχουμε

$$\text{St}(K + \epsilon B_2^n) \supseteq \text{St}(K) + \text{St}(\epsilon B_2^n) = \text{St}(K) + \epsilon B_2^n$$

οπότε

$$\begin{aligned}
 \frac{\text{vol}(\text{St}(K) + \epsilon B_2^n) - \text{vol}(\text{St}(K))}{\epsilon} &\leq \frac{\text{vol}(\text{St}(K + \epsilon B_2^n)) - \text{vol}(\text{St}(K))}{\epsilon} \\
 &= \frac{\text{vol}(K + \epsilon B_2^n) - \text{vol}(K)}{\epsilon}.
 \end{aligned}$$

Από τον ορισμό του εμβαδού επιφανείας προκύπτει ότι $\partial(\text{St}(K)) \leq \partial(K)$. \square

Πρόταση 7.1.11. Για κάθε κυρτό σώμα K στον \mathbb{R}^n ισχύει $\text{diam}(\text{St}(K)) \leq \text{diam}(K)$.

Απόδειξη: Αν $x, y \in \text{St}(K)$ και $T, \text{St}(T)$ τα τραπέζια όπως στο Λήμμα 7.1.2, τότε τουλάχιστον μια από τις διαγώνιες του T έχει μήκος μεγαλύτερο ή ίσο από $\|x - y\|_2$. Άρα, $\text{diam}(\text{St}(K)) \leq \text{diam}(K)$. \square

Πρόταση 7.1.12. Για κάθε κυρτό σώμα K στον \mathbb{R}^n αν $r(K) = \max\{r >$

$0 : \rho B_2^n \subseteq K$ και $R(K) = \min\{\rho > 0 : K \subseteq \rho B_2^n\}$, τότε

$$r(\text{St}(K)) \geq r(K) \text{ και } R(\text{St}(K)) \leq R(K).$$

Απόδειξη: Αν $\rho B_2^n \subseteq K$ τότε $\rho B_2^n \subseteq \text{St}(K)$ οπότε

$$\{\rho > 0 : \rho B_2^n \subseteq K\} \subseteq \{\rho > 0 : \rho B_2^n \subseteq \text{St}(K)\},$$

και άρα $r(K) \leq r(\text{St}(K))$. Ομοίως, για τα $R(\text{St}(K))$ και $R(K)$. □

Πρόταση 7.1.13. Έστω ότι το K είναι ένα κυρτό και κεντρικά συμμετρικό σώμα στον \mathbb{R}^n . Η συμμετρικοποίηση Steiner ως προς οποιοδήποτε υπερεπίπεδο, ικανοποιεί την

$$\text{vol}\left(\left(\text{St}(K)\right)^\circ\right) \geq \text{vol}\left(K^\circ\right).$$

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας θα υποθέσουμε ότι η συμμετρικοποίηση γίνεται ως προς το διάνυσμα $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$, δηλαδή το υπερεπίπεδο \mathbb{R}^{n-1} (αλλιώς αλλάζουμε κατάλληλα το σύστημα συντεταγμένων του \mathbb{R}^n). Επειδή κάθε διάνυσμα στον \mathbb{R}^n γράφεται ως (x, r) με $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ και $r \in \mathbb{R}$ μπορούμε να γράψουμε

$$\text{St}(K) = \left\{ \left(x, \frac{1}{2}(s-r) \right) : (x, s), (x, r) \in K \right\}.$$

Έχουμε:

$$(7.3) \quad K^\circ = \{(y, t) \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle + st \leq 1 \ (x, s) \in K\},$$

όπου $x, y \in \mathbb{R}^{n-1}$ και $s, t \in \mathbb{R}$. Ομοίως,

(7.4)

$$\left(\text{St}(K)\right)^\circ = \left\{ (w, t) \in \mathbb{R}^n : \langle x, w \rangle + \frac{1}{2}(s-r)t \leq 1, (x, s), (x, r) \in K \right\},$$

όπου $x, w \in \mathbb{R}^{n-1}$ και $r, s, t \in \mathbb{R}$. Για κάθε σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}$ γράφουμε $A(t) = \{v \in \mathbb{R}^{n-1} : (v, t) \in A\}$. Δηλαδή, το $A(t) \times \{t\}$

είναι η τομή του A σε ύψος t με επίπεδο παράλληλο στον \mathbb{R}^{n-1} . Έχουμε

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(K^\circ(t) + K^\circ(-t)) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ v \in \mathbb{R}^{n-1} : (v, t) \in K^\circ \right\} + \frac{1}{2} \left\{ u \in \mathbb{R}^{n-1} : (u, -t) \in K^\circ \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v : (v, t) \in K^\circ, (u, -t) \in K^\circ \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v : \langle x, v \rangle + st \leq 1, (x, s) \in K, \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \langle x, u \rangle + r(-t) \leq 1, (x, r) \in K \right\} \end{aligned}$$

(προσθέτοντας κατά μέλη τις $\langle x, u \rangle + st \leq 1$ και $\langle x, u \rangle + r(-t) \leq 1$)

$$\subseteq \left\{ \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v : \left\langle x, \frac{1}{2}(u + v) \right\rangle + \frac{1}{2}(s - r)t \leq 1, (x, s), (x, r) \in K \right\}.$$

Θέτουμε $w = (1/2)u + (1/2)v$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(K^\circ(t) + K^\circ(-t)) &\subseteq \left\{ w : \langle x, w \rangle + \frac{1}{2}(s - r)t \leq 1, (x, s), (x, r) \in K \right\} \\ &\subseteq (\text{St}(K))^\circ(t), \end{aligned}$$

από την (7.4). Εφαρμόζοντας τώρα την ανισότητα Brunn-Minkowski στον \mathbb{R}^{n-1} παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned} & \text{vol}_{n-1} \left((\text{St}(K))^\circ(t) \right)^{\frac{1}{n-1}} \\ & \geq \text{vol}_{n-1} \left(\frac{1}{2}K^\circ(t) \right)^{\frac{1}{n-1}} + \text{vol}_{n-1} \left(\frac{1}{2}K^\circ(-t) \right)^{\frac{1}{n-1}} \\ & = 2 \text{vol}_{n-1} \left(\frac{1}{2}K^\circ(t) \right)^{\frac{1}{n-1}}, \end{aligned}$$

αφού το K° είναι κεντρικά συμμετρικό. Άρα,

$$\begin{aligned} \text{vol}_{n-1}\left(\left(\text{St}(K)\right)^\circ(t)\right) &\geq 2^{n-1} \text{vol}_{n-1}\left(\frac{1}{2}K^\circ(t)\right) \\ &= 2^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{vol}_{n-1}(K^\circ(t)) \end{aligned}$$

οπότε,

$$\text{vol}_{n-1}\left(\left(\text{St}(K)\right)^\circ(t)\right) \geq \text{vol}_{n-1}(K^\circ(t)),$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$, άρα,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{vol}_{n-1}\left(\left(\text{St}(K)\right)^\circ(t)\right) dt \geq \int_{-\infty}^{\infty} \text{vol}_{n-1}(K^\circ(t)) dt$$

από την οποία προκύπτει,

$$\text{vol}_n\left(\left(\text{St}(K)\right)^\circ\right) \geq \text{vol}_n(K^\circ). \quad \square$$

7.2 ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΦΑΙΡΙΚΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ GROSS

Το θεώρημα σφαιρικότητας του Gross μάς λέει ότι οποιοδήποτε κυρτό σώμα μπορεί να συμμετριοποιηθεί με μια ακολουθία κατάλληλων υπερεπιπέδων ώστε τα σώματα που προκύπτουν να συγκλίνουν σε κατάλληλο πολλαπλάσιο της ευκλείδειας μπάλας. Το θεώρημα αυτό χρησιμοποιείται συχνά για να λυθούν προβλήματα βελτιστοποίησης όπως η ισοπεριμετρική ανισότητα ή η ανισότητα Blaschke-Santaló που θα δούμε παρακάτω.

Θεώρημα 7.2.1. Έστω K κυρτό σώμα στον \mathbb{R}^n με $\text{vol}_n(K) = \text{vol}_n(B_2^n)$. Θέτουμε \mathcal{A} να είναι η οικογένεια όλων των κυρτών σωμάτων που προκύπτουν από το K μέσω πεπερασμένου πλήθους διαδοχικών συμμετριοποιήσεων Steiner ως προς υπερεπίπεδα που περνούν από το 0 . Τότε υπάρχει ακολουθία $K_m \in \mathcal{A}$ ώστε

$$K_m \rightarrow B_2^n,$$

ως προς τη μετρική Hausdorff.

Απόδειξη: Θέτουμε $\rho = \inf\{R(L) : L \in \mathcal{A}\}$. Δηλαδή η ρ είναι η ελάχιστη ακτίνα ευκλείδειας μπάλας κέντρου 0 , που περιέχει στοιχείο του \mathcal{A} . Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του infimum θεωρούμε ακολουθία $K_m \in$

\mathcal{A} με

$$(7.5) \quad R(K_m) \rightarrow \rho.$$

Άρα, υπάρχει $M > 0$ ώστε $R(K_m) \leq M$, για κάθε $m \in \mathbb{N}$, αφού η $R(K_m)$ ως συγκλίνουσα (στο ρ) είναι φραγμένη. Οπότε, από το θεώρημα επιλογής του *Blaschke*, η K_m έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Μετονομάζουμε αυτή την υπακολουθία σε K_m οπότε υποθέτουμε ότι η K_m συγκλίνει, έστω στο K_0 .

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ: $R(K_0) = \rho$.

[Απόδειξη του Ισχυρισμού: Αφού $K_m \rightarrow K_0$, δηλαδή $\delta(K_m, K_0) \rightarrow 0$, για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $m \geq m_0$, ισχύει $\delta(K_m, K_0) < \epsilon$. Οπότε $K_m \subseteq K_0 + \epsilon B_2^n$ και $K_0 \subseteq K_m + \epsilon B_2^n$. Επειδή $K_0 \subseteq R(K_0)B_2^n$, έχουμε

$$K_0 + \epsilon B_2^n \subseteq (R(K_0) + \epsilon)B_2^n \text{ άρα } R(K_0 + \epsilon B_2^n) \leq R(K_0) + \epsilon.$$

Όμοια, για τα K_m ισχύει

$$R(K_m + \epsilon B_2^n) \leq R(K_m) + \epsilon.$$

Οπότε θα έχουμε

$$R(K_m) \leq R(K_0 + \epsilon B_2^n) \leq R(K_0) + \epsilon,$$

και

$$R(K_0) \leq R(K_m + \epsilon B_2^n) \leq R(K_m) + \epsilon.$$

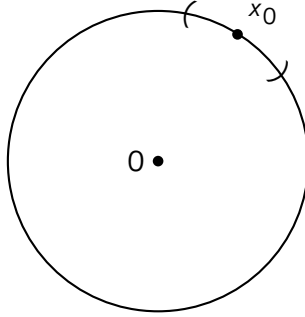
Δηλαδή, $R(K_m) - R(K_0) \leq \epsilon$ και $R(K_0) - R(K_m) \leq \epsilon$. Έτσι, $|R(K_m) - R(K_0)| \leq \epsilon$, για κάθε $m \geq m_0$. Επομένως,

$$(7.6) \quad R(K_m) \rightarrow R(K_0).$$

Από τις (7.5), (7.6) και από τη μοναδικότητα του ορίου έχουμε ότι $R(K_0) = \rho$.]

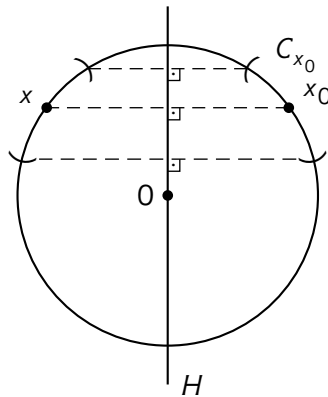
Αφού δείξαμε ότι $\rho = R(K_0)$ συνεπάγεται ότι $K_0 \subseteq \rho B_2^n$. Θα αποδείξουμε ότι $K_0 = \rho B_2^n$. Αν αυτό δεν είναι σωστό, αν δηλαδή, $K_0 \subsetneq \rho B_2^n$, τότε $\rho S^{n-1} \not\subseteq K_0$: πράγματι, αν $\rho S^{n-1} \subseteq K_0$, αφού το K_0 είναι κυρτό θα παίρναμε $\rho B_2^n = \text{conv}(\rho S^{n-1}) \subseteq K_0$ το οποίο είναι άτοπο. Άρα υπάρχει $x_0 \in \rho S^{n-1} \setminus K_0$. Επειδή το $\mathbb{R}^n \setminus K_0$ είναι ανοικτό υπάρχει ανοικτή μπάλα με κέντρο το x_0 που δεν τέμνει το K_0 . Τέμνοντας αυτή τη μπάλα με το ρS^{n-1} βρίσκουμε μια ανοικτή περιοχή του x_0 , έστω

C_{x_0} , πάνω στη σφαίρα $\rho\mathbb{S}^{n-1}$ ώστε $C_{x_0} \cap K_0 = \emptyset$. Κάνοντας τώρα



ΣΧΗΜΑ 7.3: Η περιοχή C_{x_0} του x_0 πάνω στη σφαίρα $\rho\mathbb{S}^{n-1}$.

ανακλάσεις της περιοχής με κέντρο το x_0 ως προς υπερεπίπεδα που περνάνε από το O , μπορούμε να καλύψουμε τη σφαίρα: πράγματι, για κάθε $x \in \rho\mathbb{S}^{n-1}$ η ανάκλαση της C_{x_0} ως προς το υπερεπίπεδο που περνάει από το O και είναι κάθετο στη χορδή $[x, x_0]$ είναι μια ανοικτή περιοχή C_x του x (δείτε Σχήμα 7.4). Φανερά



ΣΧΗΜΑ 7.4: Η ανάκλαση της C_{x_0} δίνει ανοικτή περιοχή του x .

$$\rho\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \bigcup_{x \in \rho\mathbb{S}^{n-1}} C_x$$

και από τη συμπαγεία της $\rho\mathbb{S}^{n-1}$, υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.

Άρα υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ και $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{S}^{n-1}$ ώστε

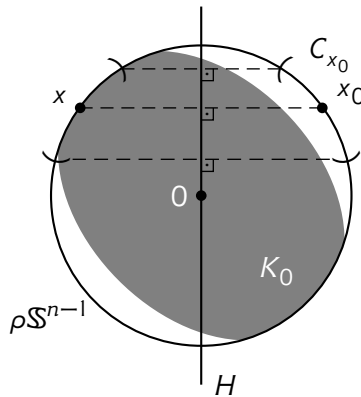
$$\rho\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \bigcup_{j=1}^N C_{x_j},$$

όπου τα C_{x_j} είναι ανακλάσεις της C_{x_0} που περιγράψαμε παραπάνω.

Ας υποθέσουμε πως για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούνται τα υπερπίπεδα H_1, H_2, \dots, H_k . Θέτουμε

$$D_0 = \text{St}_{H_k}(\text{St}_{H_{k-1}}(\dots \text{St}_{H_2}(\text{St}_{H_1}(K_0)) \dots)).$$

Παρατηρούμε ότι $D_0 \subseteq \text{int}(\rho B_2^n)$, διότι κάθε χορδή του K που συμμετρικοποιείται ως προς οποιοδήποτε από τα H_j έχει μικρότερο μήκος από τη αντίστοιχη χορδή της ρB_2^n , αφού το K δεν τέμνει το C_{x_0} (δείτε το Σχήμα 7.5).



ΣΧΗΜΑ 7.5: Η συμμετρικοποίηση ως προς το H δίνει σώμα που δεν τέμνει ούτε την C_{x_0} ούτε την C_x .

Άρα, αφού $D_0 \subseteq \text{int}(\rho B_2^n)$ τότε $R(D_0) < \rho$. Από τη συνέχεια της συμμετρικοποίησης ως προς τη μετρική Hausdorff, αφού $K_m \rightarrow K_0$ συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} D_m &:= \text{St}_{H_k}(\text{St}_{H_{k-1}}(\dots \text{St}_{H_2}(\text{St}_{H_1}(K_m)) \dots)) \\ &\rightarrow \text{St}_{H_k}(\text{St}_{H_{k-1}}(\dots \text{St}_{H_2}(\text{St}_{H_1}(K_0)) \dots)) = D_0. \end{aligned}$$

Όμως $D_m \in \mathcal{A}$ και από τη συνέχεια της R θα ισχύει: $R(D_m) \rightarrow R(D_0) <$

ρ . Άρα, υπάρχει m_0 ώστε $R(D_{m_0}) < \rho$ και $D_{m_0} \in \mathcal{A}$. Αυτό είναι άτοπο, διότι το ρ είναι η ελάχιστη ακτίνα περιγεγραμμένης μπάλας στοιχείου της \mathcal{A} .

Τέλος, επειδή η συμμετρικοποίηση διατηρεί τον όγκο και ο όγκος είναι συνεχής συνάρτηση στα κυρτά σώματα ως προς τη μετρική Hausdorff, έχουμε ότι

$$\text{vol}_n(B_2^n) = \text{vol}_n(K) = \text{vol}_n(K_0) = \text{vol}_n(\rho B_2^n).$$

Άρα, $\rho = 1$. Συνεπώς, $K_0 = B_2^n$. Οπότε, $K_m \rightarrow B_2^n$. □

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 7.2.1 Αποδείξτε ότι για κάθε κυρτό σώμα K στον \mathbb{R}^n υπάρχει ακολουθία υπερεπιπέδων H_1, H_2, \dots ώστε η ακολουθία κυρτών σωμάτων

$$K_m = \text{St}_{H_m}(\text{St}_{H_{m-1}}(\dots \text{St}_{H_1}(K)))$$

να συγκλίνει στο rB_2^n για κατάλληλο $r > 0$. (Υπόδειξη: Εφαρμόστε το Θεώρημα του Gross για να βρείτε K_1 που προκύπτει από το K με πεπερασμένο πλήθος συμμετρικοποιήσεων που να απέχει από το rB_2^n λιγότερο από 1. Στη συνέχεια εφαρμόστε το Θεώρημα του Gross, όχι για το K αλλά για το K_1 .)

Άσκηση 7.2.2 Έστω ότι τα K και T είναι κυρτά σώματα στον \mathbb{R}^n . Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία υπερεπιπέδων H_1, H_2, \dots που περνάνε από την αρχή των αξόνων ώστε η ακολουθία

$$K_m = \text{St}_{H_m}(\dots (\text{St}_{H_2}(\text{St}_{H_1}(K))) \dots)$$

και η

$$T_m = \text{St}_{H_m}(\dots (\text{St}_{H_2}(\text{St}_{H_1}(T))) \dots)$$

να συγκλίνουν στα $\text{vol}(K)^{1/n} B_2^n$ και $\text{vol}(T)^{1/n} B_2^n$ αντίστοιχα. (Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε την Άσκηση 7.2.1 το γεγονός ότι αν για ένα σύνολο A ισχύει $rB_2^n \subseteq A \subseteq RB_2^n$ οποιαδήποτε συμμετρικοποίησή του θα συνεχίσει να ικανοποιεί τους προηγούμενους εγκλεισμούς).

Άσκηση 7.2.3 Αποδείξτε (χωρίς τη χρήση της ανισότητας Brunn-Minkowski) ότι αν $K = rB_2^n$ και $T = RB_2^n$ τότε

$$\text{vol}(K + T)^{1/n} \geq \text{vol}(K)^{1/n} + \text{vol}(T)^{1/n}.$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιήστε αυτό και την Άσκηση 7.2.2 για να παραγάγετε μια άλλη απόδειξη της ανισότητας Brunn-Minkowski (χωρίς τη χρήση της ανισότητας Prekora-Leindler).

7.3 Η ΙΣΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ (2Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ)

Σε αυτή την ενότητα αποδεικνύουμε την ισοπεριμετρική ανισότητα με τη βοήθεια της συμμετριοποίησης Steiner.

Θεωρούμε κυρτό σώμα K στον \mathbb{R}^n με $|K| = |B_2^n|$. Από το θεώρημα σφαιρικότητας του Gross, υπάρχει ακολουθία κυρτών σωμάτων, έστω ότι είναι η $K_1, K_2, \dots, K_m, \dots$, που προκύπτει από το K μέσω πεπερασμένου πλήθους διαδοχικών συμμετριοποιήσεων Steiner ως προς υπερεπίπεδα που περνούν από το 0 , ώστε $K_m \rightarrow B_2^n$, ως προς τη μετρική Hausdorff. Γνωρίζουμε ότι $\partial K \geq \partial(K_m)$, διότι η K_m προέρχεται από το K μέσω της συμμετριοποίησης Steiner και η συμμετριοποίηση μειώνει το εμβαδόν επιφανείας. Σταθεροποιούμε ένα ϵ θετικό. Τότε, από την Πρόταση 7.1.5 και το γεγονός ότι $\text{St}(B_2^n) = B_2^n$, θα έχουμε ότι

$$|K + \epsilon B_2^n| = |\text{St}(K + \epsilon B_2^n)| \geq |\text{St}(K) + \text{St}(\epsilon B_2^n)| = |\text{St}(K) + \epsilon B_2^n|.$$

Επαναλαμβάνοντας πεπερασμένο πλήθος συμμετριοποιήσεων Steiner ως προς κατάλληλα υπερεπίπεδα ώστε να προκύψει η K_m , θα έχουμε ότι $|K + \epsilon B_2^n| \geq |K_m + \epsilon B_2^n|$. Επειδή η συμμετριοποίηση διατηρεί τον όγκο, ισχύει ότι $|K| = |K_m|$. Άρα,

$$\frac{|K + \epsilon B_2^n| - |K|}{\epsilon} \geq \frac{|K_m + \epsilon B_2^n| - |K_m|}{\epsilon}.$$

Παίρνουμε πρώτα όρια ως προς m και αφού $K_m \rightarrow B_2^n$ και ο όγκος είναι συνεχής ως προς τη μετρική Hausdorff παίρνουμε

$$\frac{|K + \epsilon B_2^n| - |K|}{\epsilon} \geq \frac{|B_2^n + \epsilon B_2^n| - |B_2^n|}{\epsilon}.$$

Τέλος, παίρνουμε όρια για $\epsilon \rightarrow 0^+$ ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη. Επομένως, $\partial K \geq \partial(B_2^n)$. □

7.4 Η ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ BLASCHKE-SANTALÓ

Μια άλλη εφαρμογή του Θεωρήματος σφαιρικότητας του Gross είναι η ακόλουθη ανισότητα.

Θεώρημα 7.4.1. Για κάθε κυρτό σώμα K με $0 \in \text{int}(K)$ ισχύει

$$\text{vol}(K)\text{vol}(K^\circ) \leq \text{vol}(B_2^n)^2.$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν το K είναι ελλειψοειδές.

Απόδειξη: Εδώ θα αποδείξουμε μόνο την γενική περίπτωση της ανισότητας και όχι την περίπτωση της ισότητας (δείτε στο [Sail981]).

Όπως δείξαμε στην Πρόταση 7.1.13 η συμμετριοποίηση αυξάνει τον όγκο του πολικού σώματος, δηλαδή $\text{vol}((\text{St}(K))^{\circ}) \geq \text{vol}(K^{\circ})$. Αν τα H_1, H_2, \dots είναι υπερεπίπεδα που η συμμετριοποίηση ως προς αυτά δίνει ακολουθία K_m που συγκλίνει στην λB_2^n ($\lambda = (\text{vol}(K)/\text{vol}(B_2^n))^{1/n}$ αφού η συμμετριοποίηση διατηρεί τον όγκο) ισχύει

$$(7.7) \quad \text{vol}(K_m^{\circ}) \geq \text{vol}(K^{\circ}).$$

Πράγματι,

$$\text{vol}\left(\left(\text{St}_{H_2}(\text{St}_{H_1}(K))\right)^{\circ}\right) \geq \text{vol}\left(\left(\text{St}_{H_1}(K)\right)^{\circ}\right) \geq \text{vol}(K^{\circ}),$$

και συνεχίζουμε με επαγωγή.

Όμως $K_m \rightarrow \lambda B_2^n$ άρα από το Πόρισμα 5.1.3 για κάθε $0 < \theta < 1$ υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $m \geq m_0$ ισχύει

$$(1 - \theta)\lambda B_2^n \subseteq K_m \subseteq (1 + \theta)\lambda B_2^n.$$

Περνώντας στα πολικά σώματα με τη βοήθεια της Πρότασης 3.5.6 συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{1}{1 + \theta} \frac{1}{\lambda} B_2^n \subseteq K_m^{\circ} \subseteq \frac{1}{1 - \theta} \frac{1}{\lambda} B_2^n.$$

Επιλέγοντας $0 < \theta < 1$ ώστε $(1 - \theta)^{-1} \leq 1 + \epsilon$ και $1 - \epsilon \leq (1 + \theta)^{-1}$ (εύκολα ελέγχουμε ότι αυτό ισχύει για $\theta = 2^{-1}\epsilon(1 + \epsilon)^{-1}$) προκύπτει ότι για κάθε $m \geq m_0$

$$(1 - \epsilon) \frac{1}{\lambda} B_2^n \subseteq K_m^{\circ} \subseteq (1 + \epsilon) \frac{1}{\lambda} B_2^n.$$

Δηλαδή $K_m^{\circ} \rightarrow \lambda^{-1} B_2^n$.

Παίρνοντας όρια στην (7.7) και χρησιμοποιώντας ότι ο όγκος είναι συνεχής συνάρτηση προκύπτει ότι

$$\text{vol}\left(\frac{1}{\lambda} B_2^n\right) \geq \text{vol}(K^{\circ}).$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέλη με $\text{vol}(K)$ το οποίο ισούται με $\text{vol}(\lambda B_2^n)$ (από την τιμή που έχει το λ) προκύπτει το αποτέλεσμα. \square

Η ποσότητα $\text{vol}(K)\text{vol}(K^\circ)$ είναι αναλλοίωτη στους γραμμικούς μετασχηματισμούς, δηλαδή για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\text{vol}(T(K))\text{vol}\left((T(K))^\circ\right) = \text{vol}(K)\text{vol}(K^\circ).$$

Πράγματι, σύμφωνα με τις Προτάσεις 3.5.6 και 4.1.10, για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\text{vol}(T(K)) = |\det T|\text{vol}(K) \text{ και } \text{vol}\left((T(K))^\circ\right) = |\det T|^{-1}\text{vol}(K),$$

οι οποίες αποδεικνύουν το ζητούμενο. Γεννάται λοιπόν το ερώτημα για ποιο ή ποια σώματα K η παράσταση $\text{vol}(K)\text{vol}(K^\circ)$ έχει ελάχιστη τιμή και ποια είναι η ελάχιστη τιμή. Το ερώτημα αυτό έτσι όπως διατυπώθηκε δεν έχει γνωστή απάντηση. Εικάζεται ότι η ελάχιστη τιμή του είναι $(4!/n)^n$ που είναι η τιμή της παράστασης όταν το K είναι ένα simplex. Αυτή η εικασία είναι γνωστή ως εικασία του Mahler. Μια απάντηση σε ένα ελαφρώς τροποποιημένο ερώτημα απαντήθηκε καταφατικά από τους Jean Bourgain και Vitali Milman. Συγκεκριμένα απέδειξαν ότι υπάρχει σταθερά $c > 0$ ώστε για κάθε κυρτό κεντρικά συμμετρικό σώμα K στον \mathbb{R}^n ισχύει

$$\left(\text{vol}(K)\text{vol}(K^\circ)\right)^{1/n} \geq \frac{c}{n}$$

(δείτε στο [Pis1989] ή στο [AGM2015]).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 7.4.1 Αποδείξτε ότι στην ανισότητα Blaschke-Santaló αν το K είναι ελλειψοειδές τότε ισχύει η ισότητα. Δηλαδή αν το \mathcal{E} είναι ένα ελλειψοειδές τότε ισχύει

$$\text{vol}(\mathcal{E})\text{vol}(\mathcal{E}^\circ) = \text{vol}(B_2^n)^2.$$

Άσκηση 7.4.2 Έστω ότι το \mathcal{E} είναι ένα ελλειψοειδές, και για ένα κυρτό σώμα K , με το 0 να ανήκει στο εσωτερικό του, ισχύει $\text{vol}(K) = \text{vol}(\mathcal{E})$. Αποδείξτε ότι $\text{vol}(K^\circ) \leq \text{vol}(\mathcal{E}^\circ)$.

Μέρος II

Κλασικές θέσεις κυρτών σωμάτων

Για το υπόλοιπο του βιβλίου είναι απαραίτητη η γνώση στοιχειώδους θεωρίας μέτρου. Για αυτό παραπέμπουμε είτε στο [ΠρΑναλ] είτε στο [ΘΜ].

8.1 ...ΑΠΟ ΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΤΗΝ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Θα συμβολίζουμε με $M_{n \times n}$ το σύνολο όλων των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από το \mathbb{R} .

Με $GL(n)$ συμβολίζουμε τη γενική γραμμική ομάδα, δηλαδή τους αντιστρέψιμους $n \times n$ πίνακες με στοιχεία από το \mathbb{R} . Φανερά $T \in GL(n)$ αν και μόνο αν $\det T \neq 0$.

Με $\mathcal{O}(n)$ συμβολίζουμε την ορθογώνια ομάδα, δηλαδή τους $n \times n$ πίνακες U με στοιχεία από το \mathbb{R} για τους οποίους ισχύει $U^t U = \text{Id}$. Τα στοιχεία της $\mathcal{O}(n)$ ονομάζονται ορθογώνιοι πίνακες και από την πολλαπλασιαστικότητα της ορίζουσας αν ο U είναι ορθογώνιος τότε έχει ορίζουσα $+1$ ή -1 . Φανερά αν $U \in \mathcal{O}(n)$ τότε $U^{-1} = U^t$, και διατηρεί τις γωνίες και τα μήκη διανυσμάτων:

$$(i) \langle Ux, Uy \rangle = \langle U^t Ux, y \rangle = \langle x, y \rangle,$$

$$(ii) \|Ux\|_2 = \sqrt{\langle Ux, Ux \rangle} = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|_2.$$

Θα συμβολίζουμε με $SL(n)$ την ειδική γραμμική ομάδα, δηλαδή τους πίνακες στο $M_{n \times n}$ οι οποίοι έχουν ορίζουσα 1.

Εύκολα ελέγχουμε ότι οι $GL(n)$, $\mathcal{O}(n)$ και $SL(n)$ είναι πράγματι ομάδες με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων και είναι μεταξύ τους διαφορετικές.

ΟΡΙΣΜΟΣ 8.1.1 (Ίχνος πίνακα). Το ίχνος $\text{tr}(T)$ ενός $n \times n$ πίνακα T ορίζεται ως το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του. Δηλαδή αν $T = (t_{ij})_{ij}$ τότε

$$\text{tr}(T) = \sum_{i=1}^n t_{ii} = \sum_{i=1}^n \langle T e_i, e_i \rangle,$$

όπου τα $(e_i)_{i=1}^n$ αποτελούν την ορθοκανονική βάση ως προς την οποία είναι γραμμένος ο πίνακας $(t_{ij})_{ij}$.

Εύκολα ελέγχουμε ότι το ίχνος έχει τις ακόλουθες ιδιότητες για οποιοσδήποτε $n \times n$ πίνακες $T = (t_{ij})_{ij}$, $S = (s_{ij})_{ij}$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(i) \text{tr}(T) + \text{tr}(S) = \text{tr}(T + S).$$

$$(ii) \operatorname{tr}(\lambda T) = \lambda \operatorname{tr}(T).$$

$$(iii) \operatorname{tr}(T^t) = \operatorname{tr}(T).$$

$$(iv) \operatorname{tr}(TS) = \operatorname{tr}(ST) = \sum_{i,j} t_{ji} s_{ij} \quad (\text{δείτε Άσκηση 8.1.1}).$$

Από την (iv) προκύπτει άμεσα ότι το ίχνος δεν εξαρτάται από τη βάση του χώρου, αφού $\operatorname{tr}(P^{-1}TP) = \operatorname{tr}(TPP^{-1}) = \operatorname{tr}T$. Έτσι αν ο T είναι διαγωνοποιήσιμος, αλλάζοντας κατάλληλα τη βάση του χώρου, συμπεραίνουμε ότι το ίχνος του T είναι το άθροισμα των ιδιοτιμών του.

Ορισμός 8.1.2. Ένας συμμετρικός $n \times n$ πίνακας λέγεται θετικά ορισμένος αν για κάθε $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ισχύει $\langle Tx, x \rangle > 0$.

Ορισμός 8.1.3. Ένας συμμετρικός $n \times n$ πίνακας λέγεται θετικά ημιορισμένος αν για κάθε $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ισχύει $\langle Tx, x \rangle \geq 0$.

Φανερά κάθε θετικά ορισμένος πίνακας είναι και θετικά ημιορισμένος. Για ένα θετικά ημιορισμένο πίνακα T , από το φασματικό θεώρημα (δείτε [Γραλγ2]), υπάρχει ορθοκανονική βάση f_1, \dots, f_n του \mathbb{R}^n που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του T και αντίστοιχες ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ οι οποίες είναι μη αρνητικοί αριθμοί. Συγκεκριμένα ισχύει $Tf_j = \lambda_j f_j$ και $\lambda_j \geq 0$ για κάθε $j = 1, \dots, n$. Αν ο T είναι θετικά ορισμένος τότε οι ιδιοτιμές λ_j είναι όλες θετικές.

Πρόταση 8.1.4. Το \mathcal{E} υποσύνολο του \mathbb{R}^n είναι ελλειψοειδές με κέντρο την αρχή των αξόνων αν και μόνο αν υπάρχει πίνακας T θετικά ορισμένος ώστε $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle Tx, x \rangle \leq 1\}$.

Απόδειξη: Αν το \mathcal{E} είναι ελλειψοειδές, έστω ότι τα e_1, \dots, e_n και a_1, \dots, a_n είναι όπως στον Ορισμό 1.3.6. Θέτουμε

$$T = \begin{pmatrix} a_1^{-2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^{-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n^{-2} \end{pmatrix}.$$

Τέτοιους πίνακες στο εξής για εξοικονόμηση χώρου θα τους γράφουμε ως εξής: $T = \operatorname{diag}(a_1^{-2}, \dots, a_n^{-2})$. Εύκολα τώρα ελέγχει κανείς ότι ο T είναι θετικά ορισμένος και

$$\langle Tx, x \rangle = \sum_{j=1}^n \frac{\langle x, e_j \rangle^2}{a_j^2}.$$

Συνεπώς $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle Tx, x \rangle \leq 1\}$.

Αντιστρόφως, έστω ότι ο T είναι ένας θετικά ορισμένος $n \times n$ πίνακας και $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle Tx, x \rangle \leq 1\}$. Θα αποδείξουμε ότι το K είναι ελλειψοειδές. Έστω ότι τα f_1, \dots, f_n και $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ είναι, όπως παραπάνω, η ορθοκανονική βάση ιδιοδιανυσμάτων του T και οι αντίστοιχες θετικές ιδιοτιμές του. Ένα διάνυσμα x είναι στοιχείο του K αν και μόνο αν $\langle Tx, x \rangle \leq 1$. Όμως, αφού τα f_1, \dots, f_n συνιστούν ορθοκανονική βάση του \mathbb{R}^n μπορούμε να γράψουμε $x = \sum_{j=1}^n \langle x, f_j \rangle f_j$, οπότε η προηγούμενη γίνεται

$$\left\langle T \left(\sum_{j=1}^n \langle x, f_j \rangle f_j \right), \sum_{j=1}^n \langle x, f_j \rangle f_j \right\rangle \leq 1.$$

Απλές πράξεις δείχνουν ότι η τελευταία είναι ισοδύναμη με την

$$\sum_{j=1}^n \frac{\langle x, f_j \rangle^2}{(1/\sqrt{\lambda_j})^2} \leq 1,$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη σύμφωνα με τον Ορισμό 1.3.6. □

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 8.1.1 Αποδείξτε ότι αν οι $T = (t_{ij})_{ij}$ και $S = (s_{ij})_{ij}$ είναι δυο $n \times n$ πίνακες τότε $\text{tr}(T^t S) = \sum_{i,j} t_{ij} s_{ij}$. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον Ορισμό 8.1.1 και το ότι αν η $(e_j)_{j=1}^n$ είναι ορθοκανονική βάση στον \mathbb{R}^n τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει $Tx = \sum_{j=1}^n \langle Tx, e_j \rangle e_j$.)

Άσκηση 8.1.2 Αποδείξτε ότι το ίχνος ενός πίνακα είναι ανεξάρτητο από την βάση του χώρου ακολουθώντας την εξής διαδικασία. Αποδείξτε με επαγωγή στη διάσταση του χώρου $n \geq 2$ ότι

$$(8.1) \quad \det(\text{Id} + hA) = 1 + h \text{tr}(A) + O(h^2),$$

όπου η ποσότητα $O(h^2)$ ικανοποιεί την $\lim_{h \rightarrow 0} O(h^2)/h = 0$. Στη συνέχεια χρησιμοποιήστε την (8.1) για να αποδείξετε ότι το ίχνος $\text{tr}A$ είναι η κατευθυνόμενη παράγωγος της ορίζουσας στη διεύθυνση του πίνακα A στο σημείο Id , δηλαδή

$$(8.2) \quad \text{tr}(A) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\det(\text{Id} + hA) - \det \text{Id}}{h}.$$

Τέλος χρησιμοποιήστε την (8.2) για να αποδείξετε ότι για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα P ισχύει $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}A$.

Άσκηση 8.1.3 [Singular Value Decomposition] Αποδείξτε ότι για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα T υπάρχουν ορθογώνιοι πίνακες U, V και διαγώνιος πίνακας D

με θετικά στοιχεία διαγωνίου ώστε να ισχύει $T = UDV$ ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα.

- (i) Αποδείξτε ότι υπάρχει ορθοκανονική βάση e_1, \dots, e_n του \mathbb{R}^n και θετικοί αριθμοί $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ώστε να ισχύει $T^t T e_j = \lambda_j e_j$ για κάθε $j = 1, \dots, n$.
- (ii) Θέστε $v_j = \sqrt{\lambda_j}^{-1} T e_j$ για κάθε $j = 1, \dots, n$, και αποδείξτε ότι τα v_1, \dots, v_n συνιστούν ορθοκανονική βάση του \mathbb{R}^n .
- (iii) Αν P ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα v_j και Q ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα e_j αποδείξτε ότι ισχύει

$$P = TQ \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}^{-1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}^{-1}).$$

Άσκηση 8.1.4 Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 8.1.3 για να δείξετε ότι για κάθε $n \times n$ πίνακα T υπάρχει ορθογώνιος $n \times n$ πίνακας U και θετικά ημιορισμένους $n \times n$ πίνακας P ώστε $T = UP$. Η αναπαράσταση αυτή είναι γνωστή με το όνομα *πολική αναπαράσταση* του T . (Υπόδειξη: $UDV = (UV)(V^t DV)$ για κάθε V ορθογώνιο $n \times n$ πίνακα.)

8.2 ...ΑΠΟ ΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Συμβολίζουμε με $M_{n \times n}$ το σύνολο των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από το \mathbb{R} . Τα στοιχεία T του $M_{n \times n}$ τα βλέπουμε και ως γραμμικές απεικονίσεις από τον \mathbb{R}^n στον \mathbb{R}^n , όπου το Tx για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ είναι το διάνυσμα στον \mathbb{R}^n που προκύπτει με πολλαπλασιασμό του $n \times n$ πίνακα T με το $n \times 1$ διάνυσμα x . Στο $M_{n \times n}$ ορίζουμε μια νόρμα θέτοντας

$$(8.3) \quad \|T\| = \sup\{\|Tx\|_2 : x \in B_2^n\}.$$

Φανερά ο ορισμός είναι καλός, αφού το σύνολο B_2^n είναι συμπαγές και η απεικόνιση T συνεχής. Πράγματι, η (8.3) ορίζει μια νόρμα στο $M_{n \times n}$:

- (i) Φανερά $\|T\| \geq 0$ και αν $\|T\| = 0$ τότε $Tx = 0$ για κάθε $x \in B_2^n$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ισχύει

$$Tx = \|x\|_2 T \left(\frac{x}{\|x\|_2} \right) = 0.$$

Έτσι $T = 0$.

- (ii) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\|\lambda T\| = \sup_{x \in B_2^n} \|\lambda Tx\|_2 = |\lambda| \sup_{x \in B_2^n} \|Tx\|_2 = |\lambda| \|T\|.$$

(iii) Τέλος, αν $T, S \in M_{n \times n}$ τότε

$$\begin{aligned} \|T + S\| &= \sup_{x \in \mathcal{B}_2^n} \|(T + S)x\|_2 \leq \sup_{x \in \mathcal{B}_2^n} (\|Tx\|_2 + \|Sx\|_2) \\ &\leq \sup_{x \in \mathcal{B}_2^n} \|Tx\|_2 + \sup_{x \in \mathcal{B}_2^n} \|Sx\|_2 = \|T\| + \|S\|. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 8.2.1. Οι ορθογώνιοι πίνακες έχουν νόρμα ίση με 1. Πράγματι, αν U ορθογώνιος τότε (εξ' ορισμού) $U^t U = \text{Id}$. Έτσι, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\|Ux\|_2^2 = \langle Ux, Ux \rangle = \langle U^t Ux, x \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|_2^2.$$

Άρα $\|Ux\|_2 = \|x\|_2$ και η (8.3) συνεπάγεται αμέσως ότι $\|U\| = 1$.

Παρατήρηση 8.2.2. Αν υπάρχει $C > 0$ ώστε $\|Tx\|_2 \leq C\|x\|_2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ τότε $\|T\| \leq C$. Αυτό προκύπτει αμέσως από την (8.3).

Επίσης για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει $\|Tx\|_2 \leq \|T\| \|x\|_2$. Πράγματι, αυτό είναι προφανές αν $x = 0$, και αν $x \neq 0$ τότε

$$\|Tx\|_2 = \|T(x/\|x\|_2)\|_2 \|x\|_2 \leq \|T\| \|x\|_2.$$

Παρατήρηση 8.2.3. Αν $T, S \in M_{n \times n}$ τότε $\|TS\| \leq \|T\| \|S\|$. Πράγματι, από την (8.3) και την Παρατήρηση 8.2.2, για κάθε $x \in \mathcal{B}_2^n$ έχουμε

$$\|(TS)x\|_2 = \|T(Sx)\|_2 \leq \|T\| \|Sx\|_2 \leq \|T\| \|S\| \|x\|_2,$$

άρα $\|TS\| \leq \|T\| \|S\|$.

Πρόταση 8.2.4. Η απεικόνιση $\mathcal{T} : M_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ όπου

$$\mathcal{T}(a_{ij})_{i,j=1}^n = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn}),$$

είναι γραμμική, 1-1, επί, συνεχής και η αντίστροφη της είναι συνεχής.

Απόδειξη: Φανερά η \mathcal{T} είναι γραμμική, 1-1 και επί. Μένει να δείξουμε τη συνέχεια της \mathcal{T} και της \mathcal{T}^{-1} . Αλλά ο $M_{n \times n}$ είναι ο \mathbb{R}^{n^2} με διαφορετική νόρμα (την $\|\cdot\|$ όπως ορίστηκε πριν). Συνεπώς η συνέχεια της \mathcal{T} είναι απλώς η ισοδυναμία δύο νορμών στον \mathbb{R}^{n^2} , η οποία ισχύει από την Πρόταση 1.2.7. \square

Πόρισμα 8.2.5. Ένα σύνολο $\mathcal{M} \subseteq M_{n \times n}$ είναι φραγμένο αν και μόνο αν είναι φραγμένο ως υποσύνολο του $(\mathbb{R}^{n^2}, \|\cdot\|_2)$ (μέσω της \mathcal{T} της Πρότασης 8.2.4).

Ομοίως ένα $\mathcal{M} \subseteq M_{n \times n}$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι συμπαγές (δηλαδή κλειστό και φραγμένο) ως υποσύνολο του $(\mathbb{R}^{n^2}, \|\cdot\|_2)$ \square

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 8.2.1 Αποδείξτε ότι αν ο $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ είναι διαγώνιος πίνακας, τότε

$$\|D\| = \max\{|\lambda_j| : j = 1, 2, \dots, n\}.$$

Άσκηση 8.2.2 Αν η D_m είναι μια ακολουθία διαγώνιων πινάκων με $\det(D_m) = 1$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$ τότε η ακολουθία D_m είναι φραγμένη αν και μόνο αν η ακολουθία D_m^{-1} είναι φραγμένη.

Άσκηση 8.2.3 Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 8.1.3 για να αποδείξετε ότι η Άσκηση 8.2.2 δεν ισχύει μόνο για διαγώνιους πίνακες αλλά και για οποιαδήποτε ακολουθία T_m , $n \times n$ -πινάκων με $\det(T_m) = 1$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

8.3 ...ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Εκτός από τα γενικά στοιχεία της θεωρίας μέτρου θα χρειαστούμε ειδικότερα τον τύπο αλλαγής μεταβλητών σε πολικές συντεταγμένες στον \mathbb{R}^n . Συγκεκριμένα ισχύει το εξής:

Θεώρημα 8.3.1. Υπάρχει μέτρο σ_n στο σύνολο \mathbb{S}^{n-1} με $\sigma(\mathbb{S}^{n-1}) = 1$ ώστε για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ να ισχύει

$$(8.4) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = n \text{vol}_n(B_2^n) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^\infty f(r\theta) r^{n-1} dr d\sigma_n(\theta).$$

Αυτό μπορεί κανείς να το δει ως γενίκευση της ολοκλήρωσης σε πολικές συντεταγμένες από τον Απειροστικό Λογισμό πολλών μεταβλητών όπου το διαφορικό στις δύο διαστάσεις αλλάζει από $dx dy$ σε $r dr d\theta$. Παρατηρήστε ότι σε αυτή την περίπτωση αν θέλουμε ο κύκλος ακτίνας 1 να έχει μήκος ίσο με 1 θα πρέπει να διαιρέσουμε το $d\theta$ με 2π , οπότε στις δύο διαστάσεις η αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x) dx = 2\pi \int_{\mathbb{S}} \int_0^\infty f(r\theta) r dr d(\theta/2\pi),$$

που συμφωνεί με τον τύπο (8.4).

Το μέτρο σ_n πάνω στη σφαίρα περιγράφεται παρακάτω στην Ενότητα 15.1.1, αλλά προς το παρόν δεν θα χρειαστούμε περισσότερα από τον τύπο (8.4).

Ας θεωρήσουμε ένα κυρτό σώμα K στο \mathbb{R}^n . Οποιαδήποτε μεταφορά του $x_0 + K$ στο χώρο δεν αλλάζει τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του σώματος και για αυτό δεν θεωρούμε ότι πρόκειται για ουσιαστικά διαφορετικό σώμα. Λέμε απλώς ότι το σώμα βρίσκεται σε άλλη θέση. Αυτό όμως δεν συμβαίνει μόνο με τις μεταφορές. Προφανώς συμβαίνει και με τις στροφές και τις ανακλάσεις. Γενικότερα θεωρούμε ότι ένα κυρτό σώμα δεν αλλάζει κατά ουσιαστικό τρόπο όταν αλλάζει η βάση του χώρου. Από τη Γραμμική Άλγεβρα γνωρίζουμε ότι η αλλαγή της βάσης του \mathbb{R}^n γίνεται με έναν πίνακα ο οποίος έχει μη μηδενική ορίζουσα. Το αποτέλεσμα οποιουδήποτε από τους παραπάνω μετασχηματισμούς σε ένα κυρτό σώμα ή συνδυασμού τους ονομάζεται *θέση* του σώματος. Για να δώσουμε τον αυστηρό ορισμό υπενθυμίζουμε από την γραμμική άλγεβρα ότι γράφουμε $GL(n)$ για τη γενική γραμμική ομάδα στον \mathbb{R}^n : το $GL(n)$ αποτελείται από όλους τους $n \times n$ πίνακες που έχουν *μη μηδενική* ορίζουσα.

Ορισμός 9.0.1. Αν το K είναι ένα κυρτό σώμα στον \mathbb{R}^n ονομάζουμε *θέση* του K οποιοδήποτε σύνολο της μορφής $x_0 + T(K)$ όπου $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και $T \in GL(n)$.

Πολλές φορές ταυτίζουμε το κυρτό σώμα με την κλάση όλων των θέσεών του (θεωρώντας ότι όλες οι θέσεις αναφέρονται στο ίδιο σώμα). Στο επόμενο αποδεικνύουμε ότι οποιοδήποτε ελλειψοειδές είναι μια θέση της ευκλείδειας μπάλας B_2^n .

Πρόταση 9.0.2. Το σύνολο των θέσεων της ευκλείδειας μπάλας B_2^n είναι το σύνολο των ελλειψοειδών στον \mathbb{R}^n .

Απόδειξη: Το \mathcal{E} είναι ελλειψοειδές στον \mathbb{R}^n με κέντρο την αρχή των αξόνων αν και μόνο αν υπάρχει ορθοκανονική βάση e_1, \dots, e_n του \mathbb{R}^n και θετικοί αριθμοί a_1, \dots, a_n ώστε

$$\mathcal{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n \frac{\langle x, e_j \rangle^2}{a_j^2} \leq 1 \right\},$$

(δείτε Ορισμό 1.3.6). Ο διαγώνιος πίνακας $T = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ είναι αντιστρέψιμος (αφού τα a_1, \dots, a_n είναι θετικοί αριθμοί) και εύκολα ελέγ-

χουμε ότι ισχύει $T(B_2^n) = \mathcal{E}$. Οποιοδήποτε άλλο ελλειψοειδές στον \mathbb{R}^n είναι μεταφορά ελλειψοειδούς με κέντρο την αρχή των αξόνων.

Αντίστροφα, πρέπει να αποδείξουμε ότι για κάθε $T \in GL(n)$ το $T(B_2^n)$ είναι ελλειψοειδές. Όμως $x \in T(B_2^n)$ αν και μόνο αν $T^{-1}x \in B_2^n$ δηλαδή αν και μόνο αν $\langle T^{-1}x, T^{-1}x \rangle \leq 1$. Αυτό είναι ισοδύναμο με το $\langle (T^{-1})^t T^{-1}x, x \rangle \leq 1$. Έτσι, από την Πρόταση 8.1.4, μένει να δείξουμε ότι ο πίνακας $(T^{-1})^t T^{-1}$ είναι θετικά ορισμένος. Όμως προφανώς, για κάθε μη μηδενικό $z \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\langle (T^{-1})^t T^{-1}z, z \rangle = \langle T^{-1}z, T^{-1}z \rangle = \|T^{-1}z\|_2^2 \geq 0.$$

Μένει να δειχθεί ότι αν $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ τότε $T^{-1}z \neq 0$. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει μη μηδενικό $z \in \mathbb{R}^n$ ώστε $T^{-1}z = 0$ τότε θέτουμε $e_1 = z/\|z\|_2$ και συμπληρώνουμε σε μια ορθοκανονική βάση με τα διανύσματα e_2, \dots, e_n επιλέγοντάς τα ώστε αυτά να είναι ορθοκανονική βάση του υποχώρου κάθετου στο e_1 . Τότε ο πίνακας T^{-1} γραμμένος ως προς τη βάση e_1, \dots, e_n έχει στην πρώτη στήλη του μηδενικά, αφού λόγω του ότι $T^{-1}e_1 = 0$ ισχύει $\langle T^{-1}e_1, e_j \rangle = 0$ για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$. Άρα $\det T^{-1} = 0$, το οποίο είναι άτοπο, αφού ο T είναι αντιστρέψιμος. \square

Παρατήρηση 9.0.3. Αυτό που πραγματικά κρύβεται πίσω από την απόδειξη είναι η πολική αναπαράσταση ενός τετραγωνικού πίνακα: κάθε (πραγματικός) τετραγωνικός T παραγοντοποιείται στη μορφή $T = UA$ όπου ο U είναι ορθογώνιος (δηλαδή $U^t = U^{-1}$) και ο A είναι θετικά ημιορισμένος ή, μετά από κατάλληλη επιλογή βάσης, ο A είναι διαγώνιος (δείτε [Γραλγ2]). Έτσι ο A απεικονίζει την B_2^n σε ένα ελλειψοειδές και στη συνέχεια ο U «στρέφει» το ελλειψοειδές στο χώρο (ο U ως ορθογώνιος είναι συνδυασμός ανακλάσεων και στροφών).

Παρατήρηση 9.0.4. Παρατηρήστε ότι αν επιλέξουμε ένα ελλειψοειδές \mathcal{E} στο \mathbb{R}^n , τότε

- (i) το ελλειψοειδές \mathcal{E} καθορίζει ένα πίνακα $T \in GL(n)$ από την $\mathcal{E} = T(B_2^n)$.
- (ii) Ο T καθορίζει μια αλλαγή βάσης.
- (iii) Ο T και η αλλαγή βάσης θέτουν το K σε μια άλλη θέση· τη θέση $T(K)$.

Έτσι πολλές φορές λέμε ότι η θέση ενός σώματος K καθορίζεται από την «επιλογή της ευκλείδειας δομής του \mathbb{R}^n ». Δηλαδή την επιλογή του

ελλειψοειδούς \mathcal{E} . Η χρήση της λέξης «δομή» στην παραπάνω φράση προέρχεται από το ότι ένα ελλειψοειδές καθορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο. Πράγματι, αν ως προς την κατάλληλη ορθοκανονική βάση e_1, \dots, e_n

$$\mathcal{E} = \left\{ x = (x_k)_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n : \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{a_k^2} \leq 1 \right\},$$

όπου $a_k > 0$ για $k = 1, \dots, n$, τότε ελέγχουμε εύκολα ότι το

$$(9.1) \quad \langle x, w \rangle_{\mathcal{E}} := \sum_{k=1}^n \frac{z_k w_k}{a_k^2}$$

είναι ένα εσωτερικό γινόμενο και το σύνολο $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, x \rangle_{\mathcal{E}} \leq 1\}$ είναι ακριβώς το \mathcal{E} .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 9.0.1 Αποδείξτε ότι οποιοδήποτε παραλληλόγραμμο στον \mathbb{R}^2 είναι μια θέση του τετραγώνου $C = [-1, 1]^2$. Ομοίως αποδείξτε ότι οποιοδήποτε παραλληλεπίπεδο στον \mathbb{R}^n είναι μια θέση του κύβου $C = [-1, 1]^n$.

Άσκηση 9.0.2 Δείξτε ότι η σχέση (9.1) ορίζει πράγματι ένα εσωτερικό γινόμενο στον \mathbb{R}^n .

Άσκηση 9.0.3 Δείξτε ότι αν $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ είναι η νόρμα που ορίζει ένα ελλειψοειδές \mathcal{E} στον \mathbb{R}^n , τότε ισχύει $\langle x, x \rangle_{\mathcal{E}} = \|x\|_{\mathcal{E}}^2$.

Άσκηση 9.0.4 Εξηγήστε γιατί η επιλογή ενός εσωτερικού γινομένου στον \mathbb{R}^n καθορίζει τη θέση ενός κυρτού σώματος K .

Η ισοτροπική θέση ενός κυρτού σώματος είναι μια πολύ ιδιαίτερη θέση η οποία προέρχεται από την Κλασική Μηχανική. Ο συνήθης ορισμός της ισοτροπίας είναι ο ακόλουθος:

ΟΡΙΣΜΟΣ 10.0.1 (Ισοτροπικό σώμα). Ένα κυρτό σώμα $K \subseteq \mathbb{R}^n$ λέμε ότι είναι *ισοτροπικό* αν έχει όγκο ίσο με 1, κέντρο μάζας στο 0 και το ολοκλήρωμα $\int_K \langle x, \theta \rangle^2 dx$ είναι σταθερό, δηλαδή ανεξάρτητο του $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$. Η τετραγωνική ρίζα αυτής της κοινής τιμής των ολοκληρωμάτων ονομάζεται σταθερά ισοτροπίας του K και συμβολίζεται με L_K .

Θα δούμε παρακάτω ότι κάθε κυρτό σώμα K στον \mathbb{R}^n έχει ισοτροπική θέση· δηλαδή υπάρχει $T \in GL(n)$ ώστε το $T(K)$ να είναι ισοτροπικό.

Στην επόμενη υποενότητα θα προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε αυτόν τον ορισμό. Αυτό δεν θα συμβάλει μόνο στην αιτιολόγηση του όρου «ισοτροπικό» αλλά θα συμβάλει στο να κατανοήσουμε ότι από φυσικής πλευράς η ισοτροπική θέση είναι η *απλούστερη θέση* στην οποία μπορεί να βρεθεί ένα σώμα.

10.1 ΦΥΣΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΙΣΟΤΡΟΠΙΚΗΣ ΘΕΣΗΣ

10.1.1 Ροπή δύναμης και ροπή αδράνειας

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα αντικείμενο που μπορεί να περιστραφεί γύρω από έναν άξονα. Μπορούμε να φανταστούμε μια σφαίρα και έναν άξονα που περνάει από το κέντρο της ή μια πόρτα που στρέφεται γύρω από τον άξονα που διέρχεται από τα σημεία στήριξής της. Αν εφαρμόσουμε μια δύναμη \vec{F} στο αντικείμενο, κάθετα στο επίπεδο που ορίζει ο άξονας περιστροφής και το διάνυσμα θέσης του σημείου στο οποίο εφαρμόζεται η δύναμη, αυτό θα αρχίσει να περιστρέφεται. Ας θεωρήσουμε ότι η δύναμη εφαρμόζεται στο σημείο \vec{r} το οποίο ανήκει στο αντικείμενό μας. Ονομάζουμε ροπή της δύναμης \vec{F} το διάνυσμα $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, όπου με \times συμβολίζουμε το εξωτερικό γινόμενο. Παρατηρούμε ότι όσο πιο κοντά στον άξονα περιστροφής εφαρμόσουμε τη δύναμη (για παράδειγμα όσο πιο κοντά στον άξονα περιστροφής της πόρτας), τόσο πιο μικρό είναι σε μήκος το διάνυσμα \vec{r} οπότε είναι και μικρότερο το μέγεθος της ροπής (η πόρτα θα στραφεί με μικρότερη ταχύτητα).

Η ροπή μιας δύναμης που εφαρμόζεται σε ένα σώμα που μπορεί να στραφεί γύρω από έναν άξονα, εκφράζει το μέγεθος της ικανότητας της δύναμης να στρέψει το σώμα.

Άρα το πόσο εύκολα θα στραφεί το σώμα εξαρτάται από τη δύναμη \vec{F} και το σημείο εφαρμογής της δύναμης \vec{r} . Όμως το τι τελικά ακριβώς θα συμβεί στο σώμα δεν εξαρτάται μόνο από τη δύναμη και το σημείο εφαρμογής. Διότι για παράδειγμα, μια μπάλα του μπάσκετ στρέφεται πολύ πιο εύκολα με την ίδια δύναμη από ό,τι ο πλανήτης Γη. Άρα το τι ακριβώς θα συμβεί με την ίδια δύναμη \vec{F} και το ίδιο \vec{r} σχετίζεται και με χαρακτηριστικά του σώματος και της διεύθυνσης περιστροφής. Αυτά τα χαρακτηριστικά εκφράζονται στην έννοια της *ροπής αδράνειας* του σώματος ως προς τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής.

Η ροπή αδράνειας ενός σώματος εκφράζει το πόσο εύκολα αυτό στρέφεται γύρω από δοθέντα άξονα. Εξαρτάται δηλαδή τόσο από το σώμα όσο και από τον άξονα περιστροφής. Το ότι η ροπή αδράνειας εξαρτάται και από τον άξονα περιστροφής φαίνεται εύκολα με το παράδειγμα του ακροβάτη που περπατάει σε σχοινί κρατώντας κάθετα στο σχοινί μια πολύ μεγάλη ράβδο (δείτε την Εικόνα 10.1). Για να πέσει από το σχοινί ο ακροβάτης θα πρέπει η ράβδος που κρατάει να στραφεί με άξονα περιστροφής παράλληλο στο σχοινί στο οποίο βαδίζει. Επειδή ακριβώς η ράβδος είναι μεγάλη στην κάθετη στο σχοινί διεύθυνση, αυτή έχει πολύ μεγάλη ροπή αδράνειας (δεν «θέλει» δηλαδή να στραφεί) και για αυτό ο ακροβάτης δεν πέφτει εύκολα. (Το ότι ο ακροβάτης συγκρατεί τη ράβδο είναι μάλλον ψευδαίσθηση. Η ράβδος συγκρατεί τον ακροβάτη!)

Μιλώντας πιο αυστηρά, η ροπή αδράνειας ενός σώματος εκφράζει τη ροπή που απαιτείται για να αποκτήσει το σώμα μια καθορισμένη γωνιακή επιτάχυνση. Μια σημειακή μάζα m σε θέση \vec{r} , όπου το \vec{r} είναι κάθετο στον άξονα περιστροφής της έχει ροπή αδράνειας την ποσότητα $I = m\|\vec{r}\|_2^2$. (Βεβαίως η επιλογή αυτού του τύπου δεν είναι αυθαίρετη αλλά βασίζεται σε πειραματικά δεδομένα. Για παράδειγμα, διπλασιάζουμε την απόσταση από τον άξονα περιστροφής και μετράμε τετραπλάσια ροπή για την απόκτηση της ίδιας γωνιακής επιτάχυνσης.)

Αν τώρα μιλάμε για ένα κυρτό σώμα K στον \mathbb{R}^n η συνολική του ροπή αδράνειας υπολογίζεται αν «προσθέσουμε όλες τις ροπές αδράνειας των σημείων του», δηλαδή αν ολοκληρώσουμε πάνω στο K . Για να απλοποιηθεί η περιγραφή μας ας υποθέσουμε ότι οι «σημειακές μάζες» στο K είναι ίσες με 1. Με άλλα λόγια θεωρούμε ότι η πυκνότητα του υλικού του K είναι σταθερά, ίση με 1. Έτσι αν το διάνυσμα $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ καθορίζει τον άξονα περιστροφής, τότε η (συνολική) ροπή αδράνειας



ΕΙΚΟΝΑ 10.1: Ο Samuel Dixon διασχίζει τον Νιαγάρα πάνω σε ένα σχοινί 7/8 της ίντσας χρησιμοποιώντας τη ροπή αδράνειας μιας μεγάλης ράβδου (φωτογραφία George Barker, Νιαγάρας 1890).

του K είναι η ποσότητα

$$\int_K \|\vec{r}_x\|_2^2 dx,$$

όπου το \vec{r}_x είναι το διάνυσμα κάθετο στον άξονα περιστροφής, από τον άξονα στο $x \in K$. Χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα, η ροπή αδράνειας του K ως προς τον άξονα που καθορίζει το θ είναι ίση με το

$$(10.1) \quad \int_K \left(\|x\|_2^2 - \langle x, \theta \rangle^2 \right) dx.$$

Φανερά η ροπή αδράνειας εξαρτάται λοιπόν από τον άξονα· τη διεύθυνση θ . Αν αυτό δεν συμβαίνει, αν δηλαδή η ροπή αδράνειας είναι ίδια για το K ως προς οποιοδήποτε άξονα περιστροφής, τότε το σώμα λέγεται *ισοτροπικό*. Η συνθήκη που μόλις περιγράψαμε είναι φανερά ισοδύναμη με την συνθήκη η ποσότητα $\int_K \langle x, \theta \rangle^2 dx$ να είναι σταθερή και ανεξάρτητη από την επιλογή του $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Έτσι λοιπόν, *ένα σώμα είναι ισοτροπικό όταν η ροπή που χρειάζεται για να αποκτήσει συγκεκριμένη γωνιακή επιτάχυνση είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε άξονα και αν είναι να περιστραφεί*.

Προσθέτουμε μόνο εδώ, ότι η οι επιπλέον απαιτήσεις του Ορισμού 10.0.1, δηλαδή να έχει το σώμα κέντρο μάζας στο 0 και να έχει συνολικό όγκο 1, είναι κανονικοποιήσεις που απλά διευκολύνουν διάφορους υπολογι-

σμούς και δεν έχουν σχέση με την ισοτροπία ως φυσική έννοια.

10.1.2 Πίνακας αδράνειας και ροπή αδράνειας

Όπως είδαμε παραπάνω η ροπή αδράνειας εξαρτάται τόσο από το σώμα το οποίο στρέφεται όσο και από τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής. Είναι δυνατόν αυτά τα δύο να «διαχωριστούν»; Μπορούν δηλαδή κατά μία έννοια να απομονωθούν τα χαρακτηριστικά του σώματος που καθορίζουν ή επηρεάζουν την περιστροφή από τη διεύθυνση περιστροφής; Η απάντηση είναι θετική και αυτό γίνεται με τον πίνακα αδράνειας του σώματος.

Θα συμβολίσουμε με I_d τον ταυτοτικό πίνακα στον \mathbb{R}^n . Αν γράψουμε το τυχόν $x \in K$ ως $\sum_{i=1}^n x_i e_i$ ως προς την συνήθη ορθοκανονική βάση του \mathbb{R}^n και ομοίως και για το θ , από τη σχέση (10.1) εύκολα βλέπουμε με απλές πράξεις ότι

$$\int_K \left(\|x\|_2^2 - \langle x, \theta \rangle^2 \right) dx = \langle I_K \theta, \theta \rangle,$$

όπου I_K είναι ο πίνακας

$$\left(\int_K \|x\|_2^2 dx \right) I_d - \left(\int_K x_i x_j dx \right)_{ij} \\ = \begin{pmatrix} \int_K (\|x\|_2^2 - x_1^2) dx & - \int_K x_1 x_2 dx & \dots & - \int_K x_1 x_n dx \\ - \int_K x_2 x_1 dx & \int_K (\|x\|_2^2 - x_2^2) dx & \dots & - \int_K x_2 x_n dx \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ - \int_K x_n x_1 dx & - \int_K x_n x_2 dx & \dots & \int_K (\|x\|_2^2 - x_n^2) dx \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας I_K ονομάζεται πίνακας αδράνειας του σώματος K (Inertia matrix). Όταν εργαζόμαστε με ένα σώμα και δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης μπορεί να παραλείψουμε τον δείκτη K και να γράψουμε απλά I . Ο I εξαρτάται μόνο από το σώμα K (και το σύστημα συντεταγμένων) και για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ το εσωτερικό γινόμενο $\langle I\theta, \theta \rangle$ υπολογίζει τη ροπή αδράνειας του σώματος K με άξονα περιστροφής τη διεύθυνση του θ . Για τη Φυσική, όπως η μάζα είναι το μέτρο της αδράνειας του K για την ευθύγραμμη κίνηση, έτσι και ο πίνακας αδράνειας είναι το «μέτρο» της αδράνειας στην περιστροφική κίνηση.

Εύκολα βλέπει κανείς ότι αυτός ο *συμμετρικός* πίνακας είναι θετικά ορισμένος. Αλλά από την πλευρά της Φυσικής αυτό είναι άμεσα αντι-

ληπτό αν κανείς γνωρίζει ότι αν το K στρέφεται με οποιαδήποτε (μη μηδενική) σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ τότε η κινητική του ενέργεια είναι ακριβώς η ποσότητα $\frac{1}{2}\langle I\vec{\omega}, \vec{\omega} \rangle$, και ως ενέργεια η ποσότητα αυτή είναι αναγκαστικά θετική. Έτσι ο I είναι διαγωνοποιήσιμος, δηλαδή υπάρχει κατάλληλος ορθομοναδιαίος πίνακας αλλαγής βάσης Q ώστε ο $I = Q^t \Lambda Q$ όπου Λ διαγώνιος πίνακας, έστω με στοιχεία διαγωνίου τα I_1, \dots, I_n . Οι διευθύνσεις των ιδιοδιανυσμάτων του I ονομάζονται κύριοι (ή πρωτεύοντες) άξονες του σώματος K . Οι ποσότητες I_1, \dots, I_n (οι οποίες είναι θετικές, αφού ο I είναι θετικά ορισμένος) ονομάζονται κύριες (ή πρωτεύουσες) ροπές αδράνειας του K . Τα υπερεπίπεδα που παράγονται από οποιαδήποτε $n-1$ από τα ιδιοδιανύσματα του I ονομάζονται κύρια (ή πρωτεύοντα) υπερεπίπεδα του K .

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι αν επιλέξουμε κατάλληλα την ορθοκανονική βάση του \mathbb{R}^n ο πίνακας αδράνειας του K είναι διαγώνιος· ο διαγώνιος πίνακας Λ . Συνεπώς, αν εφαρμόσουμε στο σώμα K κατάλληλο διαγώνιο πίνακα (ως προς κατάλληλη βάση) ο πίνακας αδράνειας της νέας θέσης του K , έστω K' , θα είναι πολλαπλάσιος του ταυτοτικού, δηλαδή τα $\int_{K'} x_i^2 dx$ θα είναι ανεξάρτητα του i και $\int_{K'} x_i x_j dx = 0$ για κάθε $i \neq j$. Εύκολα ελέγχουμε ότι αυτές οι συνθήκες συνεπάγονται ότι στη νέα αυτή θέση του το K , δηλαδή το K' , είναι ισοτροπικό!

Αποδείξαμε έτσι ότι κάθε κυρτό σώμα K μπορεί να αλλάξει θέση ώστε η νέα θέση που προκύπτει να είναι ισοτροπική.

Παρατηρούμε εδώ ότι πολύ συχνά στη βιβλιογραφία η ισοτροπική θέση περιγράφεται λέγοντας ότι ο πίνακας αδράνειας του σώματος K είναι πολλαπλάσιος του ταυτοτικού συν τις συνθήκες κανονικοποίησης του Ορισμού 10.0.1, δηλαδή ότι πρέπει να έχει όγκο ίσο με 1 και κέντρο μάζας στο 0.

Αν ονομάσουμε $C = C_K = \text{Cov}(K)$ τον πίνακα $(\int_K x_i x_j dx)_{ij}$ τότε ισχύει

$$I_K = \frac{\text{tr}(I_K)}{n-1} \text{Id} - C.$$

Αυτό ελέγχεται εύκολα, αφού

$$\text{tr}(I_K) = \sum_{i=1}^n \left(\int_K \|x\|_2^2 dx - \int_K x_i^2 dx \right) = (n-1) \int_K \|x\|_2^2 dx.$$

Ο πίνακας $C = C_K$ ονομάζεται πίνακας συνδιακύμανσης (Covariance matrix) του K . Συνήθως μελετάμε τον πίνακα C αντί για τον I αφού ο C είναι απλούστερος και οι ιδιότητες του I που μας ενδιαφέρουν προκύπτουν άμεσα από τις ιδιότητες του C . Για παράδειγμα, ο I είναι

πολλαπλάσιος του ταυτοτικού Id (και το σώμα K είναι ισοτροπικό) αν και μόνο αν ο C είναι πολλαπλάσιος του ταυτοτικού. Με βάση αυτή την παρατήρηση μπορούμε να δώσουμε τον εξής εναλλακτικό ορισμό του ισοτροπικού σώματος:

ΟΡΙΣΜΟΣ 10.1.1 (Ισοτροπικό σώμα, (εναλλακτικός ορισμός)). Ένα κυρτό σώμα $K \subseteq \mathbb{R}^n$ λέγεται ισοτροπικό αν έχει όγκο ίσο με 1, κέντρο μάζας στο 0 και ισχύουν οι σχέσεις

$$(i) \int_K x_i^2 dx = \int_K x_j^2 dx \text{ για κάθε } i, j = 1, \dots, n \text{ και}$$

$$(ii) \int_K x_i x_j dx = 0 \text{ για κάθε } i, j = 1, \dots, n \text{ με } i \neq j.$$

Ο αριθμός $L_K = (\int_K x_i^2 dx)^{1/2}$ (που είναι ανεξάρτητος του i) ονομάζεται σταθερά ισοτροπίας του K .

Πρέπει βεβαίως κανείς να ελέγξει ότι η L_K όπως ορίστηκε εδώ ισούται με την L_K όπως ορίστηκε στον Ορισμό 10.0.1. Αυτό είναι απλό και το διατυπώνουμε στην Άσκηση 10.1.1.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 10.1.1 Αποδείξτε ότι αν ισχύουν οι σχέσεις (i) και (ii) του Ορισμού 10.1.1 τότε το $\int_K \langle x, \theta \rangle^2 dx$ είναι ανεξάρτητο του $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$.

10.1.3 Πολική ροπή αδρανείας

Ας υποθέσουμε ότι το αντικείμενο που μελετάμε είναι δισδιάστατο (για παράδειγμα ένα τμήμα ενός λεπτού φύλλου κάποιου υλικού). Μπορούμε να θεωρήσουμε τώρα ότι το σώμα αυτό θα περιστραφεί στο επίπεδο στο οποίο περιέχεται. Ο μόνος τρόπος να γίνει αυτό είναι να περιστραφεί γύρω από κάποιο σημείο x_0 αυτού του επιπέδου. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να θεωρήσουμε το σώμα στον τρισδιάστατο χώρο και να θεωρήσουμε ότι θα περιστραφεί γύρω από τον άξονα που περνάει κάθετα στο επίπεδο στο οποίο περιέχεται, από το x_0 . Η αδράνεια που επιδεικνύει αυτό το σώμα σε μια τέτοια περιστροφή δίνεται όπως και πριν από το ολοκλήρωμα πάνω στο σώμα του τετραγώνου της απόστασης των σημείων του από τον άξονα περιστροφής, που σε αυτή την περίπτωση είναι το σημείο x_0 . Αυτή η ροπή αδρανείας ονομάζεται *πολική* και εφόσον η μάζα του σώματος έχει πυκνότητα ίση με 1 και $x_0 = 0$ δίνεται από τον τύπο

$$PI_K = \int_K \|x\|^2 dx.$$

Η γενίκευση σε μεγαλύτερες διαστάσεις είναι όμοια. Το παραπάνω ολοκλήρωμα στον \mathbb{R}^n ονομάζεται πολική ροπή αδρανείας όπου τώρα η περιστροφή είναι γύρω από τον άξονα του \mathbb{R}^{n+1} που περνάει κάθετα στον \mathbb{R}^n από το 0.

Παρατηρούμε εδώ ότι η πολική ροπή αδρανείας σχετίζεται με τα ίχνη των πινάκων I_K και C_K ως εξής:

$$(10.2) \quad PI_K = \int_K \|x\|_2^2 dx = \text{tr}(C_K) = \frac{\text{tr}(I_K)}{n-1}.$$

10.1.4 Διαφορά μεταξύ ισοτροπικού και μη ισοτροπικού σώματος

Είδαμε ήδη ότι για τα ισοτροπικά σώματα η ίδια ροπή προκαλεί την ίδια γωνιακή επιτάχυνση ως προς οποιοδήποτε άξονα. Εδώ θα εμβαθύνουμε λίγο παραπάνω σε αυτή την κατεύθυνση.

Ας υποθέσουμε ότι σε ένα σώμα K στον χώρο τού ασκείται μια ροπή ώστε να αρχίσει να κινείται και στη συνέχεια αφήνεται ελεύθερο, χωρίς να του ασκήται καμία εξωτερική δύναμη (ή η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων ισούται με μηδέν). Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε τη διαφορά στην κίνηση αν το σώμα είναι ισοτροπικό ή όχι.

Αν θεωρήσουμε δύο σημεία $x, y \in K$, με $x \neq y$, αφού το σώμα υποτίθεται στερεό, η απόστασή τους παραμένει σταθερή. Δηλαδή η ποσότητα

$$\|x - y\|_2^2 = \sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2$$

είναι σταθερή ως προς τον χρόνο. Συνεπώς η παράγωγός της ως προς το χρόνο είναι μηδέν. Υπολογίζοντας την παράγωγο με τον κανόνα της αλυσίδας παίρνουμε $2\langle x - y, v_x - v_y \rangle = 0$, όπου με v_x και v_y συμβολίζουμε τις ταχύτητες των σημείων x και y αντίστοιχα. Έτσι για να ισχύει αυτό, είτε $v_x - v_y = 0$ οπότε $v_x = v_y$ και το σώμα κινείται ευθύγραμμα ομαλά, είτε $v_x - v_y \perp x - y$ και το σώμα εκτελεί περιστροφική κίνηση. Επειδή εδώ ασκήθηκε ροπή στο σώμα συμβαίνει το δεύτερο. Έτσι υπάρχει διάνυσμα ω_{xy} ώστε $v_x - v_y = \omega_{xy} \times (x - y)$. Μπορούμε να δούμε τώρα ότι το ω_{xy} είναι ανεξάρτητο των σημείων x και y . Πράγματι, αν πάρουμε τρία σημεία x, y, z στο K θα ισχύει

$$\begin{aligned} \omega_{xz} \times (x - y) - \omega_{xz} \times (z - y) &= \omega_{xz} \times (x - z) = v_x - v_z \\ &= (v_x - v_y) - (v_z - v_y) \\ &= \omega_{xy} \times (x - y) - \omega_{zy} \times (z - y). \end{aligned}$$

Αλλά η τελευταία μπορεί να ισχύει για κάθε $x, y, z \in K$ μόνο αν $\omega_{xz} = \omega_{xy} = \omega_{zy}$. Το κοινό αυτό διάνυσμα ω λοιπόν είναι χαρακτηριστικό της κίνησης του σώματος και ονομάζεται γωνιακή ταχύτητα του σώματος. Μπορούμε να ελέγξουμε ότι το μέτρο του μας δείχνει την γωνιακή μεταβολή των σημείων του K ως προς τον άξονα περιστροφής προς τον απαιτούμενο χρόνο. Η περιστροφική αυτή κίνηση ονομάζεται ομαλή (αφού υποθέσαμε ότι δεν ασκούνται πλέον δυνάμεις στο σώμα ή ασκούνται αλλά έχουν συνισταμένη μηδέν) αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι το διάνυσμα ω είναι σταθερό. Αυτό που γνωρίζουμε σίγουρα είναι ότι το σώμα διατηρεί την κινητική του ενέργεια (αρχή διατήρησης της ενέργειας) και τη στροφορμή του (αρχή διατήρησης της στροφορμής).

Η *κινητική ενέργεια* ενός σημείου του x είναι $E_x = \frac{1}{2} m_x \|v_x\|^2$, όπου m_x η σημειακή μάζα στο x και v_x η ταχύτητά του. Έτσι αν το σώμα K έχει πυκνότητα 1 η κινητική του ενέργεια είναι $E = \frac{1}{2} \int_K \|v_x\|^2 dx$.

Η *στροφορμή* ενός σημείου $x \in K$ ορίζεται ως το διάνυσμα $L_x = m_x x \times v_x$ και άρα για το σώμα K με πυκνότητα 1 η στροφορμή του είναι $L = \int_K x \times v_x dx$. Αντικαθιστώντας το v_x με $\omega \times x$ παίρνουμε

$$L_x = m_x (\|x\|_2^2 \omega - \langle \omega, x \rangle x) = m_x I_x \omega,$$

όπου I_x ο πίνακας αδράνειας του x δηλαδή

$$I_x = \begin{pmatrix} \|x\|_2^2 - x_1^2 & -x_1 x_2 & \dots & -x_1 x_n \\ -x_2 x_1 & \|x\|_2^2 - x_2^2 & \dots & -x_2 x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -x_n x_1 & -x_n x_2 & \dots & \|x\|_2^2 - x_n^2 \end{pmatrix}.$$

Ολοκληρώνοντας ως προς $x \in K$ παίρνουμε ότι η συνολική στροφορμή του K είναι $L = I \omega$ όπου I ο πίνακας αδράνειας του K . Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου ελέγχουμε εύκολα ότι ισχύει $E = \frac{1}{2} \langle L, \omega \rangle$.

Με αυτές τις εξισώσεις μπορούμε να βγάλουμε τα παρακάτω συμπεράσματα.

Αν ο ροπή που ασκήσαμε για την έναρξη της κίνησης του K ήταν κάθετη σε κύριο άξονα του K τότε η στροφορμή L είναι στη διεύθυνση του κύριου άξονα. Αλλά τότε το L είναι ιδιοδιάνυσμα του I και συνεπώς $\omega = I^{-1} L = \lambda^{-1} L$ όπου λ η ιδιοτιμή του I που αντιστοιχεί στον κύριο άξονα. Δηλαδή η γωνιακή ταχύτητα είναι παράλληλη με τη στροφορμή. Αυτό σημαίνει ότι το σώμα θα κάνει μια απλή ομαλή περιστροφική

κίνηση γύρω από αυτόν τον κύριο άξονα.

Αν η ροπή δίνει στροφορμή που δεν είναι στη διεύθυνση κύριου άξονα, τότε αυτή η γωνιακή ταχύτητα δεν είναι απαραίτητα παράλληλη με τη στροφορμή L . Παραμένει όμως σταθερή η συνιστώσα της στη διεύθυνση της στροφορμής L , αφού $E = \frac{1}{2}\langle L, \omega \rangle$, και τόσο η κινητική ενέργεια όσο και η στροφορμή είναι σταθερές.

Έτσι ένα ελλειψοειδές με άνιστους ημιάξονες στο οποίο ασκείται ροπή ώστε να αποκτήσει στροφορμή L η οποία δεν είναι στη διεύθυνση κύριου άξονα, θα κάνει μια σύνθετη κίνηση στον χώρο, η οποία περιλαμβάνει τόσο περιστροφή γύρω από τον άξονα της στροφορμής όσο και περιστροφική κίνηση γύρω από τον εαυτό του. Τέτοια είναι η κίνηση που εκτελεί ο πλανήτης μας: περιστρέφεται γύρω από τον εαυτό του αλλά και ο άξονας περιστροφής δεν είναι σταθερός αλλά εκτελεί και αυτός περιστροφική κίνηση γύρω από τη διεύθυνση της στροφορμής της.

Αν τώρα το ελλειψοειδές έχει για παράδειγμα 2 κύριους άξονες με ίσες ιδιοτιμές τότε αν ο άξονας περιστροφής βρίσκεται στο επίπεδο που παράγουν αυτοί οι δύο άξονες η κίνηση είναι απλή περιστροφική μια και όπως πριν η στροφορμή είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα αδράνειας, οπότε προκύπτει γωνιακή ταχύτητα στη διεύθυνση της στροφορμής.

Τέλος, αν το K είναι στην ισοτροπική του θέση κάθε άξονας περιστροφής οδηγεί σε απλή περιστροφική κίνηση με τη γωνιακή ταχύτητα στη διεύθυνση της στροφορμής. Αυτό είναι προφανές από τα παραπάνω, αφού στην ισοτροπική θέση ο πίνακας αδράνειας I του K είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού.

Παρατήρηση 10.1.2. Να σημειώσουμε εδώ, μια και αναφέρθηκε, ότι ο πλανήτης μας δεν είναι στερεό σώμα, αφού έχει ατμόσφαιρα, νερό, υγρό πυρήνα κλπ. Άρα η κίνηση του δεν είναι και τόσο προβλέψιμη όπως θα ήταν αν επρόκειτο για στερεό σώμα. Οι στρατιωτικοί οργανισμοί καταγράφουν συνεχώς την τροχιά του άξονα του πλανήτη χρησιμοποιώντας αστρονομικά δεδομένα ώστε να ενοπίζουν τη μεταβολή της θέσης του. Αυτό γίνεται βεβαίως, με σκοπό να στοχεύουν με ακρίβεια οι πύραυλοί τους τις πόλεις μας...

10.1.5 Το ελλειψοειδές αδράνειας και το ελλειψοειδές κινητικής ενέργειας

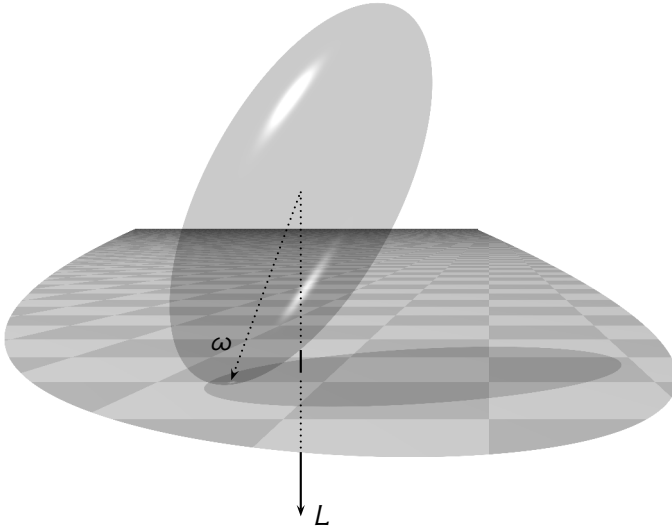
Ας υποθέσουμε για λόγους απλοποίησης, αλλά χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι η κινητική ενέργεια E_K του K ισούται με $1/2$. Εφόσον λοιπόν η κινητική ενέργεια $E_K = \frac{1}{2}\langle I\omega, \omega \rangle$ είναι σταθερή, η γωνιακή ταχύτητα ω ανήκει στο ελλειψοειδές με εξίσωση $\langle I\omega, \omega \rangle = 1$. Το ελλειψοειδές αυτό ονομάζεται *ελλειψοειδές αδράνειας* ή *ελλειψοειδές Poinsot*

και είναι σταθερό (ακίνητο) ως προς το σώμα K καθώς αυτό περιστρέφεται. Το ότι δεν κινείται σε σχέση με το K προκύπτει εύκολα, αφού αν αλλάξουμε στο σύστημα συντεταγμένων των ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα αδρανείας I τότε η εξίσωσή του παραμένει αναλλοίωτη στον χρόνο και είναι η

$$\sum_{j=1}^n I_j \omega_j^2 = 1,$$

όπου τα I_j είναι οι κύριες ροπές αδρανείας και ω_j οι συντεταγμένες της γωνιακής ταχύτητας ω . Ο Poinsot παρατήρησε ότι η $E_K = \frac{1}{2} \langle L, \omega \rangle$ συνεπάγεται ότι $L = 2 \text{grad}_{\omega} E_K$. Δηλαδή η στροφορμή L είναι κάθετη στο εφαπτόμενο επίπεδο του ελλειψοειδούς $E_K = \text{σταθερά}$, δηλαδή στο εφαπτόμενο επίπεδο του ελλειψοειδούς αδρανείας στο ω . Αυτή η κατασκευή είναι γνωστή ως κατασκευή Poinsot και περιγράφει με ακρίβεια την περιστροφική κίνηση του K . Πράγματι, αφού η στροφορμή L είναι σταθερή, για να μπορεί να είναι πάντα κάθετη στο παραπάνω εφαπτόμενο επίπεδο θα πρέπει το ελλειψοειδές αδρανείας να περιστρέφεται κατάλληλα και μαζί του και το σώμα K . Πάλι από το γεγονός ότι η κινητική ενέργεια E_K είναι σταθερή και το ότι $E_K = \frac{1}{2} \langle L, \omega \rangle$ προκύπτει ότι η προβολή του ω στη διεύθυνση του L είναι σταθερή, δηλαδή είναι σταθερή η απόσταση του κέντρου του ελλειψοειδούς αδρανείας από το εφαπτόμενο επίπεδο στο ω . Συνεπώς το εφαπτόμενο επίπεδο είναι αναλλοίωτο στον χρόνο και για αυτό ονομάζεται *αναλλοίωτο επίπεδο* (invariable plane). Το ω είναι το σημείο επαφής του ελλειψοειδούς αδρανείας καθώς αυτό περιστρέφεται και του αναλλοίωτου επιπέδου. Κατά την κίνηση αυτή το ω διαγράφει μια καμπύλη πάνω στο ελλειψοειδές αδρανείας η οποία ονομάζεται *πολική καμπύλη* (στα αγγλικά ονομάζεται «rolhode» από τις λέξεις πόλος+οδός). Αντίστοιχα το σημείο επαφής διαγράφει μια καμπύλη πάνω στο αναλλοίωτο επίπεδο που ονομάζεται *αντιπολική καμπύλη* (στα αγγλικά «herpolhode» από τις λέξεις έρπω+πόλος+οδός).

Ενδιαφέρον όμως παρουσιάζει και η κίνηση του διανύσματος της στροφορμής L ως προς έναν παρατηρητή που βρίσκεται μέσα στο σώμα και κινείται μαζί του. Για αυτόν, προφανώς το ω είναι τώρα σταθερό και αλλάζει το L . Μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι ως προς το σύστημα συντεταγμένων των ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα αδρανείας το L βρίσκεται πάντα στο ελλειψοειδές $\sum_{i=1}^n I_i^{-1} L_i^2 = 1$. Αυτό το ελλειψοειδές ονομάζεται *ελλειψοειδές της κινητικής ενέργειας* ή *ελλειψοειδές Binet* του K . Επειδή επιπλέον ισχύει $\sum_{i=1}^n L_i^2 = \|L\|_2^2$ το οποίο είναι σταθερό, συμπεραίνουμε ότι το διάνυσμα της στροφορμής L παραμένει στην τομή



ΣΧΗΜΑ 10.2: Το ελλειψοειδές Poinsot, το σταθερό διάνυσμα στροφορμής L , η μεταβαλλόμενη γωνιακή ταχύτητα ω και το αναλλοίωτο επίπεδο. Το ω παραμένει σταθερά στο σημείο επαφής του ελλειψοειδούς με το επίπεδο. Καθώς το ελλειψοειδές στρέφεται γύρω από τον εαυτό του, το σημείο επαφής με το επίπεδο (ισοδύναμα το ω) διαγράφει πάνω στο ελλειψοειδές την πολική καμπύλη, ενώ καθώς το ελλειψοειδές περιστρέφεται και γύρω από τον άξονα του L , το σημείο επαφής με το επίπεδο (ισοδύναμα το ω) διαγράφει την αντιπολική καμπύλη πάνω στο επίπεδο.

της σφαίρας ακτίνας $\|L\|_2$ και του ελλειψοειδούς Binet. Παρατηρούμε τέλος, ότι το ελλειψοειδές κινητικής ενέργειας Binet είναι το πολικό ελλειψοειδές του ελλειψοειδούς αδρανείας Poinsot.

Παρατήρηση 10.1.3. Στη βιβλιογραφία της κυρτότητας ως ελλειψοειδές αδρανείας δεν ορίζεται το ελλειψοειδές Poinsot αλλά, κατά παράβαση των φυσικών εννοιών που περιγράψαμε παραπάνω, ένα ελλειψοειδές που φέρει το όνομα του Legendre, και είναι διαφορετικό από το προηγούμενο, αν και έχει τους ίδιους κύριους άξονες. Θα περιγράψουμε αυτό το ελλειψοειδές στην υποενότητα 10.2.1. Ομοίως το ελλειψοειδές Binet δεν ορίζεται σύμφωνα με τις παραπάνω φυσικές έννοιες αλλά ως δυϊκό του ελλειψοειδούς Legendre. Σε κάθε περίπτωση δεν κατέστη εφικτό να βρω στη βιβλιογραφία από που προκύπτει η απόδοση στον Legendre. Πιθανώς, να είναι αποτέλεσμα του γεγονότος ότι η πολικότητα μπορεί να περιγραφεί μέσω του μετασχηματισμού του Legendre.

Δηλαδή από τη μία το ελλειψοειδές Binet δεν ορίζεται ως το ελλειψοειδές κινητικής ενέργειας όπως παραπάνω, και από την άλλη το δυϊκό του ονομάζεται ελλειψοειδές Legendre (δείτε και Άσκηση 10.1.1).

Παρατήρηση 10.1.4. Οι όροι *rolhode* και *herpolhode* προέρχονται από τον 17ο αιώνα και βρίσκονται στο Πόρισμα 21 της Πρότασης 66 της Ενότητας 1.1 στο πρώτο βιβλίο του *Principia* του Isaac Newton. Με το πρόβλημα της περιστροφής ενός στερεού σώματος ασχολήθηκε τόσο ο Newton όσο και ο Leonhard Euler αργότερα, ο οποίος παρήγαγε ένα σύνολο εξισώσεων που περιγράφουν την κίνηση. Αφορμή για αυτές τις μελέτες ήταν η παρατήρηση των Jean d' Alembert και Louis Lagrange και άλλων, ότι υπήρχαν μετατοπίσεις του γεωγραφικού πλάτους της Γης λόγω ταλάντευσής της γύρω από τον πολικό άξονα περιστροφής της.

Στα μέσα του 19ου αιώνα ο Louis Poinsot περιέγραψε γεωμετρικά την περιστροφική κίνηση ενός στερεού σώματος με τη βοήθεια της «κατασκευής Poinsot» που περιγράψαμε παραπάνω, δίνοντας μια γεωμετρική ερμηνεία των αλγεβρικών εξισώσεων του Euler. Περισσότερα για αυτά τα θέματα μπορεί να βρει κανείς στα [GPS2001] και [KO2007].

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 10.1.1 Για κάθε κυρτή συνάρτηση $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ όπου το X είναι κυρτό σύνολο, ορίζουμε τον μετασχηματισμό Legendre της f να είναι η συνάρτηση $\mathcal{L}(f) : X^* \rightarrow \mathbb{R}$ όπου

$$X^* = \{x^* \in \mathbb{R}^n : \sup_{x \in X} (\langle x^*, x \rangle - f(x)) < \infty\}$$

με

$$\mathcal{L}(f)(x^*) = \sup_{x \in X} (\langle x^*, x \rangle - f(x)).$$

Αποδείξτε (χρησιμοποιώντας τεχνικές απειροστικού λογισμού εύρεσης μεγίστου) ότι αν το \mathcal{E} είναι οποιοδήποτε ελλειψοειδές στον \mathbb{R}^n και \mathcal{E}^o το πολικό του, τότε ισχύει

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{2}\|\cdot\|_{\mathcal{E}}^2\right) = \frac{1}{2}\|\cdot\|_{\mathcal{E}^o}^2.$$

Συμπεράνεται ότι το ελλειψοειδές Poinsot είναι το Legendre δυϊκό ελλειψοειδές του ελλειψοειδούς Binet, με την έννοια ότι

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{2}\|\cdot\|_{\text{Binet}}^2\right) = \frac{1}{2}\|\cdot\|_{\text{Poinsot}}^2.$$

Άσκηση 10.1.2* Στην άσκηση αυτή γενικεύουμε την Άσκηση 10.1.1 για κάθε σώμα K και το πολικό του K° . Το ζητούμενο δηλαδή είναι να αποδειχθεί ότι ισχύει

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{2}\|\cdot\|_K^2\right) = \frac{1}{2}\|\cdot\|_{K^\circ}^2,$$

για κάθε κυρτό σώμα K με το 0 στο εσωτερικό του (ώστε να ορίζεται το πολικό σώμα), ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

(i) Δείξτε ότι υπάρχει $R > 0$ ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ με $\|x\|_2 > R$ η ποσότητα $\langle u, x \rangle - \frac{1}{2}\|x\|_K^2$ είναι αρνητική. Συμπεράνετε από αυτό ότι η προηγούμενη ποσότητα έχει μέγιστη τιμή, έστω στο x_0 .

(ii) Αποδείξτε ότι

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{2}\|\cdot\|_K^2\right)(u) \leq \frac{1}{2}h_K(u)$$

παρατηρώντας ότι

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{2}\|\cdot\|_K^2\right)(u) = \langle u, x_0 \rangle - \frac{1}{2}\|x_0\|_K^2 \leq \max_{r \geq 0} \left(r \left\langle u, \frac{x_0}{\|x_0\|_K} \right\rangle - \frac{1}{2}r^2 \right).$$

(iii) Για την αντίστροφη ανισότητα

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{2}\|\cdot\|_K^2\right)(u) \geq \frac{1}{2}h_K(u),$$

δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in \text{bd}(K)$ ώστε $h_K(u) = \langle u, x_0 \rangle$ και παρατηρήστε ότι για κάθε $r \geq 0$ θέτοντας $x = rx_0$ ισχύει

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{2}\|\cdot\|_K^2\right)(u) \geq \max_{r \geq 0} \left(r \langle u, x_0 \rangle - \frac{1}{2}r^2 \right).$$

Παρατήρηση: Είναι δυνατόν να αποδείξει κανείς ότι ισχύει και η $\mathcal{L}(\|\cdot\|_K)(u) = \|u\|_{K^\circ}$ αλλά η απόδειξη είναι αρκετά πιο περίπλοκη και απαιτεί επιπλέον υποθέσεις (να είναι η $\|\cdot\|_K$ κλάσης C^2 στο $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ καθώς και το K να είναι γνήσια κυρτό (δείτε [GH2004] Κεφάλαιο 7, Πρόταση 6.)).

10.2 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΣΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΙΣΟΤΡΟΠΙΚΗΣ ΘΕΣΗΣ

Αν και εξηγήσαμε παραπάνω ότι κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα έχει ισοτροπική θέση θα γράψουμε μια σύντομη και τυπικότερη απόδειξη.

Πρόταση 10.2.1. *Για κάθε κεντρικά συμμετρικό κυρτό σώμα $K \subseteq \mathbb{R}^n$ υπάρχει $T \in \text{GL}(n)$ ώστε το $T(K)$ να είναι ισοτροπικό.*

Απόδειξη: Θεωρούμε την απεικόνιση $M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ όπου

$$M(y) = \int_K \langle x, y \rangle x \, dx = \left(\int_K \langle x, y \rangle x_j \, dx_1 \dots dx_n \right)_{j=1}^n.$$

Η M είναι μια γραμμική απεικόνιση με πίνακα τον $M = (\int_K x_i x_j \, dx)_{ij}$. Ο M είναι φανερά συμμετρικός αλλά και θετικά ορισμένος, αφού αν $y \neq 0$ ισχύει

$$\langle M(y), y \rangle = \int_K \langle x, y \rangle^2 \, dx > 0.$$

Οπότε υπάρχει συμμετρικός και θετικά ορισμένος $n \times n$ πίνακας S ώστε $S^2 = M$. Θέτουμε $\tilde{K} = S^{-1}(K)$. Παρατηρούμε ότι ο S^{-1} είναι και αυτός συμμετρικός οπότε ισούται με τον ανάστροφό του $(S^{-1})^t$. Για κάθε $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ θέτουμε $y = Sx$ και χρησιμοποιώντας τον τύπο αλλαγής μετβλητής στον \mathbb{R}^n , έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{K}} \langle x, \theta \rangle^2 \, dx &= |\det S|^{-1} \int_K \langle S^{-1}y, \theta \rangle^2 \, dy \\ &= |\det S|^{-1} \int_K \langle y, (S^{-1})^t \theta \rangle^2 \, dy \\ &= |\det S|^{-1} \int_K \langle y, S^{-1} \theta \rangle^2 \, dy \\ &= |\det S|^{-1} \int_K \langle \langle y, S^{-1} \theta \rangle y, S^{-1} \theta \rangle \, dy \\ &= |\det S|^{-1} \left\langle \int_K \langle y, S^{-1} \theta \rangle y \, dy, S^{-1} \theta \right\rangle \\ &= |\det S|^{-1} \langle M(S^{-1} \theta), S^{-1} \theta \rangle \\ &= |\det S|^{-1}, \end{aligned}$$

δηλαδή είναι ανεξάρτητο του θ . Μένει να κανονικοποιήσουμε τον όγκο: θέτουμε $T = \text{vol}_n(S^{-1}(K))^{-1/n} S^{-1}(K)$. \square

Το επόμενο που θέλουμε να δείξουμε είναι ότι η ισοτροπική θέση για ένα συμμετρικό κυρτό σώμα είναι μοναδική εκτός από ορθογώνιους μετασχηματισμούς (στροφές-ανακλάσεις και συνδυασμούς τους). Για αυτό θα χρειαστούμε το παρακάτω πόρισμα του Θεωρήματος 2.2.4 και ένα ακόμα λήμμα.

Πόρισμα 10.2.2. *Αν ο T είναι ένας συμμετρικός, θετικά ημιορισμένος*

$n \times n$ πίνακας τότε

$$\frac{\text{tr}(T)}{n} \geq (\det T)^{1/n}$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν ο T είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού.

Απόδειξη: Ένας συμμετρικός θετικά ημιορισμένος πίνακας είναι διαγωνοποιήσιμος. Αν $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ οι (μη αρνητικές) ιδιοτιμές του τότε

$$\frac{\text{tr}(T)}{n} = \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}{n} \geq (\lambda_1 \dots \lambda_n)^{1/n} = (\det T)^{1/n}.$$

Αν ισχύει ισότητα τότε όλες οι ιδιοτιμές είναι μεταξύ τους ίσες οπότε ο T είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού. \square

Λήμμα 10.2.3. Η ισοτροπική θέση ελαχιστοποιεί την πολική ροπή αδρανείας $P|_K$, το ίχνος του πίνακα αδρανείας I_K και το ίχνος του πίνακα συνδιακύμανσης C_K . Ισοδύναμα, αν το K βρίσκεται σε ισοτροπική θέση και $T \in GL(n)$ με $\det(T) = 1$, ισχύει

$$(10.3) \quad \int_K \|x\|_2^2 dx \leq \int_{TK} \|x\|_2^2 dx.$$

Απόδειξη: Από τη σχέση (10.2) αρκεί να αποδείξουμε την (10.3). Παρατηρούμε πρώτα ότι για κάθε $n \times n$ πίνακα S ισχύει

$$(10.4) \quad \int_K \langle x, Sx \rangle dx = \sum_{ij} \left(\int_K x_i x_j dx \right) s_{ij} = \text{tr}(C_K S).$$

Εφαρμόζουμε την (10.4) για $S = \text{Id}$ και K ισοτροπικό (οπότε $C_K = L_K^2 \text{Id}$):

$$(10.5) \quad \int_K \|x\|_2^2 dx = \int_K \langle x, x \rangle dx = \text{tr}(L_K^2 \text{Id}) = nL_K^2.$$

Εφαρμόζουμε ξανά την (10.4) για το σώμα $T(K)$, και αλλάζοντας μεταβλητή (θέτοντας $y = T^{-1}x$) παίρνουμε

$$(10.6) \quad \int_{T(K)} \|x\|_2^2 dx = \int_{T(K)} \langle x, x \rangle dx = \int_K \langle y, T^t T y \rangle dy = \text{tr}(C_K T^t T).$$

Αλλά το K είναι ισοτροπικό οπότε $C_K = L_K^2 \text{Id}$, και από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου $\text{tr}(T^t T)/n \geq \det(T^t T)^{1/n} = 1$ (Πόρι-

σμα 10.2.2), και την (10.5) παίρνουμε

$$(10.7) \quad \int_{T(K)} \|x\|_2^2 dx = L_K^2 \operatorname{tr}(T^t T) \geq L_K^2 n \det(T^t T)^{1/n} = \int_K \|x\|_2^2 dx,$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. \square

Παρατήρηση 10.2.4. Από το παραπάνω λήμμα προκύπτει άμεσα ότι αν ένα εξάρτημα μιας μηχανής θα περιστρέφεται στο επίπεδο στο οποίο ανήκει τότε η ενεργειακά συμφέρουσα επιλογή είναι το εξάρτημα να βρίσκεται στην ισοτροπική του θέση. Διότι τότε θα έχει την ελάχιστη πολική ροπή αδρανείας, δηλαδή απαιτείται μικρότερη ροπή για την απόκτηση της ίδιας γωνιακής ταχύτητας από οποιαδήποτε άλλη θέση.

Παρατήρηση 10.2.5. Η σχέση (10.5) και το Λήμμα 10.2.3 μας δίνουν άλλους δύο τύπους για τη σταθερά ισοτροπίας L_K . Από την (10.5) αν το K είναι ισοτροπικό τότε

$$L_K = \left(\frac{1}{n} \int_K \|x\|_2^2 dx \right)^{1/2}.$$

Από την (10.5) και το Λήμμα 10.2.3

$$\begin{aligned} L_K &= \inf \left\{ \left(\frac{1}{n} \int_{T(K)} \|x\|_2^2 dx \right)^{1/2} : \det T = 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \left(\frac{1}{\operatorname{vol}_n(T(K))^{1+\frac{2}{n}}} \frac{1}{n} \int_{T(K)} \|x\|_2^2 dx \right)^{1/2} : T \in \operatorname{GL}(n) \right\} \end{aligned}$$

Πρόταση 10.2.6. Η ισοτροπική θέση είναι μοναδική εκτός από ορθογώνιους μετασχηματισμούς.

Απόδειξη: Αν το K είναι ισοτροπικό και ο T είναι ένας $n \times n$ πίνακας ώστε το $T(K)$ να είναι και αυτό ισοτροπικό τότε θα δείξουμε ότι ο T είναι ορθογώνιος. Πράγματι, από το Λήμμα 10.2.3 τόσο το K όσο και το $T(K)$ ελαχιστοποιούν το ολοκλήρωμα του τετραγώνου της Ευκλείδειας νόρμας ανάμεσα σε όλες τις θέσεις του K . Συνεπώς ισχύει ισότητα στη σχέση (10.7). Άρα ισχύει ισότητα στην ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου $\operatorname{tr}(T^t T)/n \geq \det(T^t T)$, και συνεπώς ο $T^t T$ είναι πολλαπλάσιος του ταυτοτικού (Πόρισμα 10.2.2). Αλλά επειδή πρέπει

να έχει και οριζουσα ίση με 1, είναι ο ταυτοτικός. Έτσι $T^t T = \text{Id}$, δηλαδή ο T είναι ορθογώνιος. \square

Εύκολα βλέπει κανείς ότι το K είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν ισχύει η (10.3):

Πόρισμα 10.2.7. *Αν ισχύει*

$$(10.8) \quad \int_K \|x\|_2^2 dx \leq \int_{TK} \|x\|_2^2 dx,$$

για κάθε $n \times n$ πίνακα οριζουσας 1, τότε το K είναι ισοτροπικό.

Απόδειξη: Πράγματι, όπως και στην απόδειξη της Πρότασης 10.2.6, έτσι και εδώ, αν το $T(K)$ είναι ισοτροπικό για κατάλληλο T , τότε πάλι θα ισχύει ισότητα στην (10.7), οπότε όπως και πριν ο T είναι ορθογώνιος, δηλαδή το K είναι ισοτροπικό. \square

10.2.1 *Ελλειψοειδές Binet και ελλειψοειδές Legendre*

Στο κλασικό τους άρθρο [MPI986] οι V. Milman και A. Pajor δίνουν τους ορισμούς του ελλειψοειδούς Binet και του Legendre-δυσικού του. Όμως αντί να χρησιμοποιήσουν τον πίνακα αδρανείας $I(K)$ χρησιμοποιούν τον πίνακα συνδιακύμανσης C_K . Έτσι ορίζουν το ελλειψοειδές Binet με τη σχέση

$$(10.9) \quad \|\theta\|_{\text{Binet}}^2 = \int_K |\langle x, \theta \rangle|^2 dx.$$

Αυτό το ελλειψοειδές είναι διαφορετικό από το ελλειψοειδές Binet όπως ορίζεται στην Κλασική Μηχανική και παρουσιάσαμε νωρίτερα. Έχει βέβαια τους άξονές του στις ίδιες διευθύνσεις με το ελλειψοειδές Binet της Κλασικής Μηχανικής, αφού οι πίνακες συνδιακύμανσης C_K και αδρανείας $I(K)$ έχουν τα ίδια ιδιοδιανύσματα λόγω της σχέσης

$$I(K) = \left(\int_K \|x\|_2^2 dx \right) \text{Id} - C_K,$$

αλλά διαφορετικά μήκη ημιαξόνων. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι η βάση του χώρου e_1, e_2, \dots, e_n έχει επιλεγθεί να είναι τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα αδρανείας, οπότε $I(K) = \text{diag}(I_j)_{j=1}^n$ και $C_K = \text{diag}(C_j)_{j=1}^n$. δηλαδή οι πίνακες αδρανείας και συνδιακύμανσης είναι διαγώνιοι. Επί-

σης ισχύει $I_j + C_j = \int_K \|x\|_2^2 dx$. Σύμφωνα με την (10.9) ισχύει

$$\|e_j\|_{\text{Binet}}^2 = \int_K |\langle x, e_1 \rangle|^2 dx = \int_K x_j^2 dx = C_j = \int_K \|x\|_2^2 dx - I_j.$$

Όμως ο ορισμός του ελλειψοειδούς Binet και του ελλειψοειδούς Poinsot στην Κλασική Μηχανική, όπως τον παρουσιάσαμε στην υποενότητα 10.1 ε', δίνει:

$$\|e_j\|_{\text{Binet}}^2 = \frac{1}{I_j} \quad \text{και} \quad \|e_j\|_{\text{Poinsot}}^2 = I_j.$$

why
Legendre
ell exists?

Επίσης ορίζουν το ελλειψοειδές «Legendre» $\mathcal{E}_{\text{Legendre}}$, θέτοντας

$$(10.10) \quad \int_{\mathcal{E}_{\text{Legendre}}} |\langle x, \theta \rangle|^2 dx = \int_K |\langle x, \theta \rangle|^2 dx,$$

για κάθε $\theta \in \mathbb{R}^n$. Με αυτούς τους ορισμούς αποδεικνύουν ότι

$$E_{\text{Binet}} = \sqrt{\frac{n+2}{\text{vol}(\mathcal{E}_{\text{Legendre}})}} \mathcal{E}_{\text{Legendre}}^\circ,$$

ταυτότητα που θα αποδείξουμε παρακάτω. Από αυτήν εύκολα προκύπτει ότι

$$\|e_j\|_{\mathcal{E}_{\text{Legendre}}}^2 = \frac{n+2}{\text{vol}(\mathcal{E}_{\text{Legendre}})} \frac{1}{C_j}.$$

Συνεπώς βλέπουμε ότι ενώ οι δύο διαφορετικοί ορισμοί δεν συμπίπτουν, εν τούτοις γνωρίζοντας τα ελλειψοειδή από την Κλασική Μηχανική μπορούμε να υπολογίσουμε και τα αντίστοιχα ελλειψοειδή όπως ορίζονται στο [MP1986], και αντίστροφα. Επίσης, αν το σώμα K είναι ισοτροπικό τότε τόσο ο πίνακας αδρανείας $I(K)$ όσο και ο πίνακας συνδιακύμανσης C_K είναι πολλαπλάσιοι του ταυτοτικού, και όλα αυτά τα ελλειψοειδή είναι πολλαπλάσια της Ευκλείδειας μπάλας \mathcal{B}_2^n . Οπότε, στην περίπτωση που το σώμα είναι ισοτροπικό, με τις κατάλληλες κανονικοποιήσεις τα ελλειψοειδή των δύο ορισμών ταυτίζονται.

Πρόταση 10.2.8. Με τους ορισμούς του [MP1986] ισχύει

$$E_{\text{Binet}} = \sqrt{\frac{n+2}{\text{vol}(\mathcal{E}_{\text{Legendre}})}} \mathcal{E}_{\text{Legendre}}^\circ.$$

Απόδειξη: Για κάθε ελλειψοειδές \mathcal{E} και $T \in GL(n)$ ώστε $\mathcal{E} = T(B_2^n)$ εύκολα ελέγχουμε ότι ισχύει $\|\theta\|_{\mathcal{E}^0} = \|T^t(\theta)\|_2$ για κάθε $\theta \in \mathbb{R}^n$. Επιπλέον αλλάζοντας μεταβλητές παίρνουμε εύκολα τον τύπο

$$\frac{1}{\text{vol}(\mathcal{E})} \int_{\mathcal{E}} |\langle x, \theta \rangle|^2 dx = \frac{1}{\text{vol}(B_2^n)} \int_{B_2^n} |\langle x, T^t(\theta) \rangle|^2 dx.$$

Το δεύτερο όμως ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί με αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες (δείτε Ενότητα 8.3) ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{vol}(B_2^n)} \int_{B_2^n} |\langle x, T^t(\theta) \rangle|^2 dx &= n \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle x, T^t(\theta) \rangle|^2 \left(\int_0^1 r^{n+1} dr \right) d\sigma(x) \\ (10.11) \qquad \qquad \qquad &= \frac{n}{n+2} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle x, T^t(\theta) \rangle|^2 d\sigma(x) \end{aligned}$$

$$(10.12) \qquad \qquad \qquad = \frac{1}{n+2} \|T^t(\theta)\|_2^2 = \frac{1}{n+2} \|\theta\|_{\mathcal{E}^0}^2.$$

όπου από την (10.11) στην (10.12) χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle x, y \rangle| d\sigma_n(x) = \|y\|_2^2/n$ (δείτε Άσκηση 10.2.1). Δείξαμε έτσι ότι

$$\|\theta\|_{\mathcal{E}^0} = \sqrt{\frac{n+2}{\text{vol}(\mathcal{E})}} \left(\int_{\mathcal{E}} |\langle x, \theta \rangle|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Αντικαθιστώντας το \mathcal{E} με το ελλειψοειδές Legendre και χρησιμοποιώντας την (10.10) και την (10.9) καταλήγουμε στο ζητούμενο. \square

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 10.2.1 Αποδείξτε ότι για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle x, y \rangle| d\sigma_n(x) = \|y\|_2^2/n$$

παρατηρώντας πρώτα ότι

$$1 = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \|x\|_2^2 d\sigma_n(x) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \sum_{j=1}^n |\langle x, e_j \rangle|^2 d\sigma_n(x),$$

και τα $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle x, e_j \rangle|^2 d\sigma_n(x)$ είναι ανεξάρτητα του j .

Άσκηση 10.2.2 Αποδείξτε ότι για κάθε $T \in GL(n)$ αν θέσουμε $\mathcal{E} = T(B_2^n)$ τότε

ισχύει

$$\frac{1}{\text{vol}(\mathcal{E})} \int_{\mathcal{E}} |\langle x, \theta \rangle|^2 dx = \frac{1}{\text{vol}(B_2^n)} \int_{B_2^n} |\langle x, T^t(\theta) \rangle|^2 dx,$$

για κάθε $\theta \in \mathbb{R}^n$. Συμπληρώστε όλες τις λεπτομέρειες της απόδειξης της Πρότασης 10.2.8.

Άσκηση 10.2.3 Ας συμβολίσουμε με $\mathcal{E}_p(K)$ το ελλειψοειδές αδρανείας/Poinsot του κυρτού σώματος K . Αποδείξτε ότι για την πολική ροπή αδρανείας του $\mathcal{E}_p(K)$ ισχύει ότι

$$I(\mathcal{E}_p(K)) = c_n \frac{\text{vol}_n(B_2^{n-1})}{\text{vol}_n(B_2^n)} \text{vol}_n(\mathcal{E}_p(K)) \sum_{i=1}^n \frac{1}{I_i},$$

όπου $(I_i)_{i=1}^n$ οι πρωτεύουσες ροπές αδρανείας του K και

$$c_n = \frac{\Gamma(3/2)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+4}{4}\right)} \simeq \frac{2\sqrt{6\pi}}{e^{3/2}} \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Επιπλέον, ο πίνακας αδρανείας του $\mathcal{E}_p(K)$ είναι διαγώνιος όπου το i στοιχείο της διαγωνίου του είναι το

$$I(\mathcal{E}_p(L))_{ii} = c_n \frac{\text{vol}_n(B_2^{n-1})}{\text{vol}_n(B_2^n)} \text{vol}_n(\mathcal{E}_p(K)) \sum_{j \neq i} \frac{1}{I_j}$$

όπου c_n η προηγούμενη σταθερά.

Συμπεράνετε ότι το ελλειψοειδές αδρανείας/Poinsot δεν είναι πολλαπλάσιο του ελλειψοειδούς Legendre.

(Υπόδειξη: Ξεκινήστε από τον υπολογισμό του $I(\mathcal{E}_p(L))_{ii}$ ολοκληρώνοντας ως προς ω_i και παρατηρώντας ότι το $\mathcal{E}_p(K) \cap (\omega_i e_i + [e_i]^\perp)$ είναι ελλειψοειδές με μήκη ημιαξόνων $I_j^{-1/2} (1 - I_i \omega_i^2)^{1/2}$, όπου τα e_i είναι η ορθοκανονική βάση που ορίζεται από τους πρωτεύοντες άξονες αδρανείας. Για την εκτίμηση για το c_n χρησιμοποιείστε την Άσκηση Β'.2.7.)

10.3 ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΑ ΚΟΙΛΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ & ΜΕΤΡΑ

Η γεωμετρία ενός κυρτού συμμετρικού σώματος K , στην ουσία καθορίζει μια κατανομή μάζας στον \mathbb{R}^n , όπου η πυκνότητα είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση χ_K . Κάθε ολοκλήρωμα που χρησιμοποιείται για τον ορισμό της έννοιας της ισοτροπίας θα μπορούσε αντί να γραφτεί ως ολοκλήρωμα πάνω στο K να γραφτεί πάνω σε όλο το \mathbb{R}^n με τη βοήθεια της χαρακτηριστικής συνάρτησης του K . Για παράδειγμα το $\int_K \langle x, \theta \rangle^2 dx$ μπορεί να γραφτεί ως $\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta \rangle^2 \chi_K(x) dx$. Συνεπώς η έννοια της ισοτροπίας μπορεί να οριστεί και για άλλες συναρτήσεις εκτός των

χαρακτηριστικών συναρτήσεων κυρτών συμμετρικών σωμάτων. Πράγματι, αυτό είναι εφικτό για οποιοδήποτε «τρόπο» διαθέτει κανείς να περιγράψει την κατανομή μιας μάζας στον \mathbb{R}^n . Δύο πολύ συνήθεις τέτοιοι τρόποι παρέχονται από τις λογαριθμικά κοίλες συναρτήσεις και, κατ' επέκταση, από λογαριθμικά κοίλα μέτρα.

Ορισμός 10.3.1. Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ λέγεται λογαριθμικά κοίλη αν για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε $\lambda \in [0, 1]$ ισχύει

$$(10.13) \quad f((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq f(x)^{1-\lambda} f(y)^\lambda.$$

Ορισμός 10.3.2. Ένα μέτρο μ στο \mathbb{R}^n λέγεται λογαριθμικά κοίλο αν για οποιαδήποτε Lebesgue μετρήσιμα σύνολα A, B στον \mathbb{R}^n και για κάθε $\lambda \in [0, 1]$ για το οποίο το $(1 - \lambda)A + \lambda B$ είναι μετρήσιμο, ισχύει

$$(10.14) \quad \mu((1 - \lambda)A + \lambda B) \geq \mu(A)^{1-\lambda} \mu(B)^\lambda.$$

Μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση f ορίζει ένα μέτρο μ_f μέσω του τύπου $\mu_f(A) = \int_A f(x) dx$ για κάθε Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Το μέτρο αυτό είναι λογαριθμικά κοίλο σύμφωνα με την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 10.3.3. Αν η $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ είναι μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση τότε το μ_f είναι λογαριθμικά κοίλο μέτρο.

Απόδειξη: Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από την ανισότητα Prekora-Leindler (Θεώρημα 6.1.1). Πράγματι, αν τα σύνολα A, B είναι Lebesgue μετρήσιμα στον \mathbb{R}^n και για $\lambda \in [0, 1]$ το σύνολο $(1 - \lambda)A + \lambda B$ είναι Lebesgue μετρήσιμο τότε εύκολα ελέγχουμε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$(f\chi_{(1-\lambda)A+\lambda B})((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq (f\chi_A)(x)^{1-\lambda} (f\chi_B)(y)^\lambda.$$

Συνεπώς ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 6.1.1 οπότε παίρνουμε

$$\int f\chi_{(1-\lambda)A+\lambda B} \geq \left(\int f\chi_A \right)^{1-\lambda} \left(\int f\chi_B \right)^\lambda,$$

δηλαδή

$$\int_{(1-\lambda)A+\lambda B} f \geq \left(\int_A f \right)^{1-\lambda} \left(\int_B f \right)^\lambda.$$

Άρα

$$\mu_f((1-\lambda)A + \lambda B) \geq \mu_f(A)^{1-\lambda} \mu_f(B)^\lambda,$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. \square

Η παραπάνω πρόταση ισχύει και αντίστροφα (η απόδειξη παραλείπεται, δείτε [Bor1975]):

ΠΡΟΤΑΣΗ 10.3.4 (Borel). Ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο μ στον \mathbb{R}^n που δεν φέρεται από κανένα υπερεπίπεδο είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue και υπάρχει λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ ώστε $\mu = \mu_f$. \square

Η επιλογή αυτών των δύο κατηγοριών γίνεται για τουλάχιστον δύο λόγους:

- Μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση με πεπερασμένο ολοκλήρωμα έχει πεπερασμένες ροπές οποιασδήποτε τάξης (Πρόταση 10.3.5 παρακάτω).
- Ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο αποτελεί ευθεία γενίκευση της έννοιας του όγκου, αφού η (10.14) βρίσκεται σε πλήρη αντιστοιχία με την πολλαπλασιαστική μορφή της ανισότητας Brunn-Minkowski (Θεώρημα 6.2.1).

Πρόταση 10.3.5. Μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ με πεπερασμένο ολοκλήρωμα έχει πεπερασμένες ροπές οποιασδήποτε τάξης.

Απόδειξη: Η πρόταση προφανώς ισχύει αν $f = 0$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ώστε $f(x_0) > 0$. Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ τόσο το ολοκλήρωμα $\int_{x_0}^{\infty} f(x)x^m dx$ όσο και το $\int_{-\infty}^{x_0} f(x)x^m dx$ είναι πεπερασμένα.

Πράγματι, υπάρχει $x_1 > x_0$ ώστε $f(x_1) \leq e^{-1}f(x_0)$, διότι αλλιώς το ολοκλήρωμα $\int_{x_0}^{\infty} f(x) dx$ δεν είναι πεπερασμένο άρα ούτε και το $\int f$ το οποίο αντιφάσκει με την υπόθεση. Έτσι για κάθε $x > x_1$ ισχύει $x_1 = (1-\lambda)x_0 + \lambda x$ για $\lambda = (x_1 - x_0)/(x - x_0)$. Οπότε, αφού η f είναι λογαριθμικά κοίλη θα ισχύει

$$f(x_1) \geq f(x_0)^{1-\lambda} f(x)^\lambda.$$

Ισοδύναμα

$$f(x) \leq f(x_0) \left(\frac{f(x_1)}{f(x_0)} \right)^{1/\lambda} \leq f(x_0) e^{-1/\lambda} \leq f(x_0) e^{-(x-x_0)/(x_1-x_0)}.$$

Έτσι

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{\infty} f(x)x^m dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x)x^m dx + \int_{x_1}^{\infty} f(x)x^m dx \\ &\leq \int_{x_0}^{x_1} f(x)x_1^m dx + f(x_0) \int_{x_1}^{\infty} e^{-(x-x_0)/(x_1-x_0)} x^m dx \\ &\leq x_1^m \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + f(x_0) \int_{x_1}^{\infty} e^{-(x-x_0)/(x_1-x_0)} x^m dx \\ &\leq x_1^m \int_{\mathbb{R}} f(x) dx + f(x_0) \int_{x_1}^{\infty} e^{-(x-x_0)/(x_1-x_0)} x^m dx. \end{aligned}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η τελευταία παράσταση είναι πεπερασμένη.

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι και το $\int_{-\infty}^{x_0} f(x) dx$ είναι και αυτό πεπερασμένο. □

Παρατήρηση 10.3.6. Η Πρόταση 10.3.4 μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι η τυπική κατάσταση για τα λογαριθμικά κοίλα μέτρα είναι να προκύπτουν από λογαριθμικά κοίλες συναρτήσεις που τις έχουν ως πυκνότητες. Επιπλέον η Πρόταση 10.3.5 προσθέτει την πληροφορία ότι αν το μέτρο είναι πεπερασμένο (δηλαδή η πυκνότητά του έχει πεπερασμένο ολοκλήρωμα) τότε θα έχει και οποιασδήποτε τάξης ροπή πεπερασμένη. Για αυτούς τους λόγους στη συνέχεια θα περιοριστούμε σε πεπερασμένα (και μη μηδενικά) λογαριθμικά κοίλα μέτρα με λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση πυκνότητας.

Οι κανονικοποιήσεις που θέσαμε στον ορισμό της ισοτροπίας για ένα κυρτό συμμετρικό σώμα K ήταν ότι αυτό πρέπει να έχει όγκο ίσο με 1 και κέντρο μάζας στο μηδέν. Δηλαδή

$$1 = \int_K dx = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(x) dx,$$

και

$$0 = \int_K x dx = \int_{\mathbb{R}^n} x \chi_K(x) dx$$

όπου χ_K η χαρακτηριστική συνάρτηση του K . Οι αντίστοιχες κανονικοποιήσεις τώρα θα είναι

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = 1,$$

δηλαδή η f είναι πυκνότητα πιθανότητας και το μέτρο που ορίζει είναι μέτρο πιθανότητας, και

$$\int_{\mathbb{R}^n} x f(x) dx = 0,$$

δηλαδή το μέτρο με πυκνότητα την f έχει κέντρο μάζας στο μηδέν. Θα δούμε παρακάτω ότι για την ισοτροπική θέση των λογαριθμικά κοίλων μέτρων με πυκνότητα f , θα χρειαστούμε άλλη μια κανονικοποίηση (που δεν φαινόταν στην περίπτωση των κυρτών σωμάτων), και αυτή είναι η

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = 1.$$

Για τον ορισμό της ισοτροπίας μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είτε τον Ορισμό 10.0.1 είτε τον εναλλακτικό Ορισμό 10.1.1.

Ορισμός 10.3.7. Ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο μ με πυκνότητα $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται ισοτροπικό όταν

$$\sup_{\mathbb{R}^n} f(x) = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^n} x f(x) dx = 0,$$

και τα ολοκληρώματα

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta \rangle^2 f(x) dx$$

είναι ανεξάρτητα του $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Ισοδύναμα,

Ορισμός 10.3.8. Ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο μ με πυκνότητα $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται ισοτροπικό όταν

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^n} x f(x) dx = 0,$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j f(x) dx = 0 \text{ αν } i \neq j,$$

και τα ολοκληρώματα

$$\int_{\mathbb{R}^n} x_i^2 f(x) dx$$

είναι ανεξάρτητα του $i = 1, \dots, n$.

Αν ισχύουν τα παραπάνω για την f , τότε ο πίνακας συνδιακύμανσης $\text{Cov}(f) = (\int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j f(x) dx)_{ij}$ είναι φανερά πολλαπλάσιος του ταυτοτικού Id . Ορίζουμε τη σταθερά ισοτροπίας L_μ :

Ορισμός 10.3.9. Αν το λογαριθμικά κοίλο μέτρο μ με πυκνότητα f είναι ισοτροπικό τότε ορίζουμε τη σταθερά ισοτροπίας L_μ να είναι ο αριθμός

$$L_\mu = \left(\int_{\mathbb{R}^n} x_i^2 f(x) dx \right)^{1/2}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$(10.15) \quad L_\mu = (\det \text{Cov}(f))^{1/2n}.$$

Επίσης αν η f είναι η πυκνότητα ενός ισοτροπικού μέτρου μ τότε για κάθε $\lambda > 0$ και $a > 0$ η συνάρτηση $g(x) = a\lambda^n f(\lambda x)$ δεν αλλάζει ουσιαστικά τον τρόπο με τον οποία κατανέμεται η μάζα στον \mathbb{R}^n . Και πράγματι εύκολα ελέγχουμε ότι ο πίνακας συνδιακύμανσης της g είναι και πάλι πολλαπλάσιος του ταυτοτικού: για $i \neq j$ και αντικαθιστώντας με y το λx ισχύει

$$(10.16) \quad \int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j g(x) dx = a \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\lambda} y_i \frac{1}{\lambda} y_j f(y) dy = 0$$

και αν $i = j$

$$(10.17) \quad \int_{\mathbb{R}^n} x_i^2 g(x) dx = \frac{a}{\lambda^2} \int_{\mathbb{R}^n} y_i^2 f(y) dy$$

το οποίο είναι ανεξάρτητο το i αφού η f ορίζει ισοτροπικό μέτρο. Αλλά και διαισθητικά, το γράφημα της g δεν είναι παρά το γράφημα της f όπου κάθε ισοϋψής της f μεγεθύνθηκε κατά λ^{-1} και ανυψώθηκε κατά $a\lambda^n$. Είναι λογικό λοιπόν να θέλουμε το μέτρο που ορίζει η g να έχει την ίδια σταθερά ισοτροπίας με το μέτρο που ορίζει η f . Από τις (10.16) και (10.17), τον ορισμό του πίνακα συνδιακύμανσης και το ότι $\int_{\mathbb{R}^n} g = a$, παίρνουμε ότι

$$\det \text{Cov}(g) = \frac{1}{\lambda^{2n}} \det \text{Cov}(f),$$

οπότε

$$\lambda(\det \text{Cov}(g))^{1/2n} = (\det \text{Cov}(f))^{1/2n} = L_\mu.$$

Όμως $\sup_{\mathbb{R}^n} g = a\lambda^n$ άρα

$$\lambda = \left(\frac{\sup_{\mathbb{R}^n} g}{a} \right)^{1/n} = \left(\frac{\sup_{\mathbb{R}^n} g}{\int_{\mathbb{R}^n} g} \right)^{1/n}.$$

Αντικαθιστώντας στην προηγούμενη καταλήγουμε στην

$$\left(\frac{\sup_{\mathbb{R}^n} g}{\int_{\mathbb{R}^n} g} \right)^{1/n} (\det \text{Cov}(g))^{1/2n} = (\det \text{Cov}(f))^{1/2n} = L_\mu.$$

Από αυτή τη σχέση λοιπόν καταλήγουμε στο να επιλέξουμε τον ακόλουθο ορισμό για τη σταθερά ισοτροπίας οποιοδήποτε λογαριθμικά κοίλου μέτρου μ με συνάρτηση πυκνότητας f :

Ορισμός 10.3.10. Για κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο μ με συνάρτηση πυκνότητας f , ορίζουμε τη σταθερά ισοτροπίας να είναι η ποσότητα

$$L_\mu = \left(\frac{\sup_{\mathbb{R}^n} f}{\int_{\mathbb{R}^n} f} \right)^{1/n} (\det \text{Cov}(f))^{1/2n}.$$

Θα ολοκληρώσουμε αυτή την ενότητα δείχνοντας ότι κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο μ με συνάρτηση πυκνότητας f έχει ισοτροπική θέση:

Θεώρημα 10.3.11. Για κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο $\mu \neq 0$ με συνάρτηση πυκνότητας f και κέντρο μάζας στο 0 , υπάρχει $n \times n$ πίνακας T με $\det T \neq 0$ και σταθερά $a > 0$ ώστε το μέτρο $\mu \circ T$ να είναι ισοτροπικό.

Απόδειξη: Αφού το κέντρο μάζας είναι στο 0 ισχύει $\int_{\mathbb{R}^n} x f(x) dx = 0$. Επίσης μπορούμε να υποθέσουμε ότι το μ είναι μέτρο πιθανότητας, δηλαδή $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = 1$ επιλέγοντας $a = \mu(\mathbb{R}^n)^{-1}$. Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ με

$$R(y) := \int \langle x, y \rangle x d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \langle x, y \rangle x f(x) dx,$$

και παρατηρούμε ότι είναι θετικά ορισμένη και συμμετρική. Συνεπώς υπάρχει πίνακας S που είναι η τετραγωνική ρίζα του R , δηλαδή $S^2 = R$. Θεωρούμε το μέτρο $\nu = \mu \circ T$ όπου

$$T = \frac{S}{(\sup f)^{1/n} (\det S)^{1/n}}.$$

Ελέγχουμε εύκολα υπολογίζοντας το $\nu(A)$ για κάθε μετρήσιμο σύνολο A ότι το ν έχει πυκνότητα τη συνάρτηση $g = (f \circ T) / \sup_{\mathbb{R}^n} f$ οπότε φανερά $\sup_{\mathbb{R}^n} g = 1$. Το ν είναι βεβαίως μέτρο πιθανότητας, αφού

$$\nu(\mathbb{R}^n) = \mu(T(\mathbb{R}^n)) = \mu(\mathbb{R}^n) = 1,$$

και έχει κέντρο μάζας στο 0 διότι λόγω της γραμμικότητας του T και με την αντικατάσταση $y = Tx$ ισχύει

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} xg(x) dx &= \frac{1}{\sup_{\mathbb{R}^n} f} \int_{\mathbb{R}^n} xf(Tx) dx = \frac{1}{\sup_{\mathbb{R}^n} f} T^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} yf(y) dy \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Τέλος ελέγχουμε το ότι το ολοκλήρωμα $\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta \rangle^2 g(x) dx$ είναι ανεξάρτητο του $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ όπως και στην απόδειξη της Πρότασης 10.2.1:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta \rangle^2 g(x) dx &= \frac{1}{\sup_{\mathbb{R}^n} f} \int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta \rangle^2 f(Tx) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \langle T^{-1}y, \theta \rangle^2 f(y) dy \\ &= (\sup_{\mathbb{R}^n} f)^{2/n} (\det R)^{2/n} \int_{\mathbb{R}^n} \langle y, R^{-1}\theta \rangle^2 f(y) dy \\ &= (\sup_{\mathbb{R}^n} f)^{2/n} (\det R)^{2/n} \left\langle \int_{\mathbb{R}^n} \langle y, R^{-1}\theta \rangle y f(y), R^{-1}\theta \right\rangle dy \\ &= (\sup_{\mathbb{R}^n} f)^{2/n} (\det R)^{2/n} \langle SR^{-1}\theta, R^{-1}\theta \rangle \\ &= (\sup_{\mathbb{R}^n} f)^{2/n} (\det R)^{2/n} \end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 10.3.1 Αποδείξτε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_{x_1}^{\infty} e^{-(x-x_0)/(x_1-x_0)} x^m dx$$

στην απόδειξη της Πρότασης 10.3.5 είναι πεπερασμένο, ανάγοντας τον υπολογισμό του στον υπολογισμό ενός ολοκληρώματος της μορφής $\int_{x_1}^{\infty} e^{-x} x^m dx$.

11.1 ΥΠΑΡΞΗ ΤΟΥ ΕΛΛΙΠΣΟΕΙΔΟΥΣ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΟΓΚΟΥ

Πρόταση 11.1.1. Για κάθε κυρτό σώμα K στον \mathbb{R}^n υπάρχει ελλειψοειδής μεγίστου όγκου μέσα στο K .

Απόδειξη: Κατ' αρχάς, αφού το K είναι κυρτό σώμα έχει μη κενό εσωτερικό, άρα περιέχει ελλειψοειδή. Συνεπώς ο αριθμός

$$\alpha = \sup\{\text{vol}(\mathcal{E}) : \exists x \in K \text{ με } x + \mathcal{E} \subseteq K\}$$

είναι θετικός, όπου τα \mathcal{E} στον παραπάνω ορισμό του α είναι ελλειψοειδή με κέντρο το μηδέν. Επιπλέον, αφού το K είναι φραγμένο σύνολο το α είναι πεπερασμένο. Δηλαδή $0 < \alpha < \infty$. Θεωρούμε ακολουθία $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ με $x_m \in K$ και ελλειψοειδή \mathcal{E}_m με μήκη ημιαξόνων $(a_{km})_{k=1}^n$, ώστε $x_m + \mathcal{E} \subseteq K$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $\text{vol}(\mathcal{E}_m) \rightarrow \alpha$. Από τη συμπαγεια του K περνώντας σε υπακολουθία μπορούμε να υποθέσουμε ότι η x_m συγκλίνει, έστω στο $x_0 \in K$. Μεταφέροντας το K κατά $-x_0$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι η x_m συγκλίνει στο μηδέν. Επίσης τα ελλειψοειδή \mathcal{E}_m έχουν συγκλίνουσα υπακολουθία από το θεώρημα επιλογής του Blaschke (Θεώρημα 5.3.1). Ας υποθέσουμε ότι $\mathcal{E}_m \rightarrow E$. Από τη συνέχεια του όγκου ως προς τη μετρική Hausdorff ισχύει $\text{vol}(E) = \alpha$. Μένει να δείξουμε ότι το E είναι ελλειψοειδές. Παρατηρούμε ότι οι ακολουθίες $(a_{km})_{m=1}^\infty$ είναι άνω φραγμένες για κάθε $k = 1, \dots, n$ (αφού το $x_m + \mathcal{E}_m$ περιέχεται στο K και η x_m είναι φραγμένη ως συγκλίνουσα). Οπότε υπάρχει θετικός M ώστε $a_{km} \leq M$ για κάθε $k = 1, \dots, n$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Επιπλέον είναι και κάτω φραγμένες από κάποιον θετικό αριθμό $c > 0$ αφού αλλιώς τα \mathcal{E}_m θα είχαν υπακολουθία με όγκο που να συγκλίνει στο μηδέν, το οποίο είναι άτοπο. Άρα υπάρχει $c > 0$ ώστε $c \leq a_{km} \leq M$ για κάθε $k = 1, \dots, n$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

Ας υποθέσουμε ότι

$$\mathcal{E}_m = \left[x \in \mathbb{R}^n : \sum_{k=1}^n \frac{\langle x, v_{km} \rangle^2}{a_{km}^2} \leq 1 \right],$$

όπου τα $(v_{km})_{k=1}^n$ είναι ορθοκανονική βάση του \mathbb{R}^n . Η ακολουθία των διανυσμάτων $(v_{1m}, \dots, v_{nm}, a_{1m}, \dots, a_{nm})$ για $m \in \mathbb{N}$ ανήκει στο συμπα-

γές σύνολο $(\mathbb{S}^{n-1})^n \times [c, M]^n$. Άρα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Επιλέγοντας την αντίστοιχη υπακολουθία των \mathcal{E}_m μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η ίδια η ακολουθία $(v_{1m}, \dots, v_{nm}, a_{1m}, \dots, a_{nm})$ συγκλίνει για $m \rightarrow \infty$ έστω στο $(v_1, \dots, v_n, a_1, \dots, a_n)$. Επειδή $\lim_{m \rightarrow \infty} v_{km} = v_k$ για κάθε $k = 1, \dots, n$ εύκολα ελέγχουμε ότι τα v_1, \dots, v_n ικανοποιούν τις $\langle v_k, v_\ell \rangle = 1$ αν $k = \ell$ και $\langle v_k, v_\ell \rangle = 0$ αλλιώς, οπότε συνιστούν ορθοκανονική βάση του \mathbb{R}^n . Θεωρούμε τώρα το ελλειψοειδές

$$\mathcal{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{k=1}^n \frac{\langle x, v_k \rangle^2}{a_k^2} \leq 1 \right\}.$$

Θα δείξουμε ότι $E = \mathcal{E}$ και έτσι το E θα είναι ελλειψοειδές.

Αν $x \in \text{int}(E)$ τότε $\|x\|_E < 1$. Αλλά $\|x\|_{\mathcal{E}_m} \rightarrow \|x\|_E$, συνεπώς υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $m \geq m_0$ τότε $\|x\|_{\mathcal{E}_m} < 1$. Άρα $\sum_{k=1}^n \langle x, v_{km} \rangle^2 / a_{km}^2 < 1$ για κάθε $m \geq m_0$. Αφήνοντας το m να πάει στο άπειρο οδηγούμαστε στην $\sum_{k=1}^n \langle x, v_k \rangle^2 / a_k^2 \leq 1$, δηλαδή $x \in \mathcal{E}$. Δείξαμε ότι $\text{int}(E) \subseteq \mathcal{E}$. Άρα $E \subseteq \mathcal{E}$.

Αντίστροφα, αν $x \in \text{int}(\mathcal{E})$ τότε $\sum_{k=1}^n \langle x, v_k \rangle^2 / a_k^2 < 1$. Συνεπώς, αφού $\lim_{m \rightarrow \infty} v_{km} = v_k$ και $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{km} = a_k$ για κάθε $k = 1, \dots, n$, υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $m \geq m_0$ να ισχύει $\sum_{k=1}^n \langle x, v_{km} \rangle^2 / a_{km}^2 < 1$ για κάθε $m \geq m_0$. Άρα $x \in \mathcal{E}_m$ και περνώντας στο όριο ως προς m συμπεραίνουμε ότι $x \in E$. Δείξαμε $\text{int}(\mathcal{E}) \subseteq E$, άρα $\mathcal{E} \subseteq E$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη. \square

11.2 ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΟΥΣ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΟΓΚΟΥ

Πρόταση 11.2.1. Για κάθε κυρτό σώμα K στον \mathbb{R}^n το ελλειψοειδές μεγίστου όγκου μέσα στο K είναι μοναδικό.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι τα $x_1 + \mathcal{E}_1$ και $x_2 + \mathcal{E}_2$ είναι δύο διαφορετικά ελλειψοειδή μεγίστου όγκου μέσα στο κυρτό σώμα K , και έστω ότι $\text{vol}(\mathcal{E}_1) = \text{vol}(\mathcal{E}_2) = \alpha$. Θεωρούμε τους πίνακες $T_1, T_2 \in GL(n)$ ώστε να ισχύει $\mathcal{E}_1 = T_1(B_2^n)$ και $\mathcal{E}_2 = T_2(B_2^n)$. Θέτουμε $L = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}(T_1 + T_2)(B_2^n)$. Φανερά το L είναι ελλειψοειδές και $L \subseteq K$ διότι το K είναι κυρτό και

$$L = \frac{1}{2}(x_1 + T_1(B_2^n)) + \frac{1}{2}(x_2 + T_2(B_2^n)).$$

Άρα θα ισχύει $\text{vol}(L) \leq \alpha$. Αλλά από την ανισότητα Brunn-Minkowski

βλέπουμε εύκολα ότι

$$\alpha \geq \text{vol}(L) \geq \left(\frac{1}{2} \text{vol}(x_1 + T_1(B_2^n))^{1/n} + \frac{1}{2} \text{vol}(x_1 + T_1(B_2^n))^{1/n} \right)^n \geq \alpha.$$

Συνεπώς, επειδή ο όγκος είναι αναλλοίωτος στις μεταθέσεις,

$$\text{vol}(T_1(B_2^n) + T_2(B_2^n))^{1/n} = \text{vol}(T_1(B_2^n))^{1/n} + \text{vol}(T_2(B_2^n))^{1/n}.$$

Δηλαδή ισχύει η ισότητα στην ανισότητα Brunn-Minkowski. Έτσι από το Θεώρημα 6.2.2 το $T_1(B_2^n)$ είναι πολλαπλάσιο του $T_2(B_2^n)$. Αλλά επειδή και τα δύο έχουν ίδιο όγκο α συμπεραίνουμε ότι είναι ίσα. Άρα $T_1(B_2^n) = T_2(B_2^n)$, οπότε $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$, και συνεπώς $T_2^{-1}T_1(B_2^n) = B_2^n$. Μένει να δειχθεί ότι $x_1 = x_2$.

Γνωρίζουμε ότι $x_2 + T_2(B_2^n) \subseteq K$ άρα $T_2^{-1}x_2 + B_2^n \subseteq T_2^{-1}(K)$. Επίσης $x_1 + T_1(B_2^n) \subseteq K$ οπότε $T_2^{-1}x_1 + T_2^{-1}T_1(B_2^n) \subseteq T_2^{-1}(K)$. Επειδή όμως είδαμε ότι $T_2^{-1}T_1(B_2^n) = B_2^n$ συμπεραίνουμε ότι $T_2^{-1}x_1 + B_2^n \subseteq T_2^{-1}(K)$. Αν θέσουμε λοιπόν $y_1 = T_2^{-1}x_1$ και $y_2 = T_2^{-1}x_2$ τότε και το $y_1 + B_2^n$ και το $y_2 + B_2^n$ είναι υποσύνολα του $T_2^{-1}(K)$. Το τελευταίο όμως δεν μπορεί να περιέχει ελλειψοειδές $x_0 + \mathcal{E}'$ με $\text{vol}(\mathcal{E}') > \text{vol}(B_2^n)$, διότι αν αυτό μπορούσε να συμβεί τότε το $T_2x_0 + T_2(\mathcal{E}')$ θα περιεχόταν στο K και θα είχε όγκο γνησίως μεγαλύτερο από τον όγκο του \mathcal{E}_2 , το οποίο είναι άτοπο.

Συνεπώς τα $y_1 + B_2^n$ και $y_2 + B_2^n$ είναι ελλειψοειδή μεγίστου όγκου στο $T_2^{-1}(K)$. Μένει να δείξουμε ότι $y_1 = y_2$. Ας υποθέσουμε ότι αυτό δεν είναι σωστό. Μετατοπίζουμε το $T_2^{-1}(K)$ ώστε το μηδέν να βρίσκεται στο κέντρο του ευθύγραμμου τμήματος $[y_1, y_2]$. Επιπλέον στρέφουμε το $T_2^{-1}(K)$ ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $[y_1, y_2]$ να είναι στη διεύθυνση του πρώτου άξονα του \mathbb{R}^n . Έτσι το ευθύγραμμο τμήμα $[y_1, y_2]$ γράφεται στη μορφή $[-y, y]$ για κατάλληλο y και υπάρχει $\mu > 0$ ώστε $y = \mu e_1$. Θεωρούμε το ελλειψοειδές

$$\mathcal{E}_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{\langle x, e_1 \rangle^2}{\left(1 + \frac{\mu}{2}\right)^2} + \sum_{k=2}^n \langle x, e_k \rangle^2 \leq 1 \right\}.$$

Φανερά $\text{vol}(\mathcal{E}_0) = (1 + \mu/2)\text{vol}(B_2^n) > \text{vol}(B_2^n)$ οπότε θα έχουμε καταλήξει σε άτοπο αν δείξουμε ότι $\mathcal{E}_0 \subseteq T_2^{-1}(K)$. Αφού $y_1 + B_2^n, y_2 + B_2^n \subseteq$

$T_2^{-1}(K)$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\text{bd}(\mathcal{E}_0) \subseteq \text{conv}((y_1 + B_2^n) \cup (y_2 + B_2^n)).$$

Έστω ότι $x_0 \in \text{bd}(\mathcal{E}_0)$. Αν $\langle x_0, e_1 \rangle e_1 \in [-y, y]$ τότε υπάρχει $t \in [0, 1]$ ώστε $\langle x_0, e_1 \rangle e_1 = (1-t)(-y) + ty$ οπότε

$$\begin{aligned} x_0 &= \langle x_0, e_1 \rangle e_1 + \sum_{k=2}^n \langle x_0, e_k \rangle e_k \\ &= (1-t) \left(-y + \sum_{k=2}^n \langle x_0, e_k \rangle e_k \right) + t \left(y + \sum_{k=2}^n \langle x_0, e_k \rangle e_k \right), \end{aligned}$$

το οποίο είναι φανερά στοιχείο του $\text{conv}((y_1 + B_2^n) \cup (y_2 + B_2^n))$, αφού

$$\left\| \sum_{k=2}^n \langle x_0, e_k \rangle e_k \right\|_2^2 = \sum_{k=2}^n |\langle x_0, e_k \rangle|^2 \leq \|x_0\|_2^2 = 1.$$

Μένει να εξετάσουμε την περίπτωση $\langle x_0, e_1 \rangle e_1 \notin [-y, y]$. Ας υποθέσουμε ότι $\langle x_0, e_1 \rangle > \mu > 0$. Θα δείξουμε ότι τότε $x_0 \in y + B_2^n$. (Ομοίως εργαζόμαστε και στην περίπτωση όπου $\langle x_0, e_1 \rangle < -\mu < 0$ για να δείξουμε ότι τότε $x_0 \in -y + B_2^n$.)

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $\|x_0 - y\|_2 \leq 1$. Επειδή $x_0 \in \text{bd}\mathcal{E}$ ισχύει

$$\sum_{k=2}^n \langle x_0, e_k \rangle^2 = 1 - \frac{\langle x_0, e_1 \rangle^2}{(1 + \mu/2)^2},$$

και έχουμε

$$\|x_0 - y\|_2^2 = (\langle x_0, e_1 \rangle - \mu)^2 + 1 - \frac{\langle x_0, e_1 \rangle^2}{(1 + \mu/2)^2}.$$

Εφόσον θέλουμε η τελευταία ποσότητα να είναι μικρότερη ή ίση του 1 αρκεί να ισχύει

$$(\langle x_0, e_1 \rangle - \mu)^2 - \frac{\langle x_0, e_1 \rangle^2}{(1 + \mu/2)^2} \leq 0.$$

Αυτό θα ισχύει αν το $\langle x_0, e_1 \rangle$ βρίσκεται ανάμεσα στις ρίζες του πολυωνύμου $(t - \mu)^2 - t^2 / (1 + \mu/2)^2$. Εύκολα ελέγχουμε ότι οι ρίζες αυτού του πολυωνύμου είναι εκατέρωθεν του διαστήματος $[\mu, 1 + \mu/2]$ στο

οποίο βρίσκεται το $\langle x_0, e_1 \rangle$, ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη. \square

11.3 Η ΘΕΣΗ ΤΟΥ JOHN

Ορισμός 11.3.1. Λέμε ότι ένα κυρτό σώμα βρίσκεται στη θέση του John αν το ελλειψοειδές μεγίστου όγκου στο K είναι η μοναδιαία Ευκλείδεια μπάλα B_2^n .

Παρατηρούμε κάθε σώμα K μπορεί να τεθεί στη θέση του John αν του εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό που απεικονίζει το ελλειψοειδές μεγίστου όγκου του K στο B_2^n . Επίσης η θέση αυτή είναι μοναδική εκτός από ορθογώνιους μετασχηματισμούς (δηλαδή στροφές, ανακλάσεις και συνδυασμούς τους). Πράγματι αυτό προκύπτει εύκολα από το ότι το ελλειψοειδές μεγίστου όγκου μέσα στο K είναι μοναδικό.

Θεώρημα 11.3.2 (John). Έστω ότι το K είναι ένα κεντρικά συμμετρικό κυρτό σώμα στη θέση του John. Τότε ισχύει

$$B_2^n \subseteq K \subseteq \sqrt{n}B_2^n.$$

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι $K \not\subseteq \sqrt{n}B_2^n$. Τότε υπάρχει $x_0 \in K \setminus (\sqrt{n}B_2^n)$, δηλαδή $x_0 \in K$ και $\|x_0\|_2 > \sqrt{n}$. Επειδή το K είναι συμμετρικό ως προς το 0 συμπεραίνουμε ότι $\pm x_0 \in K$ και συνεπώς

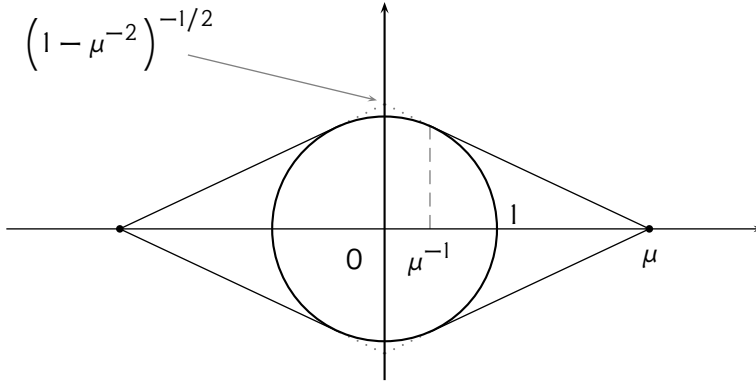
$$\text{conv}(\pm x_0, B_2^n) \subseteq K.$$

Θα δείξουμε ότι το $Z = \text{conv}(\pm x_0, B_2^n)$ περιέχει ελλειψοειδές με όγκο μεγαλύτερο από το $\text{vol}_n(B_2^n)$ αντιφάσκοντας με το ότι το B_2^n είναι το ελλειψοειδές μεγίστου όγκου του K .

Με κατάλληλη στροφή, υποθέτουμε ότι $x_0 = \mu e_1$ όπου $\mu > \sqrt{n}$. Θεωρούμε το ελλειψοειδές

$$\mathcal{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{x_1^2}{a^2} + \sum_{k=2}^n \frac{x_k^2}{b^2} \leq 1 \right\},$$

όπου τα $a > 1$ και $0 < b < 1$ θα επιλεγούν κατάλληλα ώστε $\text{vol}_n(\mathcal{E}) > \text{vol}_n(B_2^n)$ και $\mathcal{E} \subseteq K$. Το κυρτό σώμα Z είναι στερεό που προκύπτει από περιστροφή του Σχήματος 11.1 ως προς τον άξονα του x_0 . Η ευθεία που περνάει από το x_0 και εφάπτεται στον κύκλο B_2^2 του σχήματος στο



ΣΧΗΜΑ 11.1: Το κυρτό σώμα $Z = \text{conv}(\pm x_0, B_2^n) \subseteq K$ προκύπτει από περιστροφή του παραπάνω σχήματος στον \mathbb{R}^n ως προς τον πρώτο άξονα.

άνω ημιεπίπεδο, έχει εξίσωση

$$(11.1) \quad y = \frac{1}{\sqrt{1-\mu^{-2}}} - t \frac{1}{\mu\sqrt{1-\mu^{-2}}}.$$

Θεωρούμε ένα σημείο $x = (x_1, \dots, x_n) \in \text{bd}(\mathcal{E})$. Θα βρούμε συνθήκες για τα $a > 0$ και $0 < b < 1$ ώστε να ισχύει $x \in Z$.

1η Περίπτωση: Αν $x_1 > 1/\mu$ τότε για να ανήκει το x στο Z αρκεί το σημείο του (δισδιάστατου) επιπέδου $(x_1, (\sum_{k=2}^n x_k^2)^{1/2})$ να είναι «κάτω» από την ευθεία με εξίσωση την (11.1), δηλαδή να ικανοποιεί την

$$\left(\sum_{k=2}^n x_k^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\sqrt{1-\mu^{-2}}} - x_1 \frac{1}{\mu\sqrt{1-\mu^{-2}}}.$$

Ισοδύναμα, επειδή $x \in \text{bd}(\mathcal{E})$ και συνεπώς $(\sum_{k=2}^n x_k^2)^{1/2} = b\sqrt{1-x_1^2/a^2}$,

$$b\sqrt{1-\frac{x_1^2}{a^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-\mu^{-2}}} \left(1 - \frac{x_1}{\mu} \right).$$

Από αυτή καταλήγουμε ισοδύναμα με απλές πράξεις ότι το σημείο x

βρίσκεται κάτω από την ευθεία (11.1) αν και μόνο αν ισχύει

$$(11.2) \quad \frac{a^2}{\mu^2} + b^2 \left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right) \leq 1.$$

2η Περίπτωση: Αν $0 \leq x_1 \leq 1/\mu$ θέλουμε να ισχύει $x \in B_2^n$. Εύκολα ελέγχουμε ότι η απαίτηση $\|x\|_2 \leq 1$ οδηγεί στην ανισότητα

$$(11.3) \quad \frac{1}{\mu^2} \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) + b^2 \leq 1.$$

Αν θέσουμε

$$(11.4) \quad a = \frac{\mu}{\sqrt{n}} > 1 \text{ και } 0 < b = \frac{\sqrt{1 - 1/n}}{\sqrt{1 - 1/\mu^2}} < 1$$

ελέγχουμε με απλές πράξεις ότι ικανοποιείται και η (11.2) και η (11.3). Συνεπώς με αυτές τις τιμές για τα a και b ισχύει $\mathcal{E} \subseteq Z \subseteq K$. Επιπλέον όμως ισχύει $ab^{n-1} > 1$ που σημαίνει ότι το \mathcal{E} έχει όγκο μεγαλύτερο από τον όγκο του B_2^n που είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου μέσα στο K , καταλήγοντας έτσι σε άτοπο. \square

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 11.3.1 Ελέγξτε ότι οι επιλογές γις τις παραμέτρους a και b στην (11.4) ικανοποιούν πράγματι τις (11.2) και (11.3).

Για απλοποίηση του συμβολισμού στα επόμενα όλες οι συναρτήσεις που εμφανίζονται θα θεωρούνται μη αρνητικές.

12.1 ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ BRASCAMP-LIEB ΚΑΙ BARTHE

Η ανισότητα Hölder μπορεί να γενικευτεί ως προς το πλήθος των συναρτήσεων που συμμετέχουν σε αυτή: εύκολα ελέγχει κανείς με επαγωγή ότι αν $g_k \in L_{p_k}(\mathbb{R}^n)$ για $k = 1, \dots, m$, με $\sum_{k=1}^m 1/p_k = 1$ τότε $\prod_{k=1}^m g_k \in L_1(\mathbb{R}^n)$ και ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{k=1}^m g_k(x) \right) dx \leq \prod_{k=1}^m \|g_k\|_{p_k}.$$

Αν θέσουμε $c_k = 1/p_k$ και $f_k = g_k^{p_k} = g_k^{1/c_k}$, τότε οι f_k είναι απλώς ολοκληρώσιμες (στον $L_1(\mathbb{R}^n)$) και η ανισότητα γράφεται ως εξής:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{k=1}^m f_k(x)^{c_k} \right) dx \leq \prod_{k=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) dx \right)^{c_k}$$

(Άσκηση 12.1.1). Αυτή η ανισότητα μπορεί να επεκταθεί περαιτέρω με τις εξής αλλαγές:

- οι συναρτήσεις μπορούν να ανήκουν στον $L_1(\mathbb{R}^{n_k})$, δηλαδή οι f_k να είναι συναρτήσεις n_k μεταβλητών, αλλά για να έχει νόημα το αριστερό ολοκλήρωμα στον \mathbb{R}^n ,
- να χρησιμοποιηθούν $n_k \times n$ πίνακες $B_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_k}$ στα ορίσματα των f_k .

Αυτές οι αλλαγές οδηγούν σε μια νέα ανισότητα όπου τώρα εμφανίζεται μια σταθερά στο δεξιό μέλος που εξαρτάται από τους πίνακες B_k . Η ανισότητα αυτή είναι η ανισότητα Brascamp-Lieb όπως εμφανίζεται στο παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 12.1.1 (Brascamp-Lieb, Εκδοχή A). Έστω ότι $m \in \mathbb{N}$, $c_k > 0$, $n_k \in \mathbb{N}$ για $k = 1, 2, \dots, m$ με $\sum_{k=1}^m c_k n_k = n$ και $f_k \in L_1(\mathbb{R}^{n_k})$

με $f_k \geq 0$. Αν $B_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_k}$ γραμμική απεικόνιση (δηλαδή $n_k \times n$ πίνακας) η οποία είναι επί για κάθε $k = 1, 2, \dots, m$ τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{k=1}^m f_k(B_k x)^{c_k} \right) dx \leq D^{-1/2} \prod_{k=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^{n_k}} f_k(x) dx \right)^{c_k},$$

με

$$D = \inf \left\{ \frac{\det \left(\sum_{k=1}^m c_k B_k^t A_k B_k \right)}{\prod_{k=1}^m (\det A_k)^{c_k}} : A_k \text{ θετικά ορισμένοι } n_k \times n_k \text{ πίνακες} \right\},$$

όπου B_k^t ο ανάστροφος του B_k (και $D^{-1/2} := \infty$ αν $D = 0$).

Παρατήρηση 12.1.2. Εύκολα βλέπει κανείς ότι στην περίπτωση της ανισότητας Hölder, ο παραπάνω τύπος για τη σταθερά D δίνει 1. Πράγματι, σε αυτή την περίπτωση $n_k = n$ και $B_k = \text{Id}$ για κάθε $k = 1, \dots, m$. Οπότε

$$D = \inf \left\{ \frac{\det \left(\sum_{k=1}^m c_k A_k \right)}{\prod_{k=1}^m (\det A_k)^{c_k}} : A_k \text{ θετικά ορισμένοι } n \times n \text{ πίνακες} \right\} \\ \geq 1,$$

από την Άσκηση 6.2.3. Αλλά ισχύει η ισότητα αν επιλέξουμε $A_k = \text{Id}$, διότι $\sum_{k=1}^m c_k = 1$. Οπότε το D , ως infimum, ισούται με 1. Συμπεραίνουμε ότι η ανισότητα Brascamp-Lieb πράγματι γενικεύει την ανισότητα Hölder.

Θα δούμε τώρα πώς η ανισότητα Prekora-Leindler ως ένα είδος αντίστροφης της ανισότητας Hölder (δείτε Παρατήρηση 6.1.2), με τις ανάλογες όπως πριν γενικεύσεις, θα οδηγήσει σε μια επέκτασή της, γνωστή ως ανισότητα Barthe, αντίστροφη της Brascamp-Lieb.

Η ανισότητα Prekora-Leindler λέει ότι αν οι $f, g, h \geq 0$ είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στον \mathbb{R}^n και $0 < \lambda < 1$, αν

$$h((1-\lambda)x + \lambda y) \geq f(x)^{1-\lambda} g(y)^\lambda$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x) dx \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y) dy \right)^\lambda$$

(δείτε Θεώρημα 6.1.1 σελίδα 87). Η ανισότητα αυτή μπορεί να γενικευθεί σε περισσότερες συναρτήσεις με επαγωγή (δείτε Άσκηση 12.1.2) στην εξής εκδοχή:

ΘΕΩΡΗΜΑ 12.1.3 (Prekopa-Leindler, Εκδοχή B). Έστω ότι οι h, f_1, \dots, f_m είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις από το \mathbb{R}^n στο $[0, \infty)$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_m > 0$ με $\sum_{k=1}^m \lambda_k = 1$. Αν για κάθε $z_1, \dots, z_m \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$(12.1) \quad h\left(\sum_{k=1}^m \lambda_k z_k\right) \geq \prod_{k=1}^m (f_k(z_k))^{\lambda_k}$$

τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x) dx \geq \prod_{k=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) dx\right)^{\lambda_k}.$$

Η περαιτέρω επέκτασή της για συναρτήσεις $f_k : \mathbb{R}^{n_k} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_k \geq 0$ απαιτεί τη χρήση $n \times n_k$ πινάκων B_k^t , όπου $B_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_k}$, στη σχέση (12.1) (παρατηρούμε ότι αν ένας πίνακας $n_k \times n$ είναι μια γραμμική απεικόνιση από τον \mathbb{R}^n στον \mathbb{R}^{n_k} , ο ανάστροφός του είναι ένας πίνακας $n \times n_k$, άρα μια γραμμική απεικόνιση από τον \mathbb{R}^{n_k} στον \mathbb{R}^n). Αυτή η επέκταση θα μας αναγκάσει να έχουμε μια επιπλέον σταθερά στο δεξιό μέλος της ανισότητας που εξαρτάται από τους πίνακες B_k όπως και πριν (στην περίπτωση της ανισότητας Brascamp-Lieb). Η ανισότητα που προκύπτει ονομάζεται ανισότητα Barthe και την αντιλαμβάνομαστε ως αντίστροφη της ανισότητας Brascamp-Lieb. Για λόγους άμεσης σύγκρισης των δύο ανισοτήτων επαναδιατυπώνουμε την ανισότητα Brascamp-Lieb μαζί με την ανισότητα Barthe.

Θεώρημα 12.1.4. Έστω ότι $m \in \mathbb{N}$, $c_k > 0$, $n_k \in \mathbb{N}$ για $k = 1, 2, \dots, m$ με $\sum_{k=1}^m c_k n_k = n$ και $f_k \in L_1(\mathbb{R}^{n_k})$ με $f_k \geq 0$. Αν $B_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_k}$ γραμμική απεικόνιση (δηλαδή $n_k \times n$ πίνακας) η οποία είναι επί για κάθε $k = 1, 2, \dots, m$ τότε

(Brascamp-Lieb)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{k=1}^m f_k(B_k x)^{c_k}\right) dx \leq D^{-1/2} \prod_{k=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^{n_k}} f_k(x) dx\right)^{c_k}.$$

(Barthe: αντίστροφη Brascamp-Lieb) Αν επιπλέον, $h \in L_1(\mathbb{R}^n)$ με $h \geq 0$

και

$$(12.2) \quad h \left(\sum_{k=1}^m c_k B_k^t z_k \right) \geq \prod_{k=1}^m f_k(z_k)^{c_k},$$

για κάθε $z_k \in \mathbb{R}^{n_k}$, για $k = 1, 2, \dots, m$, τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x) dx \geq D^{1/2} \prod_{k=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^{n_k}} f_k(x) dx \right)^{c_k}.$$

όπου B_k^t ο ανάστροφος του B_k , $n \times n_k$ πίνακας, και

$$D = \inf \left\{ \frac{\det \left(\sum_{k=1}^m c_k B_k^t A_k B_k \right)}{\prod_{k=1}^m (\det A_k)^{c_k}} : A_k \text{ θετικά ορισμένοι } n_k \times n_k \text{ πίνακες} \right\}$$

($D^{-1/2} := \infty$ αν $D = 0$).

Παρατήρηση 12.1.5. Όπως και στην Παρατήρηση 12.1.2, η σταθερά D είναι ίση με 1 αν $n_k = n$ και $B_k = \text{Id}$. Δηλαδή η ανισότητα Barthe πράγματι γενικεύει την ανισότητα Prekopa-Leindler.

Αν αντικαταστήσουμε τις $f_k^{c_k}$ με g_k και τα c_k με $1/p_k$ τότε μπορούμε να γράψουμε λίγο πιο συνοπτικά τις ανισότητες:

Θεώρημα 12.1.6. Έστω ότι $m \in \mathbb{N}$, $p_k > 0$, $n_k \in \mathbb{N}$ για $k = 1, 2, \dots, m$ με $\sum_{k=1}^m n_k/p_k = n$ και $g_k \in L_{p_k}(\mathbb{R}^{n_k})$ με $g_k \geq 0$. Αν $B_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_k}$ γραμμική απεικόνιση (δηλαδή $n_k \times n$ πίνακας) η οποία είναι επί για κάθε $k = 1, 2, \dots, m$ τότε (Brascamp-Lieb)

$$\left\| \prod_{k=1}^m g_k(B_k x) \right\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \leq D^{-1/2} \prod_{k=1}^m \|g_k\|_{L_{p_k}(\mathbb{R}^{n_k})},$$

(Barthe: αντίστροφη Brascamp-Lieb) Αν επιπλέον, $h \in L_1(\mathbb{R}^n)$ με $h \geq 0$ και

$$h \left(\sum_{k=1}^m c_k B_k^t z_k \right) \geq \prod_{k=1}^m g_k(z_k),$$

για κάθε $z_k \in \mathbb{R}^{n_k}$, για $k = 1, 2, \dots, m$, τότε

$$\|h\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \geq D^{1/2} \prod_{k=1}^m \|g_k\|_{L_{p_k}(\mathbb{R}^{n_k})},$$

όπου B_k^t ο ανάστροφος του B_k , $n \times n_k$ πίνακας, και

$$D = \inf \left\{ \frac{\det \left(\sum_{k=1}^m c_k B_k^t A_k B_k \right)}{\prod_{k=1}^m (\det A_k)^{c_k}} : A_k \text{ θετικά ορισμένοι } n_k \times n_k \text{ πίνακες} \right\},$$

με $c_k = 1/p_k$ για κάθε $k = 1, 2, \dots, m$ ($D^{-1/2} := \infty$ αν $D = 0$).

Για την απόδειξη της ανισότητας Barthe διευκολύνει να χρησιμοποιήσουμε την μικρότερη συνάρτηση h που ικανοποιεί την (12.2). Άμεσα βλέπουμε ότι η μικρότερη τέτοια συνάρτηση δεν είναι άλλη από την

$$(12.3) \quad h_0(x) = \sup \left\{ \prod_{k=1}^m f_k(z_k)^{c_k} : x = \sum_{k=1}^m c_k B_k^t z_k, z_k \in \mathbb{R}^{n_k} \right\}.$$

Όμως μια τέτοια συνάρτηση δεν είναι απαραίτητα μετρήσιμη. Για αυτό τον λόγο η ανισότητα Barthe αποδεικνύεται στη μορφή

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \sup \left\{ \prod_{k=1}^m f_k(z_k)^{c_k} : x = \sum_{k=1}^m c_k B_k^t z_k, z_k \in \mathbb{R}^{n_k} \right\} dx \\ \geq D^{1/2} \prod_{k=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^{n_k}} f_k(x) dx \right)^{c_k}, \end{aligned}$$

υπό τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 12.1.4, όπου το \bar{f} είναι το άνω ολοκλήρωμα.

Δεν θα αποδείξουμε αυτές τις ανισότητες σε αυτή τη γενικότητα. Όμως θα αποδείξουμε μια ειδική περίπτωση που χρειαζόμαστε για την απόδειξη της αντίστροφης ισοπεριμετρικής ανισότητας. Συγκεκριμένα ενδιαφερόμαστε για την περίπτωση όπου $n_k = 1$ για κάθε $k = 1, 2, \dots, m$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 12.1.1 Αποδείξτε με επαγωγή στο πλήθος των συναρτήσεων g_k την ανισότητα Hölder· δηλαδή ότι για οποιεσδήποτε μη αρνητικές συναρτήσεις

$g_k \in L_{p_k}(\mathbb{R}^n)$, για $k = 1, 2, \dots, m$, με $\sum_{k=1}^m 1/p_k = 1$ η συνάρτηση $\prod_{k=1}^m g_k$ είναι στον $L_1(\mathbb{R}^n)$ και ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{k=1}^m g_k \leq \prod_{k=1}^m \|g_k\|_{p_k}.$$

Άσκηση 12.1.2 Αποδείξτε με επαγωγή στο πλήθος των συναρτήσεων f_k την ανισότητα Prekora-Leindler στην Εκδοχή Β' (Θεώρημα 12.1.3) χρησιμοποιώντας την βέλτιστη συνάρτηση h_0 της σχέσης (12.3)· δηλαδή ότι για οποιεσδήποτε μη αρνητικές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις f_k , για $k = 1, 2, \dots, m$, αν $c_k > 0$ ώστε $\sum_{k=1}^m c_k = 1$ τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sup \left\{ \prod_{k=1}^m f_k(z_k)^{c_k} : x = \sum_{k=1}^m c_k z_k, z_k \in \mathbb{R}^n \right\} dx \geq \prod_{k=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) dx \right)^{c_k}.$$

Υπόδειξη: για το επαγωγικό βήμα παρατηρήστε ότι η ποσότητα

$$\sup \left\{ \prod_{k=1}^{m+1} f_k(z_k)^{c_k} : x = \sum_{k=1}^{m+1} c_k z_k, z_k \in \mathbb{R}^n \right\}$$

είναι, τετριμμένα, μεγαλύτερη ή ίση από την ποσότητα

$$\sup \left\{ \left(\sup \left\{ \prod_{k=1}^m f_k(z_k)^{\frac{c_k}{1-c_{m+1}}} : z = \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{1-c_{m+1}} z_k, z_k \in \mathbb{R}^n \right\} \right)^{1-c_{m+1}} \cdot f_{m+1}(z_{m+1})^{c_{m+1}} : x = (1-c_{m+1})z + c_{m+1}z_{m+1}, z, z_{m+1} \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

12.2 Η ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ ΤΩΝ BRASCAMP-LIEB ΚΑΙ BARTHE

Αν στις παραπάνω ανισότητες θέσουμε $n_k = 1$ για κάθε $k = 1, 2, \dots, n$ τότε οι θετικά ορισμένοι πίνακες A_k στη διατύπωση των ανισοτήτων είναι 1×1 , δηλαδή θετικοί αριθμοί. Θα τους μετονομάσουμε λοιπόν σε $\lambda_k > 0$. Έτσι ο παρονομαστής στον ορισμό της σταθεράς D ισούται με $\prod_{k=1}^m \lambda_k^{c_k}$. Επιπλέον, οι πίνακες B_k είναι $1 \times n$ οπότε οι B_k^t θα είναι τώρα πίνακες $n \times 1$ δηλαδή διανύσματα στον \mathbb{R}^n . Έτσι θα αντικαταστήσουμε τους B_k^t με $u_k \in \mathbb{R}^n$, θεωρώντας τους όμως ως απεικονίσεις από το \mathbb{R} στο \mathbb{R}^n . Δηλαδή $B_k^t(\theta) = \theta u_k$ για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$. Οι ανάστροφοι των B_k^t , δηλαδή οι B_k θα ισούνται με u_k^t . Έτσι το άθροισμα στον αριθμητή του ορισμού του D γίνεται $\sum_{k=1}^m c_k \lambda_k u_k u_k^t$. Αλλά (εύκολα ελέγχει κανείς ότι) $u_k u_k^t = u_k \otimes u_k$ (δείτε Άσκηση 12.3.1). Οπότε η σταθερά D αλλάζει στην

εξής έκφραση:

$$D = \inf \left\{ \frac{\det \left(\sum_{k=1}^m c_k \lambda_k u_k \otimes u_k \right)}{\prod_{k=1}^m \lambda_k^{c_k}} : \lambda_k > 0 \right\}.$$

Τέλος, επειδή το B_{kx} θα γίνει τώρα $u_k^t \cdot x = \langle u_k, x \rangle$ και αλλάζοντας τα z_k σε θ_k αφού τώρα ανήκουν στο \mathbb{R} (αφού $n_k = 1$) άρα είναι αριθμοί, τα παραπάνω πολυδιάστατα θεωρήματα μετατρέπονται στα εξής:

ΘΕΩΡΗΜΑ 12.2.1 (Εκδοχή Α). Έστω ότι $m \in \mathbb{N}$, $c_k > 0$, για $k = 1, 2, \dots, m$ με $\sum_{k=1}^m c_k = n$ και $f_k \in L_1(\mathbb{R})$ με $f_k \geq 0$. Αν $u_k \in \mathbb{R}^n$ για $k = 1, 2, \dots, m$ τότε

(Brascamp-Lieb)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{k=1}^m f_k(\langle u_k, x \rangle)^{c_k} \right) dx \leq D^{-1/2} \prod_{k=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} f_k(x) dx \right)^{c_k},$$

(Barthe: αντίστροφη Brascamp-Lieb)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \sup \left\{ \prod_{k=1}^m f_k(\theta_k)^{c_k} : x = \sum_{k=1}^m c_k \theta_k u_k, \theta_k \in \mathbb{R} \right\} dx \\ \geq D^{1/2} \prod_{k=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} f_k(x) dx \right)^{c_k}, \end{aligned}$$

όπου

$$D = \inf \left\{ \frac{\det \left(\sum_{k=1}^m c_k \lambda_k u_k \otimes u_k \right)}{\prod_{k=1}^m \lambda_k^{c_k}} : \lambda_k > 0 \right\}$$

($D^{-1/2} := \infty$ αν $D = 0$).

ΘΕΩΡΗΜΑ 12.2.2 (Εκδοχή Β). Έστω ότι $m \in \mathbb{N}$, $p_k > 0$, για $k = 1, 2, \dots, m$ με $\sum_{k=1}^m 1/p_k = n$ και $g_k \in L_1(\mathbb{R})$ με $g_k \geq 0$. Αν $u_k \in \mathbb{R}^n$ για $k = 1, 2, \dots, m$ τότε

(Brascamp-Lieb)

$$\left\| \prod_{k=1}^m g_k(\langle u_k, x \rangle) \right\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \leq D^{-1/2} \prod_{k=1}^m \|g_k\|_{L_{p_k}(\mathbb{R})},$$

(Barthe: αντίστροφη Brascamp-Lieb)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sup \left\{ \prod_{k=1}^m g_k(\theta_k) : x = \sum_{k=1}^m c_k \theta_k u_k, \theta_k \in \mathbb{R} \right\} dx \geq D^{1/2} \prod_{k=1}^m \|g_k\|_{L_{p_k}(\mathbb{R})},$$

όπου

$$(12.4) \quad D = \inf \left\{ \frac{\det \left(\sum_{k=1}^m c_k \lambda_k u_k \otimes u_k \right)}{\prod_{k=1}^m \lambda_k^{c_k}} : \lambda_k > 0 \right\},$$

με $c_k = 1/p_k$ για κάθε $k = 1, 2, \dots, n$ ($D^{-1/2} := \infty$ αν $D = 0$).

Παρατήρηση 12.2.3. Η τετριμμένη περίπτωση $D = 0$, και άρα $D^{-1/2} = \infty$, δεν μπορεί να αποκλειστεί. Για παράδειγμα αν τα u_k δεν παράγουν όλον τον \mathbb{R}^n τότε οι συναρτήσεις $f(\langle u_k, x \rangle)$ είναι σταθερές για όλα τα $x \in (\text{span}\{u_1, \dots, u_m\})^\perp$ και συνεπώς το αριστερό σκέλος της Brascamp-Lieb απειρίζεται. Έτσι, σε αυτή την περίπτωση, το $D^{-1/2}$ δεν μπορεί να είναι πεπερασμένο. Ισοδύναμα, το supremum στο αριστερό σκέλος της ανισότητας Barthe υπολογίζεται σε ένα κενό σύνολο αν $x \notin \text{span}\{u_1, \dots, u_m\}$, δηλαδή είναι 0. Έτσι η ανισότητα Barthe δεν μπορεί να ισχύει για θετικό D . Άρα $D = 0$. Και πράγματι αυτό το επιβεβαιώνει και ο ορισμός (12.4) της D διότι ο πίνακας $\sum_{k=1}^m c_k \lambda_k u_k \otimes u_k$ μηδενίζεται σε όλον τον μη τετριμμένο υπόχωρο $\text{span}\{u_1, \dots, u_m\}^\perp$, άρα δεν είναι αντιστρέψιμος και συνεπώς η ορίζουσά του είναι μηδέν για οποιαδήποτε θετικά λ_k . Συμπεραίνουμε ότι η συνθήκη $\text{span}\{u_1, \dots, u_m\} = \mathbb{R}^n$ είναι απαραίτητη για να έχουμε μη τετριμμένες ανισότητες. Για αυτό τον λόγο στο εξής θα θεωρούμε ότι τα u_1, \dots, u_m παράγουν τον \mathbb{R}^n .

Παρατήρηση 12.2.4. Αν υποθέσουμε ότι οι ανισότητες ισχύουν με $D > 0$, η συνθήκη $\sum_{k=1}^m c_k = n$ δεν μπορεί να παρακαμφθεί. Πράγματι, αν αλλάξουμε κάθε $f_k(\cdot)$ σε $f_k(\lambda \cdot)$, το αριστερό σκέλος, κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $\lambda x = y$, θα αλλάξει κατά τον παράγοντα λ^{-n} , ενώ το δεξιό σκέλος κατά τον παράγοντα $\lambda^{-(c_1 + \dots + c_m)}$. Έτσι, για να ισχύει η ανισότητα με $D > 0$ είναι απαραίτητη η υπόθεση $\sum_{k=1}^m c_k = n$ (αλλιώς θα οδηγηθούμε σε άτοπο αφήνοντας το λ να πάει στο 0^+ ή στο ∞).

12.3 ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΩΝ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ BRASCAMP-LIEB ΚΑΙ BARTHE

Ξεκινάμε με την παρατήρηση ότι στην Εκδοχή A των ανισοτήτων μπορούμε να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με το $\prod_{k=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} f_k \right)^{c_k}$ οπότε μπορούμε να αναχθούμε έτσι σε συναρτήσεις f_k που έχουν ολοκλήρωμα ίσο με 1. Έτσι αρκεί να δείξουμε ότι

$$\sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{k=1}^m f_k(\langle u_k, x \rangle)^{c_k} \right) dx : \int_{\mathbb{R}} f_k = 1 \right\} \leq D^{-1/2}$$

και

$$\inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \sup \left\{ \prod_{k=1}^m f_k^{c_k}(\theta_k) : x = \sum_{k=1}^m c_k \theta_k u_k, \theta_k \in \mathbb{R} \right\} dx : \int_{\mathbb{R}} f_k = 1 \right\} \geq D^{1/2}.$$

Θα αποδείξουμε ότι τα παραπάνω sup και inf επιτυγχάνονται όταν οι f_k είναι Γκαουσιανές της μορφής $\sqrt{\lambda_k/\pi} \cdot e^{-\lambda_k t^2}$ ώστε να ισχύει $\int_{\mathbb{R}} f_k = 1$. Δηλαδή θα δείξουμε ότι

$$\begin{aligned} & \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{k=1}^m f_k(\langle u_k, x \rangle)^{c_k} \right) dx : \int_{\mathbb{R}} f_k = 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{k=1}^m f_k(\langle u_k, x \rangle)^{c_k} \right) dx : \right. \\ & \quad \left. \int_{\mathbb{R}} f_k = 1, f_k(t) = \sqrt{\frac{\lambda_k}{\pi}} \cdot e^{-\lambda_k t^2} \right\} =: A \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} & \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \sup \left\{ \prod_{k=1}^m f_k^{c_k}(\theta_k) : x = \sum_{k=1}^m c_k \theta_k u_k, \theta_k \in \mathbb{R} \right\} dx : \int_{\mathbb{R}} f_k = 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \sup \left\{ \prod_{k=1}^m f_k^{c_k}(\theta_k) : x = \sum_{k=1}^m c_k \theta_k u_k, \theta_k \in \mathbb{R} \right\} dx : \right. \\ & \quad \left. \int_{\mathbb{R}} f_k = 1, f_k(t) = \sqrt{\frac{\lambda_k}{\pi}} \cdot e^{-\lambda_k t^2} \right\} =: B. \end{aligned}$$

Η απόδειξη θα ολοκληρωθεί δείχνοντας ότι $A = B^{-1} = D^{-1/2}$.

Το ακόλουθο λήμμα είναι το κύριο τεχνικό βήμα για την απόδειξη των παραπάνω ανισοτήτων. Το βασικό εργαλείο της απόδειξής του είναι η «μεταφορά του μέτρου»:

ΛΗΜΜΑ 12.3.1 (Barthe). Έστω ότι $m \geq n$, $\rho_1, \dots, \rho_m \geq 1$ με $\sum_{k=1}^m \rho_k^{-1} = n$, $c_k = \rho_k^{-1}$, $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^n$ διανύσματα που παράγουν τον \mathbb{R}^n , και οι $f_1, \dots, f_m, h_1, \dots, h_m : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με

$$\int_{\mathbb{R}} f_k(t) dt = \int_{\mathbb{R}} h_k(t) dt = 1$$

για κάθε $k = 1, 2, \dots, m$. Θέτουμε

$$I(f_1, \dots, f_m) := \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{k=1}^m f_k^{c_k}(\langle u_k, x \rangle) dx$$

και

$$K(h_1, \dots, h_m) := \int_{\mathbb{R}^n} \sup \left\{ \prod_{k=1}^m h_k^{c_k}(\theta_k) : \theta_k \in \mathbb{R}, x = \sum_{k=1}^m \theta_k c_k u_k \right\} dx.$$

Τότε

$$D \cdot I(f_1, \dots, f_m) \leq K(h_1, \dots, h_m),$$

όπου

$$D = \inf \left\{ \frac{\det \left(\sum_{k=1}^m c_k \lambda_k u_k \otimes u_k \right)}{\prod_{k=1}^m \lambda_k^{c_k}} : \lambda_k > 0 \right\}.$$

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις f_k και h_k είναι συνεχείς και θετικές, και ότι $0 < D < \infty$ (αν $D = 0$ η ανισότητα είναι προφανής). «Μεταφέρουμε το μέτρο» με την εξής έννοια: αφού $\int_{\mathbb{R}} f_k(t) dt = \int_{\mathbb{R}} h_k(t) dt = 1$ και οι f_k και h_k είναι συνεχείς και θετικές, για κάθε $t \in \mathbb{R}$ υπάρχει μοναδικό $T_k(t) \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\int_{-\infty}^{T_k(t)} h_k(s) ds = \int_{-\infty}^t f_k(s) ds.$$

Από το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού συνεπάγεται ότι

$$(12.5) \quad h_k(T_k(t))T_k'(t) = f_k(t),$$

για κάθε $k = 1, 2, \dots, m$. Για εξοικονόμηση χώρου, ας γράψουμε $h_0(x)$ για την υπό ολοκλήρωση ποσότητα στον ορισμό του $K(h_1, \dots, h_m)$. Για τον υπολογισμό του $K(h_1, \dots, h_m)$ αλλάζουμε τις μεταβλητές θέτοντας

$$(12.6) \quad x = W(y) := \sum_{k=1}^m c_k T_k(\langle y, u_k \rangle) u_k.$$

Φανερά $x_k = \langle W(y), e_k \rangle$, όπου e_1, \dots, e_n η συνήθης βάση του \mathbb{R}^n , άρα η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού έχει στοιχεία τα

$$\begin{aligned} w_{ij} &= dx_i/dy_j = \frac{d}{dy_j} \sum_{k=1}^m c_k T_k(\langle y, u_k \rangle) \langle u_k, e_i \rangle \\ &= \sum_{k=1}^m c_k T'_k(\langle y, u_k \rangle) \langle u_k, e_j \rangle \langle u_k, e_i \rangle \\ &= \left\langle \left(\sum_{k=1}^m c_k T'_k(\langle y, u_k \rangle) \cdot u_k \otimes u_k \right) e_j, e_i \right\rangle. \end{aligned}$$

Αυτό δείχνει ότι η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού είναι ο πίνακας

$$J_W = \sum_{k=1}^m c_k T'_k(\langle y, u_k \rangle) \cdot u_k \otimes u_k.$$

Επειδή η T_k είναι γνησίως αύξουσα ισχύει $T'_k > 0$. Επίσης $c_k > 0$ και κάθε $u_k \otimes u_k$ είναι φανερά θετικά ημιορισμένος. Επειδή για κάθε $v \in \mathbb{R}^n$ δεν μπορεί να συμβαίνει $\langle u_k \otimes u_k(v), v \rangle = \langle v, u_k \rangle^2 = 0$, αφού τα u_k παράγουν τον \mathbb{R}^n , συμπεραίνουμε ότι ο J_W είναι θετικά ορισμένος και συνεπώς η W είναι 1-1 (δείτε Άσκηση 12.3.2), και έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο αλλαγής μεταβλητών στα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} h_0(x) dx &\geq \int_{W(\mathbb{R}^n)} h_0(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} h_0(W(y)) |\det J_W(y)| dy \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{k=1}^m h_k^{c_k} \left(T_k(\langle y, u_k \rangle) \right) \\ (12.7) \quad &\cdot \det \left(\sum_{k=1}^m c_k T'_k(\langle y, u_k \rangle) u_k \otimes u_k \right) dy, \end{aligned}$$

διότι

$$h_0(W(y)) = \sup \left\{ \prod_{k=1}^m h_k^{c_k}(\theta_k) : W(y) = \sum_{k=1}^m \theta_k c_k u_k \right\}$$

και η ανασύσταση του $W(y)$ στην προηγούμενη ισχύει για $\theta_k = T_k(\langle y, u_k \rangle)$ από τον ορισμό της W (σχέση (12.6)). Συνεχίζοντας από την (12.7) και χρησιμοποιώντας τον ορισμό της ποσότητας D παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} h_0(x) dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{k=1}^m h_k^{c_k}(T_k(\langle y, u_k \rangle)) \cdot D \cdot \prod_{k=1}^m (T_k'(\langle y, u_k \rangle))^{c_k} \right) dy,$$

και με τη βοήθεια της (12.5)

$$\int_{\mathbb{R}^n} h_0(x) dx \geq D \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{k=1}^m f_k^{c_k}(\langle y, u_k \rangle) dy,$$

που είναι η ζητούμενη. □

Έχοντας αποδείξει λοιπόν ότι

$$D \cdot I(f_1, \dots, f_m) \leq K(h_1, \dots, h_m),$$

αν πάρουμε supremum ως προς τις f_k και infimum ως προς τις h_k θα συμπεράνουμε ότι

$$(12.8) \quad D \cdot A \leq D \cdot \sup I(f_1, \dots, f_m) \leq \inf K(h_1, \dots, h_m) \leq B,$$

όπου A και B οι ποσότητες που ορίστηκαν στη αρχή της Ενότητας 12.3, και τα \sup και \inf είναι ως προς όλες τις f_k και h_k με ολοκλήρωμα 1 (όπως στη διατύπωση του Λήμματος 12.3.1). Συνεπώς για να ολοκληρωθεί η απόδειξη της ανισότητας Brascamp-Lieb και της ανισότητας Barthe αρκεί να αποδείξουμε ότι

(i) $B = D^{1/2}$, οπότε η (12.8) συνεπάγεται

$$I(f_1, \dots, f_m) \leq \sup I(f_1, \dots, f_m) \leq D^{-1/2},$$

δηλαδή την ανισότητα Brascamp-Lieb, και

(ii) $A = D^{-1/2}$ οπότε η (12.8) συνεπάγεται

$$D^{1/2} \leq \inf K(h_1, \dots, h_m) \leq K(h_1, \dots, h_m),$$

δηλαδή την ανισότητα Barthe.

Οι ποσότητες A και B όμως, είναι ποσότητες που υπολογίζονται σε γκαουσιανές συναρτήσεις και αυτό κάνει τον υπολογισμό τους εφικτό. Θα χρειαστούμε τον τύπο

$$(12.9) \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}},$$

ο οποίος ισχύει για κάθε $\lambda > 0$, και αποδुकνύεται εύκολα με την αλλαγή μεταβλητής $s = \sqrt{2\lambda} \cdot t$ και το γεγονός ότι $\int_{\mathbb{R}} e^{-s^2/2} = \sqrt{2\pi}$.

Απόδειξη του (ii) Έστω ότι οι g_k είναι Γκαουσιανές συναρτήσεις της μορφής $g_k(t) = e^{-\lambda_k t^2}$ για $\lambda_k > 0$, $k = 1, \dots, m$. Θέτουμε U να είναι η γραμμική απεικόνιση

$$U = \sum_{k=1}^m c_k \lambda_k u_k \otimes u_k,$$

και έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{k=1}^m g_k^{c_k}(\langle x, u_k \rangle) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\sum_{k=1}^m c_k \lambda_k \langle x, u_k \rangle^2\right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\left\langle \left(\sum_{k=1}^m c_k \lambda_k u_k \otimes u_k\right)(x), x \right\rangle\right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\langle Ux, x \rangle) dx, \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\|U^{1/2}x\|_2^2) dx, \end{aligned}$$

όπου $U^{1/2}$ η τετραγωνική ρίζα του U , η οποία υπάρχει, μια και ο U είναι φανερά θετικά ορισμένος, αφού $c_k > 0$, $\lambda_k > 0$, $u_k \otimes u_k$ θετικά ημιορισμένος για κάθε $k = 1, \dots, m$ και τα u_k παράγουν τον \mathbb{R}^n (δείτε Παρατήρηση 12.2.3). Αλλάζοντας μεταβλητές, και συγκεκριμένα θέτοντας $y = \sqrt{2}U^{1/2}(x)$, και χρησιμοποιώντας το ότι η ιακωβιανή αυτού του μετασχηματισμού είναι $(\sqrt{2}^n \det U^{1/2})^{-1} = 1/(\sqrt{2}^n \sqrt{\det U})$, η τελευταία ποσότητα παραπάνω ισούται με $\pi^{n/2}/\sqrt{\det U}$. Καταλήξαμε

δηλαδή στην

$$(12.10) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{k=1}^m g_k^{c_k}(\langle x, u_k \rangle) dx = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det U}}.$$

Για να προκύψει το ζητούμενο πρέπει να διαιρέσουμε κάθε g_k με το ολοκλήρωμά της, ή ισοδύναμα να διαιρέσουμε την (12.10) με την ποσότητα $\prod_{k=1}^m (\int_{\mathbb{R}} g_k(t))^{c_k}$. Αλλά χρησιμοποιώντας την (12.9) βλέπουμε ότι

$$(12.11) \quad \prod_{k=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} g_k(t) \right)^{c_k} = \prod_{k=1}^m \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda_k}} \right)^{c_k} = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\prod_{k=1}^m \lambda_k^{c_k}}}.$$

Διαιρώντας την (12.10) με την (12.11) παίρνουμε ότι

$$A = \sup \left\{ \frac{\sqrt{\prod_{k=1}^m \lambda_k^{c_k}}}{\sqrt{\det U}} : \lambda_k > 0 \right\} = \frac{1}{\inf \left\{ \frac{\det U}{\prod_{k=1}^m \lambda_k^{c_k}} : \lambda_k > 0 \right\}^{1/2}} \\ = D^{-1/2},$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη του (ii).

Απόδειξη του (i) Για τον υπολογισμό του B παρατηρούμε ότι αν $f_k(t) = 1/\sqrt{\lambda_k \pi} \cdot e^{-t^2/\lambda_k}$ (ώστε $\int_{\mathbb{R}} f_k = 1$) τότε

$$\sup \left\{ \prod_{k=1}^m f_k^{c_k}(\theta_k) : x = \sum_{k=1}^m c_k \theta_k u_k, \theta_k \in \mathbb{R} \right\} \\ = \sup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi^n \prod_{k=1}^m \lambda_k^{c_k}}} \cdot \exp \left(- \sum_{k=1}^m c_k \theta_k^2 / \lambda_k \right) : x = \sum_{k=1}^m c_k \theta_k u_k \right\} \\ = \frac{1}{\pi^{n/2} \sqrt{\prod_{k=1}^m \lambda_k^{c_k}}} \cdot \exp \left(- \inf \left\{ \sum_{k=1}^m c_k \theta_k^2 / \lambda_k : x = \sum_{k=1}^m c_k \theta_k u_k \right\} \right).$$

Για $U = \sum_{k=1}^m c_k \lambda_k u_k \otimes u_k$ όπως και πριν, επειδή ο U είναι θετικά

ορισμένος, η ποσότητα

$$\|x\| = \langle Ux, x \rangle^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^m c_k \lambda_k \langle x, u_k \rangle^2 \right)^{1/2}$$

ορίζει μια νόρμα στον \mathbb{R}^n . Για να συνεχίσουμε την απόδειξη χρειαζόμαστε ένα ακόμα τεχνικό λήμμα:

Λήμμα 12.3.2. Η δυϊκή νόρμα της $\|\cdot\|$ είναι η $\|\cdot\|_*$ με

$$\|y\|_*^2 = \langle U^{-1}y, y \rangle = \inf \left\{ \sum_{k=1}^m c_k \theta_k^2 / \lambda_k : \theta_i \in \mathbb{R} \text{ ώστε } y = \sum_{k=1}^m c_k \theta_k u_k \right\}.$$

Αναβάλλουμε την απόδειξη του προηγούμενου λήμματος και συνεχίζουμε τον υπολογισμό του $K(f_1, \dots, f_m)$. Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι

$$K(f_1, \dots, f_m) = \frac{1}{\pi^{n/2} \sqrt{\prod_{k=1}^m \lambda_k^{c_k}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle U^{-1}x, x \rangle} dx.$$

Αν συμβολίσουμε με $U^{-1/2}$ την τετραγωνική ρίζα του θετικά ορισμένου U^{-1} , και αλλάξουμε μεταβλητές στο τελευταίο ολοκλήρωμα, θέτοντας $y = \sqrt{2}U^{-1/2}x$, με ορίζουσα Ιακωβιανής $\sqrt{(\det U)/2^n}$, θα πάρουμε

$$\begin{aligned} K(f_1, \dots, f_m) &= \frac{1}{\pi^{n/2} \sqrt{\prod_{k=1}^m \lambda_k^{c_k}}} \sqrt{\frac{\det U}{2^n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|y\|_2^2/2} dy \\ &= \sqrt{\frac{\det U}{\prod_{k=1}^m \lambda_k^{c_k}}} \\ &= \left(\frac{\det \left(\sum_{k=1}^m c_k \lambda_k u_k \otimes u_k \right)}{\prod_{k=1}^m \lambda_k^{c_k}} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Παίρνοντας infimum ως προς όλες τις Γκαουσιανές με ολοκλήρωμα ίσο με 1, δηλαδή ως προς όλα τα $\lambda_k > 0$ καταλήγουμε στο ότι

$$B = \left(\inf \left\{ \frac{\det \left(\sum_{k=1}^m c_k \lambda_k u_k \otimes u_k \right)}{\prod_{k=1}^m \lambda_k^{c_k}} : \lambda_k > 0 \right\} \right)^{1/2} = D^{1/2},$$

που είναι η ζητούμενη. □

Απόδειξη του Λήμματος 12.3.2

Κατ' αρχάς έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \|y\|_* &= \sup_{x \neq 0} \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{\langle x, y \rangle}{\sqrt{\langle Ux, x \rangle}} \\ &= \sup_{x \neq 0} \frac{\langle U^{1/2}x, U^{-1/2}y \rangle}{\sqrt{\langle U^{1/2}x, U^{1/2}x \rangle}} = \sup_{x \neq 0} \left\langle \frac{U^{1/2}x}{\|U^{1/2}x\|_2}, U^{-1/2}y \right\rangle \\ (12.12) \quad &= \|U^{-1/2}y\|_2 = \sqrt{\langle U^{-1/2}y, U^{-1/2}y \rangle} = \sqrt{\langle U^{-1}y, y \rangle}. \end{aligned}$$

Επειδή τα u_k παράγουν τον \mathbb{R}^n , για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ υπάρχουν θ_k ώστε $y = \sum_{k=1}^m c_k \theta_k u_k$. Έτσι, από την ανισότητα Cauchy-Schwartz έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \left\langle x, \sum_{k=1}^m c_k \theta_k u_k \right\rangle = \sum_{k=1}^m c_k \theta_k \langle x, u_k \rangle = \sum_{k=1}^m \sqrt{\frac{c_k}{\lambda_k}} \cdot \theta_k \cdot \sqrt{c_k \lambda_k} \langle x, u_k \rangle \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^m \frac{c_k}{\lambda_k} \theta_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^m c_k \lambda_k \langle x, u_k \rangle^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{k=1}^m \frac{c_k}{\lambda_k} \theta_k^2 \right)^{1/2} \langle Ux, x \rangle^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^m \frac{c_k}{\lambda_k} \theta_k^2 \right)^{1/2} \|x\|. \end{aligned}$$

Άρα

$$\|y\|_* = \sup_{x \neq 0} \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|} \leq \inf \left\{ \left(\sum_{k=1}^m \frac{c_k}{\lambda_k} \theta_k^2 \right)^{1/2} : y = \sum_{k=1}^m c_k \theta_k u_k, \theta_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

Όμως ισχύει η ισότητα αν επιλέξουμε $x = U^{-1}y$ και $\theta_k = \lambda_k \langle x, u_k \rangle$. Πράγματι, για αυτά τα θ_k ισχύει

$$\sum_{k=1}^m c_k \theta_k u_k = \sum_{k=1}^m c_k \lambda_k \langle x, u_k \rangle u_k = Ux = UU^{-1}y = y$$

και

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^m \frac{c_k}{\lambda_k} \theta_k^2 \right)^{1/2} &= \left(\sum_{k=1}^m \frac{c_k}{\lambda_k} \lambda_k^2 \langle x, u_k \rangle^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{k=1}^m c_k \lambda_k \langle x, u_k \rangle^2 \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{\langle Ux, x \rangle} = \sqrt{\langle y, U^{-1}y \rangle} \\ &= \|y\|_*, \end{aligned}$$

από την (12.12), ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 12.3.1 Ελέγξτε ότι για κάθε $u \in \mathbb{R}^n$ ισχύει $u \otimes u = uu^t$, όπου το u νοείται ως πίνακας $n \times 1$ (στήλη) και η $u \otimes u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι η γραμμική απεικόνιση $u \otimes u(x) = \langle u, x \rangle u$.

Άσκηση 12.3.2 Έστω ότι η $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ έχει πεδίο ορισμού το κυρτό υποσύνολο Ω του \mathbb{R}^n . Αποδείξτε ότι αν ο Ιακωβιανός πίνακας της f είναι θετικά ορισμένος, τότε η f είναι 1-1, ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

- (i) Αν $x, a \in \Omega$ με $x \neq a$, θέτουμε $h = x - a \neq 0$ και θεωρούμε την $x(t) = a + th : [0, 1] \rightarrow \Omega$.
- (ii) Ορίζουμε $\Phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\Phi(t) = \langle h, f(x(t)) - f(a) \rangle = \sum_{k=1}^n h_k (f_k(x(t)) - f_k(a)),$$

όπου f_k οι συντεταγμένες συναρτήσεις της f , δηλαδή $f_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ με $f = (f_1, \dots, f_n)$.

- (iii) Χρησιμοποιήστε τον κανόνα της αλυσίδας για να δείξετε ότι $\Phi'(t) = \langle J_f h, h \rangle > 0$, όπου J_f ο Ιακωβιανός πίνακας της f .
- (iv) Συμπεράνετε από το Θεώρημα Rolle ότι αφού $\Phi(0) = 0$ δεν μπορεί να ισχύει $\Phi(1) = 0$, οπότε $f(x) \neq f(a)$.

12.4 Η ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΙΣΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ

Έστω ότι το κυρτό συμμετρικό σώμα K είναι στη θέση του John. Τότε τα σημεία επαφής του συνόρου του K με την ευκλείδεια μπάλα

είναι αρκετά ώστε να αναπαριστούν την ταυτοτική απεικόνιση με την εξής έννοια:

ΘΕΩΡΗΜΑ 12.4.1 (F. John). *Αν το κυρτό και κεντρικά συμμετρικό σώμα K βρίσκεται στη θέση του John, τότε υπάρχουν m σημεία επαφής u_1, \dots, u_m του συνόρου του K με την εγγεγραμμένη \mathbb{S}^{n-1} ώστε να ισχύει*

$$(12.13) \quad \text{Id} = \sum_{k=1}^m c_k u_k \otimes u_k$$

για κατάλληλους αριθμούς $c_k > 0$. Το m μπορεί να επιλεγεί μικρότερο ή ίσο του $1 + n(n+1)/2$.

Παρατήρηση 12.4.2. Παρατηρούμε ότι τα διανύσματα u_k ικανοποιούν την $\|u_k\|_K = \|u_k\|_2 = 1$, αφού είναι στο σύνορο τόσο του K όσο και της B_2^n .

Παρατήρηση 12.4.3. Παίρνοντας το ίχνος στη σχέση (12.13) και χρησιμοποιώντας και την Άσκηση 12.3.1 βλέπουμε ότι

$$n = \text{tr Id} = \text{tr} \left(\sum_{k=1}^m c_k u_k \otimes u_k \right) = \sum_{k=1}^m c_k \text{tr}(u_k \otimes u_k) = \sum_{k=1}^m c_k \|u_k\|_2^2 = \sum_{k=1}^m c_k.$$

Δηλαδή ισχύει $\sum_{k=1}^m c_k = n$ και άρα $\sum_{k=1}^m c_k/n = 1$. Αυτό σημαίνει ότι η ζητούμενη σχέση (12.13) μας λέει ότι αρκεί να αποδείξουμε ότι ο πίνακας $n^{-1} \text{Id}$ ανήκει στην κυρτή θήκη των πινάκων $u \otimes u$ για u σημείο του $\text{bd}(K) \cap \mathbb{S}^{n-1}$.

Παρατήρηση 12.4.4. Οι πίνακες $u \otimes u$ επειδή είναι συμμετρικοί έχουν τόσα ανεξάρτητα στοιχεία όσα τα στοιχεία στη διαγώνιο και κάτω από αυτή. Δηλαδή συνολικά $1 + 2 + \dots + n = n(n+1)/2$. Άρα αν δειχθεί ότι ο $n^{-1} \text{Id}$ είναι στην κυρτή θήκη των $u \otimes u$ με $u \in \mathbb{R}^n$ τότε από το Θεώρημα Καραθεοδωρή (Θεώρημα 3.1.14) αρκούν $k := 1 + n(n+1)/2$ στοιχεία της μορφής $u \otimes u$ (αντιλαμβανόμενοι τα $u \otimes u$ ως στοιχεία του \mathbb{R}^{k-1}). Αυτό αποδεικνύει ότι $m \leq 1 + n(n+1)/2$.

Απόδειξη του Θεωρήματος 12.4.1: Σύμφωνα με τις παραπάνω παρατηρήσεις αρκεί να αποδείξουμε ότι ο πίνακας $n^{-1} \text{Id}$ βρίσκεται στην κυρτή θήκη των πινάκων $u \otimes u$ όπου u σημείο επαφής του $\text{bd}(K)$ και του \mathbb{S}^{n-1} . Θέτουμε $U = \{u \in \mathbb{S}^{n-1} : \|u\|_K = 1\}$ και θέλουμε να δείξουμε ότι $n^{-1} \text{Id} \in \text{conv}\{u \otimes u : u \in U\}$. Υποθέτουμε ότι αυτό δεν συμβαίνει, και

επειδή το τελευταίο σύνολο είναι φανερά συμπαγές, εργαζόμενοι στον \mathbb{R}^{n^2} και εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.5.4, υπάρχει στοιχείο A του \mathbb{R}^{n^2} που διαχωρίζει το $n^{-1} \text{Id}$ από το $\text{conv}\{u \otimes u : u \in U\}$. (Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία του \mathbb{R}^{n^2} τα μεταχειριζόμαστε και ως διανύσματα και ως πίνακες $n \times n$.) Έτσι υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε να ισχύει

$$(12.14) \quad \langle A, n^{-1} \text{Id} \rangle < -\epsilon < 0 \leq \langle A, u \otimes u \rangle,$$

για κάθε $u \in U$. Επειδή οι πίνακες $n^{-1} \text{Id}$ και $u \otimes u$ είναι συμμετρικοί ελέγχουμε εύκολα ότι $\langle A^t, n^{-1} \text{Id} \rangle = \langle A, n^{-1} \text{Id} \rangle$ και $\langle A^t, u \otimes u \rangle = \langle A, u \otimes u \rangle$. Συνεπώς η (12.14) συνεχιζεί να ισχύει αν στη θέση του A βάλουμε τον συμμετρικό πίνακα $(A + A^t)/2$. Άρα μπορούμε να υποθέσουμε εξ' αρχής ότι ισχύει η (12.14) με A συμμετρικό.

Θέτουμε $B = A - (\text{tr}A/n) \text{Id}$ και παρατηρούμε ότι $\langle B, n^{-1} \text{Id} \rangle = \text{tr}B/n = 0$. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= \langle B, n^{-1} \text{Id} \rangle = \langle A, n^{-1} \text{Id} \rangle - \frac{\text{tr}A}{n} < -\epsilon - \frac{\text{tr}A}{n} \\ &< -\frac{\text{tr}A}{n} \leq \langle A, u \otimes u \rangle - \frac{\text{tr}A}{n} \langle \text{Id}, u \otimes u \rangle \\ &= \langle B, u \otimes u \rangle, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\langle \text{Id}, u \otimes u \rangle = \|u\|_2^2 = 1$.

Υποθέτοντας λοιπόν ότι ο $n^{-1} \text{Id}$ δεν ανήκει στην κυρτή θήκη των $u \otimes u$ για $u \in U$ καταλήξαμε να βρούμε ένα πίνακα $B \in \mathbb{R}^{n^2}$ και θετικό αριθμό $s := -\epsilon - \text{tr}A/n$ ώστε να ισχύουν τα εξής:

(i) $B = B^t$ και $B \neq 0$.

(ii) $\text{tr}B = \langle B, n^{-1} \text{Id} \rangle = 0 < s \leq \langle B, u \otimes u \rangle$ για κάθε $u \in U$.

Για $\delta > 0$ αρκετά κοντά στο μηδέν ο πίνακας $\text{Id} + \delta B$ είναι θετικά ορισμένος συνεπώς έχει τετραγωνική ρίζα, έστω τον πίνακα T_δ . Θεωρούμε τα ελλειψοειδή

$$\mathcal{E}_\delta = T_\delta^{-1}(B_2^n) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \langle (\text{Id} + \delta B)x, x \rangle \leq 1 \right\}.$$

Ο όγκος του \mathcal{E}_δ ισούται με $\det T_\delta^{-1} |B_2^n|$. Αλλά εύκολα ελέγχουμε ότι ο $\text{Id} + \delta B$ δεν είναι πολλαπλάσιος του ταυτοτικού. Συνεπώς, από την

Πρόταση 10.2.2, η ακόλουθη ανισότητα είναι γνήσια:

$$(\det T_\delta)^{2/n} = \det(\text{Id} + \delta B)^{1/n} < \frac{\text{tr}(\text{Id} + \delta B)}{n} = 1.$$

Άρα $|\mathcal{E}_\delta| > |B_2^n|$, με μόνο περιορισμό το $\delta > 0$ να είναι αρκετά μικρό ώστε ο $\text{Id} + \delta B$ να είναι θετικά ορισμένος.

Θα καταλήξουμε λοιπόν σε άτοπο αν δείξουμε ότι υπάρχουν κατάλληλα μικρά $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $\mathcal{E}_\delta \subseteq K$ (διότι αυτό θα σημαίνει ότι το B_2^n δεν είναι το ελλειψοειδές μεγίστου όγκου μέσα στο K αντιφάσκοντας με την υπόθεση).

Για να το επιτύχουμε αυτό, θέτουμε $V = \{v \in \mathbb{S}^{n-1} : \text{dist}(v, U) \geq s/2\|B\|\}$, όπου $\|B\|$ η νόρμα του B ως πίνακας· δηλαδή $\|B\| = \sup_{\|u\|_2=1} \|Bu\|_2$.

Αν $K = B_2^n$ το V είναι μεν κενό, αλλά δεν έχουμε τίποτα να αποδείξουμε, αφού μπορούμε να θέσουμε $c_k = 1$ και $u_k = e_k$ τα βασικά διανύσματα του \mathbb{R}^n και η (12.13) προφανώς ισχύει.

Υποθέτουμε ότι $K \neq B_2^n$ οπότε μικραίνοντας αν χρειαστεί το $s > 0$ το σύνολο V είναι μη κενό και φανερά συμπαγές υποσύνολο του \mathbb{S}^{n-1} . Αν $v \in \mathbb{S}^{n-1} \setminus V$, έστω ότι $u \in U$ με $\|v - u\|_2 < s/2\|B\|$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \left| \langle (\text{Id} + \delta B)v, v \rangle - \langle (\text{Id} + \delta B)u, u \rangle \right| &= \delta |\langle Bv, v \rangle - \langle Bu, u \rangle| \\ &= \delta |\langle Bv, v \rangle - \langle Bv, u \rangle + \langle Bv, u \rangle - \langle Bu, u \rangle| \\ &\leq \delta \left(|\langle Bv, v - u \rangle| + |\langle B(v - u), u \rangle| \right) \\ &\leq \delta 2\|B\| \|v\|_2 \|v - u\|_2 < \delta s. \end{aligned}$$

Άρα

$$\langle (\text{Id} + \delta B)v, v \rangle > \langle (\text{Id} + \delta B)u, u \rangle - \delta s = 1 + \delta \langle Bu, u \rangle \geq 1 + \delta s - \delta s = 1.$$

Δηλαδή

$$1 < \langle (\text{Id} + \delta B)v, v \rangle \leq \langle (\text{Id} + \delta B) \frac{v}{\|v\|_K}, \frac{v}{\|v\|_K} \rangle,$$

διότι $\|v\|_K \leq \|v\|_2 = 1$, αφού $B_2^n \subseteq K$. Συμπεραίνουμε ότι $v/\|v\|_K \in \text{bd}(K) \setminus \mathcal{E}_\delta$.

Δείξαμε λοιπόν ότι για κάθε διεύθυνση $v \in \mathbb{S}^{n-1} \setminus V$ η ημιευθεία με αρχή το 0 που περνάει από το v αναγκαστικά τέμνει πρώτα το $\text{bd}(\mathcal{E}_\delta)$ και μετά το $\text{bd}(K)$. Αν δείξουμε ότι το ίδιο ισχύει και για τις διευθύνσεις $v \in V$ θα έχουμε δείξει ότι $\mathcal{E}_\delta \subseteq K$ καταλήγοντας σε άτοπο

και ολοκληρώνοντας την απόδειξη. Αυτό όμως προκύπτει ως εξής: λόγω της συμπίεσης του V και, κατά συνέπεια, της θετικής του απόστασης από το $\text{bd}(K)$ (αφού δεν το τέμνει), υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε

$$(12.15) \quad (1 + \epsilon)V \cap \text{bd}(K) = \emptyset.$$

Αλλά τα \mathcal{E}_δ συγκλίνουν (με τη μετρική Hausdorff (δείτε Άσκηση 12.4.2)) στο B_2^n . Οπότε υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε για κάθε $0 < \delta < \delta_0$ να ισχύει $\mathcal{E}_\delta \subseteq (1 + \epsilon)B_2^n$. Έτσι για κάθε $v \in V$ χρησιμοποιώντας την (12.15) ισχύει

$$(\mathbb{R}_+v) \cap \mathcal{E}_\delta \subseteq (\mathbb{R}_+v) \cap (1 + \epsilon)B_2^n \subseteq (\mathbb{R}_+v) \cap K. \quad \square$$

Σκοπός μας στη συνέχεια είναι να δείξουμε ότι αν χρησιμοποιηθούν στην ανισότητα Brascamp-Lieb τα u_k που αναπαριστούν τον ταυτοτικό πίνακα όπως παραπάνω, τότε η σταθερά D της ανισότητας ισούται με 1. Για να το καταφέρουμε αυτό χρειαζόμαστε μια επέκταση της ανισότητας Hadamard. Η ανισότητα Hadamard λέει ότι για κάθε $n \times n$ πίνακα A ισχύει

$$\det A \leq \prod_{k=1}^n \|Ae_k\|_2,$$

όπου τα e_1, \dots, e_n είναι η συνήθης βάση του \mathbb{R}^n . Δεν χρειάζεται να αποδείξουμε αυτή την ανισότητα, αφού θα αποδείξουμε την ακόλουθη επέκτασή της.

ΠΡΟΤΑΣΗ 12.4.5 (Ανισότητα Hadamard). *Αν τα u_k και c_k αναπαριστούν τον ταυτοτικό πίνακα όπως στο Θεώρημα 12.4.1, τότε για κάθε $n \times n$ πίνακα A ισχύει*

$$\det A \leq \prod_{k=1}^m \|Au_k\|_2^{c_k}.$$

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι η ζητούμενη ανισότητα είναι αναλλοίωτη στους ορθογώνιους πίνακες, οπότε αντικαθιστώντας τον A με τον QA όπου ο Q ανήκει στην ορθογώνια ομάδα μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο A είναι συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος (δείτε Άσκηση 8.1.4). Επειδή αν η ορίζουσα του A ισούται με μηδέν τότε η ανισότητα είναι προφανής, υποθέτουμε ότι ο A είναι θετικά ορισμένος. Συνεπώς είναι διαγωνοποιήσιμος με θετικές ιδιοτιμές, δηλαδή ισχύει

$$A = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \otimes e_i,$$

με $a_i > 0$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$. Επειδή $\sum_{i=1}^n \langle u_k, e_i \rangle^2 = \|u_k\|_2^2 = 1$ εφαρμόζοντας την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου παίρνουμε ότι

$$\|Au_k\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \langle u_k, e_i \rangle^2 \geq \prod_{i=1}^n \alpha_i^2 \langle u_k, e_i \rangle^2.$$

Πολλαπλασιάζοντας για όλα τα k έχουμε

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^m \|Au_k\|_2^{c_k} &\geq \prod_{k=1}^m \prod_{i=1}^n \alpha_i^{c_k \langle u_k, e_i \rangle^2} \\ &= \prod_{i=1}^n \alpha_i^{\sum_{k=1}^m c_k \langle u_k, e_i \rangle^2} \\ &= \prod_{i=1}^n \alpha_i^{\langle (\sum_{k=1}^m c_k u_k \otimes u_k) e_i, e_i \rangle} \\ &= \prod_{i=1}^n \alpha_i^{\langle \text{Id } e_i, e_i \rangle} = \prod_{i=1}^n \alpha_i = \det A, \end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Πρόταση 12.4.6. Αν τα διανύσματα u_k για $k = 1, 2, \dots, m$ με $\|u_k\|_2 = 1$ ικανοποιούν την $\text{Id} = \sum_{k=1}^m c_k u_k \otimes u_k$ για κατάλληλες σταθερές $c_k \in \mathbb{R}$ τότε η σταθερά D στην ανισότητα Brascamp-Lieb ισούται με 1.

Απόδειξη: Η σταθερά D είναι η ποσότητα

$$D = \inf \left\{ \frac{\det \left(\sum_{k=1}^m c_k \lambda_k u_k \otimes u_k \right)}{\prod_{k=1}^m \lambda_k^{c_k}} : \lambda_k > 0 \right\}.$$

Αν επιλέξουμε $\lambda_k = 1$ για κάθε $k = 1, \dots, m$ θα έχουμε φανερά ότι

$$D \leq \frac{\det \left(\sum_{k=1}^m c_k u_k \otimes u_k \right)}{\prod_{k=1}^m 1^{c_k}} = \det \text{Id} = 1.$$

Για την αντίστροφη ανισότητα αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\lambda_k > 0$ ισχύει

$$\det \left(\sum_{k=1}^m c_k \lambda_k u_k \otimes u_k \right) \geq \prod_{k=1}^m \lambda_k^{c_k}.$$

Ας θέσουμε $A = \sum_{k=1}^m c_k \lambda_k u_k \otimes u_k$. Εύκολα ελέγχουμε ότι ο A είναι

συμμετρικός και θετικά ορισμένος συνεπώς είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος, ως θετικά ορισμένος, έχει τετραγωνική ρίζα, την οποία θα συμβολίσουμε με $A^{-1/2}$. Ολοκληρώνουμε την απόδειξη δείχνοντας ότι $\det A \geq \prod_{k=1}^m \lambda_k^{c_k}$:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{n} \operatorname{tr}(A^{-1}A) = \frac{1}{n} \operatorname{tr} \left(A^{-1} \sum_{k=1}^m c_k \lambda_k u_k \otimes u_k \right) \\ &= \frac{1}{n} \operatorname{tr} \left(\sum_{k=1}^m c_k \lambda_k u_k \otimes (A^{-1}u_k) \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m c_k \lambda_k \operatorname{tr}(u_k \otimes (A^{-1}u_k)) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m c_k \lambda_k \langle u_k, A^{-1}u_k \rangle = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m c_k \lambda_k \langle A^{-1/2}u_k, A^{-1/2}u_k \rangle \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m c_k \lambda_k \|A^{-1/2}u_k\|_2^2 = \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{n} (\lambda_k \|A^{-1/2}u_k\|_2^2) \end{aligned}$$

(χρησιμοποιούμε την ανισότητα αριθμητικού γεωμετρικού μέσου, αφού $\sum_{k=1}^m c_k/n = 1$)

$$\begin{aligned} &\geq \prod_{k=1}^m (\lambda_k \|A^{-1/2}u_k\|_2^2)^{c_k/n} \\ &= \left(\prod_{k=1}^m \lambda_k^{c_k/n} \right) \cdot \left(\prod_{k=1}^m \|A^{-1/2}u_k\|_2^{c_k} \right)^{2/n} \\ &\geq \left(\prod_{k=1}^m \lambda_k^{c_k/n} \right) \cdot (\det A^{-1/2})^{2/n}, \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Hadamard (Πρόταση 12.4.5), ολοκληρώνοντας την απόδειξη. \square

Το επόμενο θεώρημα θα μας δώσει αμέσως την αντίστροφη ισοπεριμετρική ανισότητα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 12.4.7 (K. Ball). *Ανάμεσα σε όλα τα κυρτά συμμετρικά σώματα στη θέση του John ο κύβος έχει μέγιστο όγκο. Δηλαδή αν $Q_n = [-1, 1]^n$ ο μοναδιαίος κύβος στον \mathbb{R}^n και K κεντρικά συμμετρικό κυρτό σώμα στον \mathbb{R}^n στη θέση του John τότε $\operatorname{vol}_n(K) \leq 2^n = \operatorname{vol}_n(Q_n)$.*

Απόδειξη: Έστω ότι τα u_k είναι σημεία επαφής του συνόρου του K με την Ευκλείδεια σφαίρα και $c_k \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\operatorname{Id} = \sum_{k=1}^m c_k u_k \otimes u_k$.

Από την προηγούμενη πρόταση η ανισότητα Brascamp-Lieb ισχύει με $D = 1$. Φανερά

$$K \subseteq M := \left\{ x : |\langle x, u_k \rangle| \leq 1 \quad k = 1, \dots, m \right\}.$$

Άρα εφαρμόζοντας την ανισότητα Brascamp-Lieb παίρνουμε

$$\begin{aligned} \text{vol}_n(K) &\leq \text{vol}_n(M) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{k=1}^m 1_{[-1,1]}^{c_k}(\langle x, u_k \rangle) \right) dx \\ &\leq 1 \cdot \prod_{k=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} 1_{[-1,1]}^{c_k} \right) \\ &= \prod_{k=1}^m 2^{c_k} = 2^n = \text{vol}_n(Q_n), \end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Η ισοπεριμετρική ανισότητα (δείτε Άσκηση 6.3.1) λέει ότι για κάθε κυρτό σώμα K στον \mathbb{R}^n ισχύει

$$\left(\frac{|K|}{|B_2^n|} \right)^{1/n} \leq \left(\frac{\partial K}{\partial B_2^n} \right)^{1/(n-1)},$$

(όπου υπενθυμίζουμε ότι με $|\cdot|$ συμβολίζουμε τον n -διάστατο όγκο vol_n) η οποία με απλές πράξεις συνεπάγεται ότι

$$\partial K \geq (n \cdot |B_2^n|^{1/n}) \cdot |K|^{(n-1)/n} \simeq \sqrt{n} \cdot |K|^{(n-1)/n}.$$

Η αντίστροφη ανισότητα γενικώς δεν ισχύει όπως εύκολα βλέπει κανείς θέτοντας K ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με όλες τις ακμές του μεγάλες και μία πολύ μικρή (ώστε να διατηρείται ο όγκος ίσος με 1 αλλά να μπορεί να μεγαλώσει ανεγξέλεκτα το εμβαδόν επιφανείας). Όμως, από τα προηγούμενα προκύπτει ότι θα ισχύει μια αντίστροφη ανισότητα αν το K βρίσκεται σε κατάλληλη θέση.

ΘΕΩΡΗΜΑ 12.4.8 (Αντίστροφη ισοπεριμετρική ανισότητα). *Για κάθε κυρτό κεντρικά συμμετρικό σώμα K υπάρχει θέση \tilde{K} ώστε*

$$\partial \tilde{K} \leq 2n |\tilde{K}|^{(n-1)/n},$$

και η ποσότητα $2n$ στην προηγούμενη ανισότητα είναι βέλτιστη.

Απόδειξη: Θεωρούμε ότι το K είναι στη θέση του John. Έτσι $B_2^n \subseteq K$ και από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε $|K| \leq 2^n$. Οπότε

$$\begin{aligned} \partial K &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|K + tB_2^n| - |K|}{t} \\ &\leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|K + tK| - |K|}{t} \\ &= |K| \cdot n = |K|^{(n-1)/n} |K|^{1/n} \cdot n \leq 2n \cdot |K|^{(n-1)/n}. \end{aligned}$$

Επειδή ισχύει η ισότητα όταν το K είναι ο κύβος $Q_n = [-1, 1]^n$ συμπαίρνουμε ότι η ποσότητα $2n$ είναι βέλτιστη. \square

Πορίσμα 12.4.9 (Αντίστροφη ισοπεριμετρική ανισότητα). *Από όλα τα κυρτά κεντρικά συμμετρικά σώματα K που βρίσκονται στη θέση του John και έχουν ίδιο εμβαδόν επιφανείας με τον κύβο Q_n , τον ελάχιστο όγκο τον έχει ο κύβος.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι το K είναι κεντρικά συμμετρικό και κυρτό σώμα στη θέση του John και επιπλέον ότι

$$\partial K = \partial Q_n = |Q_n| \cdot n.$$

Αφού $\partial K \leq 2n|K|^{(n-1)/n}$ έχουμε

$$|K| \geq \left(\frac{1}{2n} \partial K \right)^{\frac{n}{n-1}} = \left(\frac{1}{2n} 2^n n \right)^{\frac{n}{n-1}} = 2^n = |Q_n|,$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. \square

Παρατήρηση 12.4.10. Ανάλογο αποτέλεσμα υπάρχει και για κυρτά σώματα που δεν είναι απαραίτητα κεντρικά συμμετρικά. Εκεί η σύγκριση γίνεται με το simplex. Δεν θα ασχοληθούμε με αυτή την περίπτωση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 12.4.1 Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 12.4.1 και την Παρατήρηση 12.4.3 για να αποδείξετε ότι αν το K είναι στη θέση του John τότε για κάθε γραμμική απεικόνιση T στον \mathbb{R}^n υπάρχει σημείο επαφής y του $\text{bd}(K)$ και S^{n-1} με την ιδιότητα

$$\langle y, T(y) \rangle \geq \text{tr}(T)/n.$$

(Υπόδειξη: παρατηρήστε ότι ισχύει $\text{tr}(T) = \langle T, \text{Id} \rangle = \sum c_j \langle T, x_j \otimes x_j \rangle$ και θεωρήστε το x_j που δίνει τη μέγιστη τιμή $\langle T, x_j \otimes x_j \rangle$.)

Άσκηση 12.4.2 Αποδείξτε ότι τα ελλειψοειδή \mathcal{E}_δ που ορίστηκαν στην απόδειξη του Θεωρήματος 12.4.1 συγκλίνουν ως προς τη μετρική Hausdorff στην Ευκλείδεια μπάλα B_2^n . Αυτό μπορείτε να το κάνετε αποδεικνύοντας ότι

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \delta\|B\|}} B_2^n \subseteq \mathcal{E}_\delta \subseteq \frac{1}{\sqrt{1 - \delta\|B\|}} B_2^n,$$

για κάθε $0 < \delta < 1/\|B\|$. Για να το επιτύχετε αυτό θα πρέπει πρώτα με τη βοήθεια του φασματικού θεωρήματος για τον πίνακα T_δ να αποδείξετε ότι $\|T_\delta^{-2}\| = \|T_\delta^{-1}\|^2$ και ότι $(\text{Id} + \delta B)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-\delta)^k B^k$.

Άσκηση 12.4.3 Αποδείξτε ότι για κάθε κυρτό κεντρικά συμμετρικό σώμα K στον \mathbb{R}^n υπάρχει θέση \tilde{K} ώστε να ισχύει

$$\left(\frac{\partial \tilde{K}}{\partial Q_n} \right)^{1/(n-1)} \leq \left(\frac{|\tilde{K}|}{|Q_n|} \right)^{1/n}.$$

Συγκρίνετε με την Άσκηση 6.3.1.

13.1 ΥΠΑΡΞΗ ΤΗΣ ΘΕΣΗΣ

Θεώρημα 13.1.1. Για κάθε κυρτό σώμα K στον \mathbb{R}^n υπάρχει θέση ελαχίστου μέσου πλάτους. Δηλαδή υπάρχει $T_0 \in \text{SL}(n)$ ώστε το $T_0(K)$ να έχει ελάχιστο πλάτος:

$$w(T_0(K)) = \inf\{w(T(K)) : T \in \text{SL}(n)\}.$$

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι για κατάλληλο $a > 0$ ισχύει $aB_2^n \subseteq K \subseteq B_2^n$ πολλαπλασιάζοντας με κατάλληλο συντελεστή το K και χρησιμοποιώντας το ότι για κάθε $\lambda > 0$ ισχύει $w(\lambda K) = \lambda w(K)$. Θέτουμε $w_0 = \inf\{w(T(K)) : T \in \text{SL}(n)\}$. Έστω ότι η $(T_m)_{m \in \mathbb{N}}$ ακολουθία γραμμικών απεικονίσεων στο $\text{SL}(n)$ ώστε $\lim_{m \rightarrow \infty} w(T_m(K)) = w_0$. Θα δείξουμε με απαγωγή στο άτοπο ότι η $(T_m)_{m \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη στον $M_{n \times n}$ με την νόρμα $\|\cdot\|$. Πράγματι, αν δεν είναι φραγμένη τότε υπάρχει ακολουθία $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ στη σφαίρα \mathbb{S}^{n-1} ώστε $\|T_m u_m\|_2 \rightarrow \infty$ για $m \rightarrow \infty$. Έτσι το ελλειψοειδές $\mathcal{E}_m := T_m(B_2^n)$ με μήκη ημιαξόνων $a_{1,m}, \dots, a_{n,m} > 0$ έχει τουλάχιστον ένα ημιάξονα μεγαλύτερο του $\|T_m u_m\|_2$, έστω τον $a_{j_m,m}$. Δηλαδή $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{j_m,m} = \infty$. Από την Άσκηση 3.3.3 ισχύει

$$\begin{aligned} w(T_m(B_2^n)) &= w(\mathcal{E}_m) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_{\mathcal{E}_m}(u) du = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\sum_{j=1}^n a_{j,m}^2 u_j^2 \right)^{1/2} du \\ &\geq a_{j_m,m} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |u_{j_m}| du = a_{j_m,m} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |u_1| du \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

όπου u_j οι συντεταγμένες του u ως προς ορθοκανονική βάση του \mathbb{R}^n στη διεύθυνση των κύριων αξόνων του ελλειψοειδούς \mathcal{E}_m . Αλλά από την άλλη μεριά η ακολουθία $w(T_m(B_2^n))$ είναι φραγμένη, αφού

$$w(T_m(B_2^n)) \leq a^{-1} w(T_m(K)) \rightarrow a^{-1} w_0,$$

καταλήγοντας σε άτοπο.

Άρα η $(T_m)_{m \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, και από την Πρόταση 8.2.4 και το

Πόρισμα 8.2.5 έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Ας συμβολίσουμε πάλι με $(T_m)_{m \in \mathbb{N}}$ αυτή την υπακολουθία και έστω ότι συγκλίνει στο T_0 . Δηλαδή $\|T_m - T_0\| \rightarrow 0$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $u \in \mathbb{S}^{n-1}$

(13.1)

$$\begin{aligned} |h_{T_m K}(u) - h_{T_0 K}(u)| &= |h_K(T_m^t u) - h_K(T_0^t u)| \\ (13.2) \quad &\leq h_K((T_m^t - T_0^t)(u)) = \sup_{y \in K} \langle (T_m^t - T_0^t)(u), y \rangle \\ &\leq \sup_{y \in B_2^n} \langle u, (T_m - T_0)(y) \rangle \\ &\leq \sup_{y \in B_2^n} \|u\|_2 \|T_m - T_0\| \|y\|_2 \leq \|T_m - T_0\|, \end{aligned}$$

όπου στην (13.1) χρησιμοποιήσαμε την Άσκηση 3.3.2 και στην (13.2) χρησιμοποιήσαμε την κάτω τριγωνική ανισότητα, αφού κάθε συνάρτηση στήριξης είναι νόρμα (του πολιτικού σώματος) από την Πρόταση 3.4.8. Συνεπώς η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη πάνω στο \mathbb{S}^{n-1} οπότε

$$w(T_m(K)) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_{T_m(K)}(u) du \rightarrow \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_{T_0(K)}(u) du = w(T_0(K)),$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

13.2 ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΘΕΣΗΣ

Στη συνέχεια θέλουμε να αποδείξουμε ότι η θέση του ελαχίστου μέσου πλάτους είναι στην ουσία μοναδική. Για αυτό θα χρειαστούμε δύο λήμματα.

Λήμμα 13.2.1. *Θεωρούμε ένα γνήσια κυρτό σώμα K του οποίου η συνάρτηση στήριξης h_K είναι διαφορίσιμη. Έστω ότι το x είναι το μοναδικό σημείο τομής του επιπέδου στήριξης του K στη διεύθυνση $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ με το K . Τότε $\nabla h_K(u) = x$.*

Απόδειξη: Αφού η h_K είναι διαφορίσιμη συμπεραίνουμε ότι για κάθε $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ και για κάθε $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ υπάρχει η κατευθυνόμενη παράγωγος $\partial_v h_K(u)$ στη διεύθυνση v . Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\begin{aligned} \partial_{-v} h_K(u) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{h_K(u + \lambda(-v)) - h_K(u)}{\lambda} \\ (13.3) \quad &= - \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{h_K(u + (-\lambda)v) - h_K(u)}{-\lambda} = -\partial_v h_K(u). \end{aligned}$$

Επιπλέον, από τον ορισμό της συνάρτησης στήριξης, το ότι $h_K(u) = \langle x, u \rangle$ και $x \in K$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
 \partial_v h_K(u) &= \limsup_{\lambda \rightarrow 0} \frac{h_K(u + \lambda v) - h_K(u)}{\lambda} \\
 &= \limsup_{\lambda \rightarrow 0} \frac{h_K(u + \lambda v) - \langle x, u \rangle}{\lambda} \\
 (13.4) \quad &\geq \limsup_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\langle x, u + \lambda v \rangle - \langle x, u \rangle}{\lambda} = \langle x, v \rangle.
 \end{aligned}$$

Άρα αν $e_i, i = 1, \dots, n$ τα διανύσματα της συνήθους βάσης του \mathbb{R}^n θα έχουμε $\partial_{e_i} h_K(u) \geq \langle x, e_i \rangle$ για κάθε $i = 1, \dots, n$. Αλλά από την (13.3) και την (13.4) συνεπάγεται ότι

$$\partial_{e_i} h_K(u) = -\partial_{-e_i} h_K(u) \leq -\langle x, -e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle.$$

Άρα $\partial_{e_i} h_K(u) = \langle x, e_i \rangle$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, οπότε $\nabla h_K(u) = x$. \square

Λήμμα 13.2.2. Ένα κυρτό σώμα K στον \mathbb{R}^n με διαφορίσιμη συνάρτηση στήριξης h_K έχει ελάχιστο μέσο πλάτος αν και μόνο αν

$$(13.5) \quad \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \langle \nabla h_K(u), Tu \rangle du = \frac{\text{tr}(T)}{n} w(K)$$

για κάθε γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Απόδειξη: Αν το K έχει ελάχιστο μέσο πλάτος, τότε για $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό, η απεικόνιση $S = (\text{Id} + \epsilon T)^t / (\det(\text{Id} + \epsilon T))^{1/n}$ είναι καλά ορισμένη και έχει ορίζουσα 1. Συνεπώς $w(S(K)) \geq w(K)$, οπότε

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_{S(K)}(u) du \geq \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_K(u) du.$$

Απλές πράξεις οδηγούν στην

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_K(u + \epsilon Tu) du \geq \det((\text{Id} + \epsilon T))^{1/n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_K(u) du.$$

Αντικαθιστώντας τις $h_K(u + \epsilon Tu)$ και $(\det(\text{Id} + \epsilon T))^{1/n}$ με τα Taylor ανα-

πτύγματά τους πρώτης τάξης οδηγούμαστε στην

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} (h_K(u) + \epsilon \langle \nabla h_K(u), Tu \rangle + o(\epsilon)) du \geq \left(1 + \epsilon \frac{\text{tr}(T)}{n} + o(\epsilon) \right) w(K),$$

όπου γράψαμε με $o(\epsilon)$ τα υπόλοιπα του αναπτύγματος Taylor, τα οποία ικανοποιούν την $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} o(\epsilon)/\epsilon = 0$. Αφήνοντας το ϵ να πάει στο 0 από δεξιά οδηγούμαστε στην

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \langle \nabla h_K(u), Tu \rangle du \geq \frac{\text{tr}(T)}{n} w(K).$$

Αλλά η τελευταία ισχύει για κάθε T , οπότε αν την ξαναγράψουμε για τον $-T$ στη θέση του T παίρνουμε την αντίστροφη ανισότητα, δηλαδή το ζητούμενο.

Αντίστροφα, έστω ότι ισχύει η (13.5) και ο T έχει ορίζουσα 1. Από την Άσκηση 8.1.3 υπάρχουν ορθογώνιοι πίνακες U και V και διαγώνιος πίνακας $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ με $\lambda_j > 0$ για κάθε $j = 1, \dots, n$, ώστε να ισχύει $T = UDV$. Οπότε $(UV)^t T = V^t DV$. Επειδή ο πίνακας $(UV)^t$ είναι ορθογώνιος ισχύει $w((UV)^t T(K)) = w(T(K))$, συνεπώς αρκεί να αποδείξουμε ότι το σώμα $S(K)$ για $S := (UV)^t T = V^t DV$ ικανοποιεί την $w(S(K)) \geq w(K)$. Αλλά ο πίνακας S είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος οπότε από το Πόρισμα 10.2.2 ισχύει η ανισότητα $\text{tr}(S)/n \geq \det(S)^{1/n} = 1$. Από αυτό, και το ότι $\nabla h_K(u) \in K$ (Λήμμα 13.2.1) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} w(S(K)) &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_{S(K)}(u) du = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_K(S^t u) du \\ (13.6) \quad &\geq \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \langle \nabla h_K(u), S^t u \rangle du = \frac{\text{tr}(S)}{n} w(K) \geq w(K). \end{aligned}$$

Δηλαδή το K βρίσκεται στη θέση ελάχιστου μέσου πλάτους. \square

Τώρα είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε τη μοναδικότητα της θέσης ελάχιστου μέσου πλάτους:

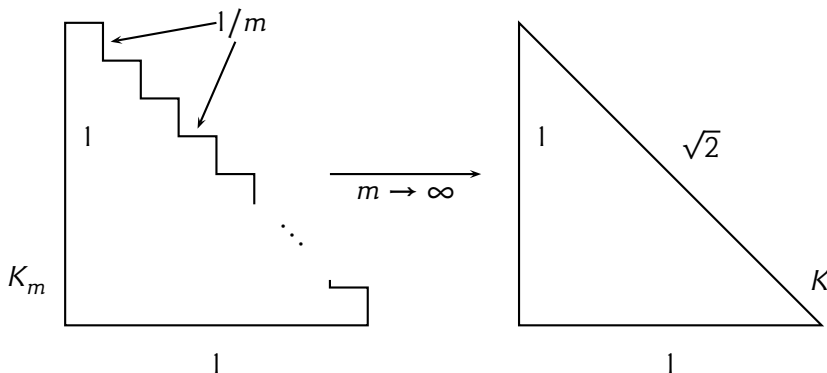
Πρόταση 13.2.3. *Αν το κυρτό σώμα K βρίσκεται στη θέση ελάχιστου μέσου πλάτος και το ίδιο συμβαίνει και για το $T(K)$ όπου $T \in \text{SL}(n)$, τότε ο T είναι ορθογώνιος.*

Απόδειξη: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η h_K είναι διαφορίσιμη συνάρτηση, αλλιώς προσεγγίζουμε το K με μια ακολουθία σωμάτων που έχουν διαφορίσιμες συναρτήσεις στήριξης—παραλείπουμε τις λεπτομέρειες.

Αν $w(T(K)) = w(K)$ τότε $w(S(K)) = w(K)$, όπου S ο πίνακας που προκύπτει από τον T όπως στην απόδειξη του Λήμματος 13.2.2. Από τη σχέση (13.6) θα ισχύει $\text{tr}(S)/n = (\det S)^{1/n}$. Οπότε—σύμφωνα με το Πόρισμα 10.2.2—ο S είναι ορθογώνιος, άρα και ο T . \square

14.1 ΥΠΑΡΞΗ ΤΗΣ ΘΕΣΗΣ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αποδείξουμε ότι κάθε κυρτό σώμα K στον \mathbb{R}^n έχει μια, στην ουσία μοναδική, θέση ελάχιστου εμβαδού επιφανείας. Η απόδειξη χρειάζεται το γεγονός ότι το εμβαδό επιφανείας ως συνάρτηση από τα κυρτά σώματα στο \mathbb{R}^n είναι συνεχής. Η κυρτότητα δεν είναι απαραίτητη μόνο για την ύπαρξη του εμβαδού επιφανείας, διότι εύκολα μπορεί να δει κανείς ότι η συνάρτηση αυτή δεν είναι συνεχής σε μη κυρτά σύνολα, όπως βλέπουμε στο Σχήμα 14.1. Η συνέχεια του εμβαδού



ΣΧΗΜΑ 14.1: Η περιφέρεια του K_m είναι 4 για κάθε $m \in \mathbb{N}$, τα K_m συγκλίνουν με τη μετρική Hausdorff στο K το οποίο έχει περίμετρο $2 + \sqrt{2} \neq 4$.

επιφανείας στα κυρτά σώματα έχει αρκετή δουλειά για να αποδειχθεί και την αποδεικνύουμε στην Ενότητα 14.2. Για τα επόμενα υποθέτουμε ότι η συνέχεια είναι δεδομένη.

Θεώρημα 14.1.1. Για κάθε κυρτό σώμα K στον \mathbb{R}^n υπάρχει θέση ελάχιστου εμβαδού επιφανείας. Δηλαδή υπάρχει $T_0 \in SL(n)$ ώστε το $T_0(K)$ να έχει το ελάχιστο εμβαδό επιφανείας:

$$\delta(T_0(K)) = \inf\{\delta(T(K)) : T \in SL(n)\}.$$

Απόδειξη: Χρησιμοποιώντας το ότι $\partial(\lambda K) = \lambda^{n-1}\partial(K)$ μπορούμε να υποθέσουμε, πολλαπλασιάζοντας με κατάλληλο $\lambda > 0$ ότι $K \subseteq B_2^n$. Θέτουμε

$$\partial_0 = \inf\{\partial(T(K)) : T \in \text{SL}(n)\}$$

και θεωρούμε ακολουθία $T_m \in \text{SL}(n)$ ώστε $\lim_{m \rightarrow \infty} \partial(T_m(K)) = \partial_0$. Αρκεί να δείξουμε ότι η T_m έχει συγκλίνουσα υπακολουθία· διότι αν αυτή η υπακολουθία συγκλίνει, έστω στον T_0 , τότε από τη συνέχεια του εμβαδού επιφανείας θα πάρουμε ότι $\partial_0 = \partial(T_0(K))$ ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

Από την Άσκηση 8.1.3 υπάρχουν ορθογώνιοι πίνακες U_m, V_m και διαγώνιος πίνακας $D_m = \text{diag}(\lambda_{m1}, \dots, \lambda_{mn})$ με $\lambda_{mj} > 0$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$ ώστε $T_m = U_m D_m V_m$. Επιπλέον εύκολα ελέγχουμε με τον ορισμό, ότι το εμβαδό επιφανείας είναι ανεξάρτητο από ορθογώνιους μετασχηματισμούς, δηλαδή

$$(14.1) \quad \partial(T_m(K)) = \partial(U_m D_m V_m(K)) = \partial(D_m V_m(K)) = \partial(D_m(L_m))$$

όπου θέσαμε $L_m = V_m(K)$.

Για να αποδείξουμε ότι η T_m έχει συγκλίνουσα υπακολουθία αρκεί να δείξουμε ότι είναι φραγμένη. Για αυτό αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία των D_m είναι φραγμένη, διότι οι ακολουθίες U_m και V_m είναι φραγμένες ως ακολουθίες ορθογώνιων πινάκων (Παράδειγμα 8.2.1, Παρατήρηση 8.2.3 και Πρόρισμα 8.2.5). Ισοδύναμα αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία D_m^{-1} είναι φραγμένη (Άσκηση 8.2.3).

Αν η $D_m^{-1} = \text{diag}(1/\lambda_{m1}, \dots, 1/\lambda_{mn})$ δεν είναι φραγμένη, εύκολα ελέγχουμε ότι υπάρχουν δείκτες j_m ώστε $0 < \lambda_{mj_m} \rightarrow 0$. Αλλά τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \partial(D_m(L_m)) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|D_m(L_m) + tB_2^n| - |D_m(L_m)|}{t} \\ &\geq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|D_m(L_m) + tL_m| - |D_m(L_m)|}{t} \\ &\geq |L_m| \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\det(D_m + t \text{Id}) - \det(D_m)}{t} \\ &\geq |K| \det(D_m) \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\det(\text{Id} + tD_m^{-1}) - 1}{t} \\ &\geq |K| \cdot 1 \cdot \text{tr}(D_m^{-1}) \geq |K|/\lambda_{mj_m} \rightarrow \infty, \text{ (Άσκηση 8.1.2)} \end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού από την (14.1) ισχύει

$$\partial(D_m(L_m)) = \partial(T_m(K)) \rightarrow \partial_0,$$

καθώς $m \rightarrow \infty$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

Για να αποδείξουμε τη μοναδικότητα της θέσης (εκτός από ορθογώνιους μετασχηματισμούς) χρειαζόμαστε ένα τύπο για το πώς μεταβάλεται το εμβαδό επιφανείας αν εφαρμοστεί ένας μετασχηματισμός $T \in \text{SL}(n)$. Η απόδειξη αυτού του τύπου απαιτεί πολύ ισχυρά μετροθεωρητικά εργαλεία και για αυτό θα την παραλείψουμε. Οι σχετικές λεπτομέρειες υπάρχουν στις Ενότητες 6 και 10.1 του [Gru2007]. Όμως επειδή δεν υπάρχει αυτούσιος ο τύπος που χρειαζόμαστε στο παραπάνω, θα δείξουμε πώς προκύπτει παραπέμποντας σε διάφορες προτάσεις στο παραπάνω βιβλίο.

Πρώτα ορίζουμε την απεικόνιση Gauss N_K από το $\text{bd}(K)$ στα υποσύνολα του \mathbb{S}^{n-1} όπου απεικονίζει κάθε σημείο $x \in \text{bd}(K)$ στο σύνολο

$$\{u \in \mathbb{S}^{n-1} : \text{το } x + u^\perp \text{ είναι επίπεδο στήριξης του } K \text{ στο } x\}.$$

Η απεικόνιση N_K αντιστρέφει υποσύνολα Borel της \mathbb{S}^{n-1} σε υποσύνολα Borel του $\text{bd}(K)$ ([Gru2007] Πρόταση 10.1).

Στη συνέχεια, για κάθε κυρτό σώμα K ορίζουμε ένα μέτρο σ_K πάνω στην Ευκλείδεια σφαίρα \mathbb{S}^{n-1} με τη βοήθεια της αντίστροφης εικόνας μέσω της απεικόνισης του Gauss: για κάθε Borel υποσύνολο A της \mathbb{S}^{n-1} θέτουμε

$$\sigma_K(A) = \mu_{n-1}(N_K^{-1}(A)),$$

όπου το μ_{n-1} είναι το διάστασης $n - 1$ μέτρο Hausdorff πάνω στο $\text{bd}(K)$ (διαισθητικά το εμβαδόν επιφανείας του $N_K^{-1}(A)$ ως υποσύνολο του $\text{bd}(K)$). Φανερά $\sigma_K(\mathbb{S}^{n-1}) = \mu_{n-1}(K)$, το οποίο μπορεί να δειχθεί ότι ταυτίζεται με το $\partial(K)$.

Λήμμα 14.1.2. Για κάθε $T \in \text{SL}(n)$ και για κάθε κυρτό σώμα K ισχύει

$$(14.2) \quad \partial(T(K)) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \|(T^{-1})^t(u)\|_2 d\sigma_K(u).$$

«Απόδειξη:» Όλες οι αναφορές σε αυτή την απόδειξη είναι στο [Gru2007].

Από το Πρόσχημα 10.1 η ποσότητα $nV(L, K, \dots, K)$ ισούται με

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_L(u) d\sigma_K(u).$$

Η ποσότητα $nV(L, K, \dots, K)$ είναι ίση με την $nV(K, \dots, K, L)$ (Θεώρημα 6.5) η οποία ισούται με το εμβαδόν επιφανείας του K όταν $L = B_2^n$ (ορισμός του εμβαδού επιφανείας και Θεώρημα 6.6). Τέλος επειδή για κάθε $T \in \text{SL}(n)$ ισχύει $V(T(K_1), \dots, T(K_n)) = V(K_1, \dots, K_n)$ (Πρόταση 6.5 (ii) και η επόμενη Παρατήρηση), θα έχουμε

$$\begin{aligned} \delta(T(K)) &= nV(T(K), \dots, T(K), B_2^n) = nV(K, \dots, K, T^{-1}(B_2^n)) \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_{T^{-1}(B_2^n)}(u) d\sigma_K(u) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_{B_2^n}((T^{-1})^t(u)) d\sigma_K(u) \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \|(T^{-1})^t(u)\|_2 d\sigma_K(u). \quad \square \end{aligned}$$

Για την απόδειξη της επόμενης πρότασης ακολουθούμε το [AGM2015].

ΠΡΟΤΑΣΗ 14.1.3 (Petty). Ένα κυρτό σώμα K στον \mathbb{R}^n έχει ελάχιστο εμβαδόν επιφανείας αν και μόνο αν ισχύει

$$(14.3) \quad \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \langle u, \theta \rangle^2 d\sigma_K(u) = \frac{\delta(K)}{n},$$

για κάθε $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε πρώτα ότι το K έχει ελάχιστο εμβαδόν επιφανείας. Για κάθε γραμμική απεικόνιση T στο \mathbb{R}^n εφαρμόζουμε το Λήμμα 14.1.2 για τον $(A^{-1})^t$ όπου $A = (\text{Id} + rT)/(\det(\text{Id} + rT))^{1/n}$, ο οποίος για r σε μια περιοχή του μηδενός είναι καλά ορισμένος και ανήκει το $\text{SL}(n)$. Έτσι από την (14.2), και επειδή $\delta((A^{-1})^t(K)) \geq \delta(K)$ παίρνουμε ότι

$$(14.4) \quad \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \|(\text{Id} + rT)(u)\|_2 d\sigma_K(u) \geq (\det(\text{Id} + rT))^{1/n} \delta(K).$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η συνάρτηση

$$\varphi(r) = \|(\text{Id} + rT)(u)\|_2 = \sqrt{1 + 2r\langle u, T(u) \rangle + r^2\langle T(u), T(u) \rangle}$$

είναι παραγωγίσιμη στο $r = 0$ με παράγωγο $\langle u, T(u) \rangle$. Έτσι από το Θεώρημα Taylor υπάρχει συνάρτηση φ_1 με $\lim_{r \rightarrow 0} \varphi_1(r) = 0$ ώστε

$$(14.5) \quad \varphi(r) = 1 + r\langle u, T(u) \rangle + r\varphi_1(r).$$

Ομοίως, η συνάρτηση $\psi(r) = (\det(\text{Id} + rT))^{1/n}$ είναι—σύμφωνα με την Άσκηση 8.1.2—παραγωγίσιμη στο $r = 0$ με παράγωγο $\text{tr}(T)/n$. Άρα και

πάλι από το Θεώρημα Taylor υπάρχει συνάρτηση ψ_1 με $\lim_{r \rightarrow 0} \psi_1(r) = 0$ ώστε

$$(14.6) \quad \psi(r) = 1 + r \frac{\text{tr}(T)}{n} + r\psi_1(r).$$

Αντικαθιστώντας τις (14.5) και (14.6) στην (14.4) και παίρνοντας όρια μια φορά για $r \rightarrow 0^+$ και μια φορά για $r \rightarrow 0^-$ προκύπτουν οι

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \langle u, T(u) \rangle d\sigma_K(u) \geq \frac{\text{tr}(T)}{n} \delta(K)$$

και

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \langle u, T(u) \rangle d\sigma_K(u) \leq \frac{\text{tr}(T)}{n} \delta(K)$$

αντίστοιχα, δηλαδή

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \langle u, T(u) \rangle d\sigma_K(u) = \frac{\text{tr}(T)}{n} \delta(K),$$

και το αποτέλεσμα έπεται για $T(u) = \langle u, \theta \rangle \theta$ με $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Αντιστρόφως, αν ισχύει η (14.3) και $T \in \text{SL}(n)$ τότε επειδή από την ανισότητα Cauchy-Schwartz ισχύει $\|(T^{-1})^t(u)\|_2 \geq \langle (T^{-1})^t(u), u \rangle = \langle u, T^{-1}(u) \rangle$ για κάθε $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, θα έχουμε

$$(14.7) \quad \begin{aligned} \delta(T(K)) &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \|(T^{-1})^t(u)\|_2 d\sigma_K(u) \\ &\geq \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \langle u, T^{-1}(u) \rangle d\sigma_K(u) = \frac{\text{tr}(T^{-1})}{n} \delta(K) \\ &\geq (\det T^{-1})^{1/n} \delta(K) = \delta(K), \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου. Άρα το K βρίσκεται σε θέση ελάχιστης επιφάνειας. \square

Θεώρημα 14.1.4. *Η θέση ελάχιστης επιφάνειας είναι μοναδική εκτός από ορθογώνιους μετασχηματισμούς.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι το K βρίσκεται σε θέση ελάχιστης επιφάνειας και το ίδιο συμβαίνει και με το $T(K)$ για κάποιον $T \in \text{SL}(n)$, οπότε $\delta(T(K)) = \delta(K)$. Εφαρμόζοντας έναν ορθογώνιο μετασχηματισμό στο

$T(K)$ και στο K μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο T είναι θετικά ορισμένος (Άσκηση 8.1.3). Έτσι, η (14.7) δίνει ότι $\text{tr}(T^{-1})/n = \det(T^{-1})^{1/n}$ και από το Πρόγραμμα 10.2.2 ο T^{-1} , οπότε και ο T , είναι ορθογώνιος. \square

14.2* Η ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

Πρόταση 14.2.1. Για κάθε κυρτό σώμα K στον \mathbb{R}^n υπάρχει ακολουθία πολυτόπων P_m η οποία συγκλίνει στο σώμα K ως προς τη μετρική Hausdorff.

Απόδειξη: Θέτουμε P_m να είναι οι κυρτές θήκες των κορυφών των πολυπαραλληλεπιπέδων της Άσκησης 5.2.1. \square

Πρόταση 14.2.2. Έστω ότι τα P_1 και P_2 είναι πολύτοπα. Τότε για κάθε $t, s > 0$ το $P = tP_1 + sP_2$ είναι πολύτοπο. Επιπλέον υπάρχει πεπερασμένο σύνολο $U \subseteq \mathbb{S}^{n-1}$ ώστε για κάθε $t, s \geq 0$ για τα οποία το $P = tP_1 + sP_2$ είναι κυρτό σώμα, τα εξωτερικά μοναδιαία κάθετα διανύσματα των εδρών του P ανήκουν στο U .

Απόδειξη: Αν το $z \in P$ είναι ακραίο σημείο και $z = tz_1 + sz_2$ όπου $z_1 \in P_1$ και $z_2 \in P_2$ τότε τα z_1 και z_2 είναι ακραία σημεία των P_1 και P_2 αντίστοιχα, διότι αν για παράδειγμα το z_1 είναι γνήσιος κυρτός συνδυασμός δύο σημείων του P_1 τότε εύκολα βλέπουμε ότι το z είναι γνήσιος κυρτός συνδυασμός δύο σημείων του P οπότε δεν είναι ακραίο σημείο. Επειδή καθένα από τα P_1 και P_2 έχουν πεπερασμένος πλήθος ακραίων σημείων (τις κορυφές τους) συμπαιρεύουμε ότι το ίδιο ισχύει και για το P συνεπώς το P είναι πολύτοπο.

Για το δεύτερο σκέλος αποδεικνύουμε πρώτα τον ισχυρισμό:

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ: Για κάθε $u \in \mathbb{S}^{n-1}$

$$P \cap H_{P,u} = t(P_1 \cap H_{P_1,u}) + s(P_2 \cap H_{P_2,u}).$$

[Πράγματι, αν $z \in P \cap H_{P,u}$ υπάρχουν $z_1 \in P_1$ και $z_2 \in P_2$ ώστε $z = tz_1 + sz_2$. Θα δείξουμε ότι $z_i \in P_i \cap H_{P_i,u}$ για $i = 1, 2$. Αν αυτό δεν συμβαίνει για παράδειγμα για το z_1 τότε $\langle z, u \rangle < h_{P_1}(u)$. Αλλά τότε

$$h_P(u) = \langle z, u \rangle = \langle tz_1 + sz_2, u \rangle < th_{P_1}(u) + sh_{P_2}(u) = h_{tP_1 + sP_2}(u) = h_P(u),$$

το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς

$$P \cap H_{P,u} \subseteq t(P_1 \cap H_{P_1,u}) + s(P_2 \cap H_{P_2,u}).$$

Αντιστρόφως, αν $z_1 \in P_1 \cap H_{P_1,u}$ και $z_2 \in P_2 \cap H_{P_2,u}$ έχουμε

$$\langle tz_1 + sz_2, u \rangle = t\langle z_1, u \rangle + s\langle z_2, u \rangle = th_{P_1}(u) + sh_{P_2}(u) = h_{tP_1 + sP_2}(u) = h_P(u),$$

οπότε $z = tz_1 + sz_2 \in H_{P,u}$.]

Από τον παραπάνω ισχυρισμό αν τα F_1 και F_2 είναι έδρες των P_1 και P_2 αντίστοιχα, αν υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι το μηδέν ανήκει στα σχετικά εσωτερικά των F_1 και F_2 και το $tF_1 + sF_2$ είναι έδρα του P διάστασης $n - 1$, τότε το $F_1 + F_2$ είναι διάστασης $n - 1$, αφού έχει την ίδια γραμμική θήκη με το $tF_1 + sF_2$. Άρα ανεξάρτητα των t και $s > 0$ το P έχει το πολύ τόσες έδρες διάστασης $n - 1$ όσοι το πλήθος των ζευγών εδρών του P_1 και P_2 , δηλαδή πεπερασμένο πλήθος. \square

Από το γεγονός ότι η σχετική διάσταση του $F_1 + F_2$ είναι πάντα μεγαλύτερη ή ίση με τη σχετική διάσταση του F_i , όπου F_i έδρα του P_i ($i = 1, 2$) άμεσα προκύπτει το ακόλουθο:

Πόρισμα 14.2.3. *Αν η F_1 είναι έδρα (όψη διάστασης $n - 1$) ενός πολυτόπου P_1 και η F_2 είναι όψη ενός πολυτόπου P_2 με $F_1 = P_1 \cap H_{P_1}(u)$ και $F_2 = P_2 \cap H_{P_2}(u)$ για κατάλληλο $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ τότε το $F_1 + F_2$ είναι έδρα (όψη διάστασης $n - 1$) του $P_1 + P_2$.*

Πρόταση 14.2.4. *Έστω ότι τα P_1 και P_2 είναι πολύτοπα στον \mathbb{R}^n με το P_2 να έχει μη κενό εσωτερικό. Τότε για κάθε $t > 0$ ο όγκος $\text{vol}_n(P_1 + tP_2)$ είναι πολυώνυμο ως προς t βαθμού n .*

Απόδειξη: Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε πλήρη επαγωγή στο n . Για $n = 1$ αν $P_1 = [a_1, b_1]$ και $P_2 = [a_2, b_2]$ τότε $P_1 + tP_2 = [a_1 + ta_2, b_1 + tb_2]$ οπότε $\text{vol}_1(P_1 + tP_2) = (b_1 - a_1) + t(b_2 - a_2)$ δηλαδή πολυώνυμο του t πρώτου βαθμού. Έστω ότι το ζητούμενο ισχύει για πολύτοπα στον \mathbb{R}^k για κάθε $k \leq n - 1$, και $P = P_1 + tP_2$ για πολύτοπα P_1, P_2 στον \mathbb{R}^n . Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 14.2.2 έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \text{vol}_n(P) &= \text{vol}_n(P_1 + tP_2) = \frac{1}{n} \sum_{u \in U} h_P(u) \text{vol}_{n-1}(P \cap H_{P,u}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{u \in U} h_{P_1 + tP_2}(u) \text{vol}_{n-1}(F_1 + tF_2) \end{aligned}$$

όπου $F_i = P_i \cap H_{P_i,u}$, για $i = 1, 2$

$$= \frac{1}{n} \sum_{u \in U} (h_{P_1}(u) + th_{P_2}(u)) \phi(u, t)$$

όπου τα $\phi(u, t)$ είναι πολυώνυμα βαθμού το πολύ $n - 1$ ως προς t από την υπόθεση της πλήρους επαγωγής. Έτσι το $\text{vol}_n(P)$ είναι πολυώνυμο του t το πολύ βαθμού n . Αλλά αφού υποθέσαμε ότι το P_2 δεν έχει κενό εσωτερικό, αν υποθέσουμε ότι το $\text{vol}_n(P_1 + tP_2)$ έχει βαθμό μικρότερο ή ίσο το $n - 1$ τότε από τη συνέχεια του όγκου έχουμε

$$\begin{aligned} 0 < \text{vol}_n(tP_2) &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \text{vol}_n(sP_1 + tP_2) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} s^n \text{vol}_n\left(P_1 + \frac{t}{s}P_2\right) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s^n \sum_{j=0}^{n-1} a_j \left(\frac{t}{s}\right)^j = 0 \end{aligned}$$

(όπου a_j κατάλληλοι συντελεστές) το οποίο είναι άτοπο. \square

Λήμμα 14.2.5. Έστω ότι τα $p_m(t)$ είναι ακολουθία πολυωνύμων βαθμού n που συγκλίνει στην $f(t)$ για κάθε $t \geq 0$. Τότε και η f για $t \geq 0$ είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ n .

Απόδειξη: Από τη μοναδικότητα του ορίου, αρκεί να αποδείξουμε ότι η ακολουθία

$$p_m(t) = a_{0m} + a_{1m}t + a_{2m}t^2 + \dots + a_{nm}t^n$$

συγκλίνει σε πολυώνυμο για $t \geq 0$. Για αυτό όμως αρκεί να αποδείξουμε ότι οι συντελεστές a_{jm} συγκλίνουν σε κάποιον αριθμό a_j για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$ καθώς $m \rightarrow \infty$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} a_{0m} &= p_m(0) \\ a_{0m} + a_{1m} + a_{2m} + \dots + a_{nm} &= p_m(1) \\ a_{0m} + 2a_{1m} + 2^2a_{2m} + \dots + 2^na_{nm} &= p_m(2) \\ a_{0m} + 3a_{1m} + 3^2a_{2m} + \dots + 3^na_{nm} &= p_m(3) \\ &\vdots \\ a_{0m} + na_{1m} + n^2a_{2m} + \dots + n^na_{nm} &= p_m(n). \end{aligned}$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα, από τους τύπους του Cramer κάθε συντελεστής a_{jm} είναι γραμμικός συνδυασμός των $p_m(0), p_m(1), \dots, p_m(n)$ τα οποία συγκλίνουν στα $f(0), f(1), \dots, f(n)$ αντίστοιχα, υπό την προϋπόθεση ότι η ορίζουσα του συστήματος είναι φραγμένη «μακριά» από το μηδέν καθώς $m \rightarrow \infty$. Αλλά η ορίζουσα αυτή είναι ορίζουσα

Vandermonde:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \dots & n^n \end{vmatrix}$$

η οποία είναι ανεξάρτητη του m και θετική (Άσκηση 14.2.1 για $a_k = k$ με $k = 1, \dots, n$), ολοκληρώνοντας την απόδειξη. \square

Πρόταση 14.2.6. Για κάθε K κυρτό σώμα στον \mathbb{R}^n και για κάθε $t > 0$ ο όγκος $\text{vol}_n(K + tB_2^n)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n .

Απόδειξη: Προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 14.2.4 το Λήμμα 14.2.5 προσεγγίζοντας τα K και B_2^n με πολύτοπα σύμφωνα με την Πρόταση 14.2.1. \square

Θεώρημα 14.2.7. Το εμβαδό επιφάνειας είναι συνεχής συνάρτηση στα κυρτά σώματα.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι τα K_m είναι κυρτά σώματα που συγκλίνουν με την μετρική Hausdorff στο K . Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση τα $\text{vol}_n(K_m + tB_2^n)$ και $\text{vol}_n(K + tB_2^n)$ είναι πολυώνυμα του t βαθμού n . Έστω ότι

$$\text{vol}_n(K_m + tB_2^n) = a_{0m} + a_{1m}t + a_{2m}t^2 + \dots + a_{nm}t^n$$

και

$$\text{vol}_n(K + tB_2^n) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n,$$

για κατάλληλους συντελεστές a_{jm} και a_j , $j = 1, \dots, n$. Από τη συνέχεια του όγκου, η ακολουθία των πολυωνύμων $\text{vol}_n(K_m + tB_2^n)$ συγκλίνει στο πολυώνυμο $\text{vol}_n(K + tB_2^n)$ συνεπώς $a_{jm} \rightarrow a_j$ για κάθε $j = 1, \dots, n$ καθώς $m \rightarrow \infty$. Αλλά επειδή $a_{0m} = \text{vol}_n(K_m)$ και $a_0 = \text{vol}_n(K)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \partial K_m &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\text{vol}_n(K_m + tB_2^n) - \text{vol}_n(K_m)}{t} \\ &= a_{1m} \rightarrow a_1 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\text{vol}_n(K + tB_2^n) - \text{vol}_n(K)}{t} = \partial K, \end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. \square

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 14.2.1 Αποδείξτε ότι

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

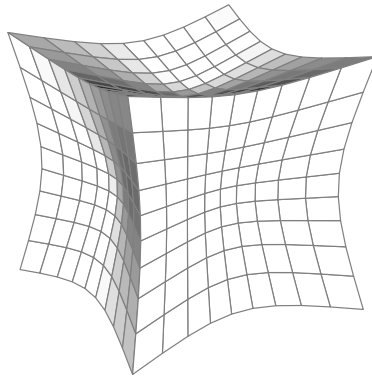
(Υπόδειξη: Παρατηρούμε ότι $D_n = F_n(a_n) \prod_{i=1}^n a_i$ όπου

$$F_n(x) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \end{vmatrix},$$

και έτσι αρκεί να δείξουμε ότι $F_n(a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$. Η απόδειξη αυτή μπορεί να γίνει επαγωγικά στο n . Για το επαγωγικό βήμα παρατηρούμε ότι το πολυώνυμο $F_n(x)$ έχει ρίζες τα a_1, \dots, a_{n-1} . Άρα από το θεώρημα παραγοντοποίησης ισχύει $F_n(x) = C \prod_{i=1}^{n-1} (x - a_i)$ για κατάλληλη σταθερά C . Όμως από την τελευταία έκφραση το C είναι ο συντελεστής του x^{n-1} , αλλά από τον ορισμό του $F_n(x)$ ο συντελεστής του x^{n-1} είναι το $F_{n-1}(a_{n-1})$. Εναλλακτικά, αν ονομάσουμε με $D_n(a_1, \dots, a_n)$ την ζητούμενη ορίζουσα, μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τη $n - 1$ στήλη με a_1 και να την αφαιρέσουμε από τη n -στη στήλη, ώστε να μηδενιστεί το στοιχείο στη θέση του a_1^n . Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε με a_1 τη $n - 2$ στήλη και την αφαιρούμε από τη $n - 1$ στήλη ώστε να μηδενιστεί το στοιχείο στη θέση του a_1^{n-1} . Συνεχίζουμε μέχρι να μηδενιστεί όλη η πρώτη γραμμή εκτός από το στοιχείο στη θέση του a_1 . Τότε βλέπουμε άμεσα ότι η ορίζουσα ισούται με $a_1 \prod_{j=2}^n (a_j - a_1) \cdot D_{n-1}(a_2, \dots, a_n)$.

Μέρος III

Το φαινόμενο της συγκέντρωσης του μέτρου



Για την παρουσίαση του φαινομένου συγκέντρωσης χρειαζόμαστε περισσότερα πράγματα από τη Θεωρία Μέτρου. Για παράδειγμα χρειαζόμαστε την γενίκευση της ταυτότητας στο Λήμμα 6.1.3 για γενικά μέτρα και μετρήσιμες συναρτήσεις:

$$(15.1) \quad \int f d\mu = \int_0^\infty \mu\{x \in X : f(x) > t\} dt.$$

15.1 ΤΟ ΜΕΤΡΟ HAAR

Για τα Κεφάλαια 19 και 20 χρειαζόμαστε επιπλέον την έννοια του μέτρου Haar. Εδώ θα δώσουμε μόνο τους απαραίτητους ορισμούς και το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας του μέτρου Haar και θα περιγράψουμε ιδιότητές του σε συγκεκριμένους μετρικούς χώρους. Ο αναγνώστης μπορεί να προχωρήσει στα Κεφάλαια 16, 18 και 17 παραλείποντας αυτή την ενότητα, και να επανέλθει εδώ πριν τη μελέτη των Κεφαλαίων 19 και 20.

Θεωρούμε ένα συμπαγή μετρικό χώρο (X, ρ) στον οποίο υπάρχει μια ισομετρική δράση από μια ομάδα G . Δηλαδή για κάθε $g \in G$ και για κάθε $x, y \in X$ ισχύει $gx, gy \in X$ και $\rho(gx, gy) = \rho(x, y)$. Παράδειγμα είναι η ευκλείδεια σφαίρα \mathbb{S}^{n-1} και ομάδα την $\mathcal{O}(n)$, ή η $\mathcal{O}(n)$ με ομάδα τον εαυτό της και μετρική που θα ορίσουμε παρακάτω. Σε αυτό το πλαίσιο μπορεί να αποδειχθεί το ακόλουθο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 15.1.1 (Haar). *Υπάρχει ένα μοναδικό κανονικό μέτρο πιθανότητας μ στα Borel υποσύνολα του X που είναι αναλλοίωτο στη δράση της G , δηλαδή για κάθε Borel $A \subseteq X$ και για κάθε $g \in G$ ισχύει $\mu(gA) = \mu(A)$ και $\int_X f(gx) d\mu(x) = \int_X f(x) d\mu(x)$.*

Το θεώρημα αυτό αποδεικνύεται σε προχωρημένα μαθήματα Παραγματικής Ανάλυσης (δείτε για παράδειγμα στο [Fol1984]).

15.1.1 Μέτρο και μετρική στην \mathbb{S}^{n-1}

Στην σφαίρα \mathbb{S}^{n-1} ορίζουμε τη γεωδαισιακή μετρική ως εξής. Για δύο σημεία $x, y \in \mathbb{S}^{n-1}$ θεωρούμε τον μέγιστο κύκλο που περνάει από

τα x και y · δηλαδή την τομή της \mathbb{S}^{n-1} με το δισδιάστατο επίπεδο που περνάει από την αρχή των αξόνων και από τα σημεία x και y . Θέτουμε $\rho_n(x, y)$ να είναι το μήκος του κυρτού τόξου στον προηγούμενο κύκλο με άκρα τα x και y . Αυστηρά

$$\rho_n(x, y) = \arccos(\langle x, y \rangle)$$

όπου με \arccos συμβολίζουμε τον κλάδο του αντίστροφου συνημιτόνου από το $[-1, 1]$ στο $[0, \pi]$. Επειδή αυτό είναι μεγαλύτερο από το μήκος της αντίστοιχης χορδής συμπεραίνουμε άμεσα ότι η ευλείδεια απόσταση των x και y είναι μικρότερη ή ίση από τη γεωδαισιακή τους απόσταση. Επιπλέον, επειδή φανερά

$$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\rho_n(x, y)}{2} \leq \sin\left(\frac{\rho_n(x, y)}{2}\right) = \frac{\|x - y\|_2}{2}$$

συμπεραίνουμε ότι ισχύει:

$$(15.2) \quad \|x - y\|_2 \leq \rho_n(x, y) \leq \frac{\pi}{2} \|x - y\|_2.$$

Άρα αν αποδείξουμε ότι η ρ_n είναι μετρική τότε θα είναι ισοδύναμη με την ευκλείδεια μετρική και έτσι ο $(\mathbb{S}^{n-1}, \rho_n)$ θα είναι συμπαγής μετρικός χώρος. Φανερά η ρ_n είναι μη αρνητική ποσότητα, ισούται με μηδέν αν και μόνο αν τα δύο σημεία συμπίπτουν και είναι συμμετρική ως προς τα ορίσματά της. Μένει να δειχθεί η τριγωνική ανισότητα. Θεωρούμε τρία σημεία πάνω στη σφαίρα x , y και z . Στρέφοντας τη σφαίρα ή επιλέγοντας κατάλληλο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι $z = e_1$ και το x βρίσκεται στο επίπεδο που παράγουν τα e_1 και e_2 . Ας θέσουμε

$$\theta = \rho_n(x, z) = \arccos(\langle x, z \rangle) = \arccos(\langle x, e_1 \rangle)$$

και

$$\phi = \rho_n(y, z) = \arccos(\langle y, z \rangle) = \arccos(\langle y, e_1 \rangle)$$

Επίσης στο επίπεδο που σχηματίζουν τα $z = e_1$ και y ονομάζουμε u ένα από τα δύο μοναδιαία κάθετα στο z διανύσματα. Έτσι ισχύουν οι

$$x = e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta \quad \text{και} \quad y = e_1 \cos \phi \pm u \sin \phi,$$

όπου το πρόσημο στην έκφραση $\pm u$ εξαρτάται από την επιλογή που έγινε για το u . Υπολογίζοντας τώρα το εσωτερικό γινόμενο του x με το y παίρνουμε ότι

$$\langle x, y \rangle = \cos \theta \cos \phi \pm \langle u, e_2 \rangle \sin \theta \sin \phi.$$

Αλλά, αφού το u είναι μοναδιαίο ισχύει $|\pm \langle u, e_2 \rangle| \leq 1$ συνεπώς $\pm \langle u, e_2 \rangle \geq -1$. Επιπλέον επειδή $\theta, \phi \in [0, \pi]$ ισχύει $\sin \theta \sin \phi \geq 0$. Οπότε

$$\langle x, y \rangle \geq \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi = \cos(\theta + \phi).$$

Έτσι, επειδή η \arccos είναι φθίνουσα στο $[-1, 1]$,

$$\rho_n(x, y) = \arccos(\langle x, y \rangle) \leq \theta + \phi = \rho_n(x, z) + \rho_n(z, y),$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας για την ρ_n .

Στη συνέχεια θα εφοδιάσουμε τον χώρο αυτό με ένα κανονικό Borel μέτρο πιθανότητας αναλλοίωτο στους ορθογώνιους μετασχηματισμούς. Σύμφωνα με το Θεώρημα 15.1.1 τέτοιο μέτρο υπάρχει και είναι μοναδικό. Μπορούμε όμως και να το περιγράψουμε: Για κάθε Borel υποσύνολο B του $(\mathbb{S}^{n-1}, \rho_n)$ θέτουμε

$$C(B) = \bigcup_{0 < \lambda < 1} \{\lambda x : x \in B\}.$$

Δηλαδή το $C(B)$ είναι ένα είδος «κώνου» με κορυφή την αρχή των αξόνων ο οποίος «καταλήγει» πάνω στη σφαίρα στο σύνολο B (χωρίς να το περιλαμβάνει). Επειδή το $C(B)$ είναι φανερά ανοικτό όταν είναι ανοικτό το B συμπεραίνουμε ότι το $C(B)$ είναι σύνολο Borel στον \mathbb{R}^n όταν το B είναι σύνολο Borel στον $(\mathbb{S}^{n-1}, \rho_n)$. Ορίζουμε λοιπόν το μέτρο σ_n στη σφαίρα θέτοντας

$$\sigma_n(B) = \frac{\text{vol}_n(C(B))}{\text{vol}_n(B_2^n)}.$$

Το σ_n είναι φανερά μέτρο αφού ξένα Borel σύνολα B_m στην \mathbb{S}^{n-1} δίνουν τα ξένα σύνολα $C(B_m)$ οπότε σε αυτά είναι προσθετικό το vol_n άρα και το σ_n στα B_m . Επίσης είναι μέτρο πιθανότητας αφού $C(\mathbb{S}^{n-1}) = \text{int}(B_2^n) \setminus \{0\}$ οπότε $\sigma_n(\mathbb{S}^{n-1}) = 1$. Τέλος είναι αναλλοίωτο στους ορθογώνιους μετασχηματισμούς, αφού για κάθε $T \in O(n)$ λόγω της γραμ-

μικότητας εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει $C(T(B)) = T(C(B))$ οπότε

$$\begin{aligned}\sigma_n(T(B)) &= \frac{\text{vol}_n(C(T(B)))}{\text{vol}_n(B_2^n)} = \frac{\text{vol}_n(T(C(B)))}{\text{vol}_n(B_2^n)} = \frac{|\det T| \text{vol}_n(C(B))}{\text{vol}_n(B_2^n)} \\ &= \sigma_n(B).\end{aligned}$$

Ανάλογα προκύπτει και η κανονικότητά του (Άσκηση 15.1.1). Από τη μοναδικότητα του μέτρου Haar προκύπτει ότι το σ_n είναι αυτό το μοναδικό κανονικό Borel μέτρο πιθανότητας Haar πάνω στην \mathbb{S}^{n-1} .

15.1.2 Μέτρο και μετρική στην $\mathcal{O}(n)$

Στο σύνολο $\mathcal{O}(n)$ των ορθογώνιων μετασχηματισμών του \mathbb{R}^n ορίζουμε $\tau_n(T, S)$ για $T, S \in \mathcal{O}(n)$ να είναι η ποσότητα

$$\tau_n(T, S) = \sup_{x \in \mathbb{S}^{n-1}} \|T(x) - S(x)\|_2.$$

Η τ_n είναι μετρική στο $\mathcal{O}(n)$ διότι είναι φανερά μη αρνητική, κάνει 0 αν και μόνο αν $T = S$ (αν $x = 0$ φανερά $T(x) = 0 = S(x)$ και αν $x \neq 0$ τότε $T(x) = \|x\|_2 T(x/\|x\|_2) = \|x\|_2 S(x/\|x\|_2) = S(x)$), ισχύει $\tau_n(T, S) = \tau_n(S, T)$ λόγω της συμμετρίας στον ορισμό της και ισχύει και η τριγωνική ανισότητα, αφού για $T, S, R \in \mathcal{O}(n)$ ισχύει

$$\begin{aligned}\tau_n(T, S) &= \sup_{x \in \mathbb{S}^{n-1}} \|T(x) - S(x)\|_2 \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{S}^{n-1}} (\|T(x) - R(x)\|_2 + \|R(x) - S(x)\|_2) \\ &\leq \tau_n(T, R) + \tau_n(R, S).\end{aligned}$$

Επίσης εύκολα ελέγχουμε ότι με αυτή τη μετρική ο χώρος $(\mathcal{O}(n), \tau_n)$ είναι συμπαγής: Αν $T_k = (t_{ij}^{(k)})_{i,j=1}^n$ ακολουθία στον $\mathcal{O}(n)$ τότε επειδή

$$|t_{ij}^{(k)}| = |\langle T_k(e_j), e_i \rangle| \leq \|T_k(e_j)\|_2 \|e_i\|_2 = 1$$

η ακολουθία $(t_{ij}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη και άρα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Παιρνάμε σε συγκλίνουσα υπακολουθία για την $(t_{11}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$, σε περαιτέρω υπακολουθία της για την $(t_{12}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ και ούτω καθ' εξής μέχρι να περάσουμε σε υπακολουθία $(k_m)_{m \in \mathbb{N}}$ των φυσικών για την οποία συγκλίνουν όλες οι $(t_{ij}^{(k_m)})_{k_m \in \mathbb{N}}$ για κάθε $i, j = 1, \dots, n$. Έτσι, και για να

απλοποιήσουμε τον συμβολισμό, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι τα στοιχεία $t_{ij}^{(k)}$ του πίνακα της T_k συγκλίνουν ως προς k , έστω στο t_{ij} , για κάθε i, j . Θα δείξουμε ότι ο $T = (t_{ij})_{i,j=1}^n$ ανήκει στην $\mathcal{O}(n)$ και ότι $\tau(T_k, T) \rightarrow 0$. Πράγματι, $T \in \mathcal{O}(n)$, αφού για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ από τη συνέχεια του εσωτερικού γινομένου έχουμε

$$\langle Tx, Ty \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle T_k x, T_k y \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle T_k^t T_k x, y \rangle = \langle x, y \rangle,$$

συνεπώς $T^t T = \text{Id}$. Μένει να δείξουμε ότι $\tau_n(T_k, T) \rightarrow 0$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \|(T_k - T)(x)\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (t_{ij}^{(k)} - t_{ij}) \cdot x_j \right)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |t_{ij}^{(k)} - t_{ij}| \right)^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

αφού $|x_j| \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Άρα

$$\tau_n(T_k, T) \leq \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |t_{ij}^{(k)} - t_{ij}| \right)^2 \right)^{1/2} \rightarrow 0,$$

καθώς $k \rightarrow \infty$. Αποδείξαμε λοιπόν ότι κάθε ακολουθία στον $\mathcal{O}(n)$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία και συνεπώς ο $(\mathcal{O}(n), \tau_n)$ είναι ένα συμπαγής μετρικός χώρος. Φανερά η δράση της ομάδας $\mathcal{O}(n)$ σε αυτόν το χώρο είναι ισομετρική, αφού

$$\begin{aligned} \tau_n(RT, RS) &= \sup_{\|x\|_2=1} \|RTx - RSx\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|R(Tx - Sx)\|_2 \\ &= \sup_{\|x\|_2=1} \|Tx - Sx\|_2 = \tau_n(T, S), \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι τα στοιχεία της ορθογώνιας ομάδας διατηρούν το μήκος, δηλαδή $\|Ry\|_2 = \|y\|_2$ για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Άρα από το Θεώρημα 15.1.1 υπάρχει μοναδικό κανονικό Borel μέτρο πιθανότητας στην $\mathcal{O}(n)$, αναλλοίωτο στη δράση της $\mathcal{O}(n)$. Θα γράφουμε μ για αυτό το μέτρο.

Τέλος, θα χρειαστούμε την εξής παρατήρηση.

Παρατήρηση 15.1.2. Έστω ότι $x_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$. Ελέγχουμε εύκολα ότι

αν θέσουμε για κάθε Borel υποσύνολο A της \mathbb{S}^{n-1}

$$\nu(A) = \mu(\{T \in \mathcal{O}(n) : Tx_0 \in A\})$$

αυτό ορίζει ένα κανονικό Borel μέτρο πιθανότητας στην \mathbb{S}^{n-1} . Συνεπώς από την μοναδικότητα του μέτρου Haar στην \mathbb{S}^{n-1} θα πρέπει αναγκαστικά να ισχύει $\nu(A) = \sigma_n(A)$. Έτσι έχουμε έναν ακόμα τύπο για το μέτρο σ_n : για κάθε Borel υποσύνολο A του \mathbb{S}^{n-1} και για κάθε $x_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ ισχύει

$$(15.3) \quad \sigma_n(A) = \mu(\{T \in \mathcal{O}(n) : Tx_0 \in A\}).$$

15.1.3 Μέτρο και μετρική στην $\mathbb{G}_{n,k}$

Συμβολίζουμε με $\mathbb{G}_{n,k}$ το σύνολο όλων των υποχώρων διάστασης k του \mathbb{R}^n . Το σύνολο αυτό είναι γνωστό και με τον όρο «γκρασμανιανή» πολλαπλότητα (Grassmanian). Για κάθε $F \in \mathbb{G}_{n,k}$ γράφουμε S_F για την Ευκλείδεια μοναδιαία μοναδιαία σφαίρα του, δηλαδή $S_F = F \cap \mathbb{S}^{n-1}$. Ορίζουμε την απόσταση d_n δύο k -διάστατων υποχώρων F, E του \mathbb{R}^n με τον τύπο

$$d_n(F, E) = \sup\{\|x - y\|_2 : x \in S_F, y \in S_E\}.$$

Η d_n είναι μετρική στο $\mathbb{G}_{n,k}$. Πράγματι όλες οι ιδιότητές της είναι προφανείς εκτός ίσως από την τριγωνική ανισότητα. Για να την αποδείξουμε, αν $F_1, F_2, F_3 \in \mathbb{G}_{n,k}$ υπάρχουν ορθογώνιοι μετασχηματισμοί (όχι μοναδικοί) $T_1, T_2, T_3 \in \mathcal{O}(n)$ ώστε $F_i = T_i(E_0)$ όπου $E_0 = \text{span}\{e_1, \dots, e_k\}$ για $i = 1, 2, 3$, όπου η e_1, \dots, e_n είναι η συνήθης βάση του \mathbb{R}^n (η T_1 ορίζεται απλά, αν θεωρήσουμε μια ορθοκανονική βάση f_1, \dots, f_k στον F_1 , την επεκτείνουμε σε μια ορθοκανονική βάση $f_1, \dots, f_k, \dots, f_n$ στον \mathbb{R}^n , θέσουμε $T_1 e_j = f_j$ για $j = 1, \dots, n$ και την επεκτείνουμε γραμμικά σε όλους τους συνδυασμούς των $(e_j)_{j=1}^n$. Φανερά $T_1(E_0) = F_1$). Παρατηρήστε τώρα ότι $d_n(F_1, F_2) = \sup\{\|T_1 x - T_2 y\|_2 : x, y \in S_{E_0}\}$, οπότε

$$\begin{aligned} d_n(F_1, F_2) &= \sup\{\|T_1 x - T_2 y\|_2 : x, y \in S_{E_0}\} \\ &\leq \sup\{\|T_1 x - T_3 z\|_2 + \|T_3 z - T_2 y\|_2 : x, y, z \in S_{E_0}\} \\ &\leq \sup\{\|T_1 x - T_3 z\|_2 : x, z \in S_{E_0}\} \\ &\quad + \sup\{\|T_3 z - T_2 y\|_2 : y, z \in S_{E_0}\} \\ &\leq d_n(F_1, F_3) + d_n(F_3, F_2). \end{aligned}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι ο μετρικός χώρος $(\mathbb{G}_{n,k}, d_n)$ είναι συμπαγής, αφού για κάθε υπόχωρο F οποιασδήποτε ακολουθίας υποχώρων μπορούμε να βρούμε ορθογώνιο μετασχηματισμό στο $\mathcal{O}(n)$ που να απεικονίζει τον E_0 στον F . Στη συνέχεια περνάμε σε συγκλίνουσα υπακολουθία χρησιμοποιώντας τη συμπαγεια του $\mathcal{O}(n)$ (συμπληρώστε τις λεπτομέρειες, Άσκηση 15.1.2). Επειδή για κάθε υπόχωρο F διάστασης k και για κάθε $T \in \mathcal{O}(n)$ ο $T(F)$ είναι υπόχωρος διάστασης k και αν $F, E \in \mathbb{G}_{n,k}$

$$\begin{aligned} d_n(T(F), T(E)) &= \sup_{\{x \in F, y \in E\}} \|Tx - Ty\|_2 \\ &= \sup_{\{x \in F, y \in E\}} \|T(x - y)\|_2 \\ &= \sup_{\{x \in F, y \in E\}} \|x - y\|_2 \\ &= d_n(F, E), \end{aligned}$$

συμπεραίνουμε ότι η δράση της $\mathcal{O}(n)$ στην $\mathbb{G}_{n,k}$ είναι ισομετρική.

Άρα από το Θεώρημα 15.1.1 υπάρχει μοναδικό κανονικό Borel μέτρο πιθανότητας $\nu_{n,k}$ στο $\mathbb{G}_{n,k}$ αναλλοίωτο στη δράση της $\mathcal{O}(n)$. Από τη μοναδικότητα του μέτρου Haar, όπως και στην Παρατήρηση 15.1.2, συμπεραίνουμε ότι για κάθε Borel υποσύνολο A του $\mathbb{G}_{n,k}$

$$(15.4) \quad \nu_{n,k}(A) = \mu(\{T \in \mathcal{O}(n) : T(E_0) \in A\}),$$

όπου μ το μέτρο Haar στην $\mathcal{O}(n)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 15.1.1 Αποδείξτε ότι τα μέτρα σ_n και ν στην \mathbb{S}^{n-1} (όπως ορίστηκε στην Παρατήρηση 15.1.2), είναι κανονικά μέτρα.

Άσκηση 15.1.2 Αποδείξτε ότι ο μετρικός χώρος $(\mathbb{G}_{n,k}, d_n)$ είναι συμπαγής.

16.1 ...ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ ΤΟΥ GAUSS

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε το φαινόμενο συγκέντρωσης του μέτρου χρησιμοποιώντας το παράδειγμα του χώρου του Gauss, δηλαδή του \mathbb{R}^n εφοδιασμένο με την Ευκλείδεια μετρική και το κανονικοποιημένο γκαουσιανό μέτρο γ_n . δηλαδή για κάθε Lebesgue μετρήσιμο $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\gamma_n(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_A e^{-\|x\|_2^2/2} dx.$$

Γενικά μιλώντας, όταν σε ένα μετρικό χώρο έχουμε τη δυνατότητα να έχουμε και ένα μέτρο (συχνά πιθανότητας) στη Borel σ -άλγεβρα, τότε η αλληλεπίδραση της μετρικής και του μέτρου αποδεικνύεται πολύ παραγωγική κυρίως διότι είναι διαφορετική η έννοια του «μεγάλου» και του «μικρού» ως προς τη μετρική και ως προς το μέτρο. Ένα «μικρό» ως προς τη μετρική σύνολο (για παράδειγμα, με διάμετρο ένα «μικρό» ποσοστό της διαμέτρου του χώρου) μπορεί να έχει «σχεδόν» πλήρες μέτρο (πολύ «κοντά» στο μέτρο όλου του χώρου). Το απλούστερο ίσως παράδειγμα, είναι ο χώρος \mathbb{R} εφοδιασμένος με τη συνήθη απόσταση $d(x, y) = |x - y|$ και το κανονικό (γκαουσιανό) μέτρο πιθανότητας γ_1 , με πυκνότητα ως προς το μέτρο Lebesgue την $f(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$. Δηλαδή

$$\gamma_1(A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx,$$

για κάθε Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$. Η διάμετρος του χώρου είναι άπειρη, συνεπώς κάθε σύνολο της μορφής $[-a, a]$ ως υποσύνολο του μετρικού χώρου $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ έχει «μικρό» μέγεθος (το ποσοστό της διαμέτρου του ως προς τη διάμετρο του χώρου είναι μηδέν) αλλά ως υποσύνολο του χώρου μέτρου (\mathbb{R}, γ_1) έχει σχεδόν πλήρες μέτρο, αφού

$$\gamma_1([-a, a]) = 1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty e^{-x^2/2} dx \geq 1 - e^{-a^2/2},$$

όπως προκύπτει εύκολα μετά από την αλλαγή μεταβλητής $t = x - a$ στο τελευταίο ολοκλήρωμα. Αυτό το φαινόμενο γίνεται πολύ πιο ενδιαφέρον όταν ο χώρος στον οποίο εργαζόμαστε βρίσκεται μέσα σε ένα γραμμικό

χώρο διάστασης n . Τότε στις εκτιμήσεις υπεισέρχεται και η παράμετρος n , η διάσταση του χώρου. Ας δούμε το παράδειγμα του χώρου του Gauss. Θα δούμε στη συνέχεια ότι για κάθε $0 < \epsilon < 1$ ισχύει

$$(16.1) \quad \gamma_n \left(\sqrt{\frac{n}{1-\epsilon}} B_2^n \right) \geq 1 - e^{-\epsilon^2 n/4}.$$

Έτσι, όταν η διάσταση n είναι μεγάλη σχεδόν όλο το μέτρο γ_n βρίσκεται μέσα στην ευκλείδεια μπάλα ακτίνας περίπου \sqrt{n} . Αυτό είναι ένα είδος συγκέντρωσης του μέτρου (μέσα στην ευκλείδεια μπάλα κατάλληλης ακτίνας) αλλά στην πραγματικότητα ισχύει κάτι ακόμα πιο εντυπωσιακό. Το μέτρο της μπάλας $\sqrt{(1-\epsilon)n} B_2^n$ είναι «αμελητέο». Συγκεκριμένα ισχύει

$$(16.2) \quad \gamma_n \left(\sqrt{(1-\epsilon)n} B_2^n \right) \leq e^{-\epsilon^2 n/4}.$$

Άρα η μεγάλη μάζα του μέτρου γ_n βρίσκεται στο σύνολο

$$(16.3) \quad \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sqrt{(1-\epsilon)n} \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{\frac{n}{1-\epsilon}} \right\},$$

δηλαδή σε μια «μικρή ζώνη» γύρω από την ευκλείδεια σφαίρα ακτίνας \sqrt{n} .

Στα παραπάνω χρησιμοποιήσαμε ουσιαδώς την ευκλείδεια μπάλα B_2^n . Όμως το φαινόμενο αυτό είναι πολύ χρήσιμο όταν διατυπωθεί για γενικότερα σύνολα. Ένας άλλος τρόπος να περιγράψουμε τα παραπάνω είναι ο εξής. Μπορούμε να υπολογίσουμε ότι υπάρχει $\lambda_n \rightarrow 1$ ώστε $\gamma_n(\lambda_n \sqrt{n} B_2^n) = 1/2$ (Άσκηση 16.1.1). Τότε οι παραπάνω ανισότητες λένε ότι αν επεκτείνουμε την ευκλείδεια μπάλα από ακτίνα $\lambda_n \sqrt{n}$ σε ακτίνα

$$\lambda_n \sqrt{n} + \left(\frac{1}{1-\epsilon} - \lambda_n \right) \sqrt{n} = \sqrt{\frac{n}{1-\epsilon}},$$

ισοδύναμα αν προσθέσουμε στην $\lambda_n \sqrt{n} B_2^n$ (σε κάθε σημείο της) ένα πολλαπλάσιο της B_2^n ακτίνας τάξης $\epsilon \sqrt{n}$, τότε το νέο σύνολο έχει σχεδόν πλήρες μέτρο. Αν επαναλάβουμε το ίδιο επιχείρημα στο σύνολο $\mathbb{R}^n \setminus \lambda_n \sqrt{n} B_2^n$ —το οποίο έχει και αυτό μέτρο ίσο με $1/2$ —προσθέτοντάς του ένα πολλαπλάσιο της B_2^n ακτίνας τάξης πάλι $\epsilon \sqrt{n}$ θα προκύψει ότι το σύνολο $\mathbb{R}^n \setminus \sqrt{(1-\epsilon)n} B_2^n$ έχει σχεδόν πλήρες μέτρο. Προσθέτοντας τα μέτρα των συμπληρωμάτων $\sqrt{(1-\epsilon)n} B_2^n$ και $\mathbb{R}^n \setminus \sqrt{n/(1-\epsilon)} B_2^n$ προκύπτει άμεσα ότι το σύνολο της (16.3) έχει σχεδόν πλήρες μέτρο.

Αυτή είναι η περιγραφή του φαινομένου που θέλουμε να επεκτείνουμε και σε άλλα σύνολα.

Έτσι, θα θεωρούμε Borel σύνολα A σε ένα μετρικό χώρο (X, d) με μέτρο πιθανότητας μ με $\mu(A) \geq 1/2$ και θα λέμε ότι έχουμε την εμφάνιση ενός φαινομένου συγκέντρωσης του μέτρου αν η επέκταση του A κατά t δηλαδή το σύνολο

$$A_t := \bigcup_{x \in A} B(x, t) = \{y \in X : d(y, A) \leq t\}$$

(με $d(y, A) = \inf_{x \in A} d(x, y)$) έχει σχεδόν πλήρες μέτρο, για κατάλληλα επιλεγμένο t . Πόσο μεγάλο όμως πρέπει να είναι το t ; Το μέγεθος του t πρέπει να αντανακλά την «ασυμφωνία μέτρου και μετρικής» και η λογική επιλογή είναι να είναι ένα μικρό ποσοστό της «ουσιώδους διαμέτρου» του χώρου. Δηλαδή ένα ε -πολλαπλάσιο της τάξης του

$$(16.4) \quad \text{essdiam} X = \inf \{r > 0 : \text{υπάρχει } x \in X \text{ ώστε } \mu(B(x, r)) \geq 1/2\}.$$

Ο αριθμός αυτός (γνωστός και ως «μερική διάμετρος», δείτε Παρατήρηση 16.1.1) εκφράζει ένα είδος «μετροθεωρητικής διαμέτρου», δηλαδή μια διάμετρο όπως γίνεται αντιληπτή από την πλευρά του μέτρου: δεν φτάνει να υπάρχουν δύο σημεία στον χώρο σε απόσταση $\text{essdiam} X$ για να είναι αυτή η τιμή της ουσιώδους διαμέτρου, αλλά αυτό πρέπει να συμβαίνει για ένα αξιόλογο—από πλευράς μέτρου—σύνολο. Στην περίπτωση του χώρου του Gauss η ουσιώδης διάμετρος είναι της τάξης του \sqrt{n} , αφού $\gamma_n(\lambda_n \sqrt{n} B_2^n) = 1/2$ με $\lambda_n \rightarrow 1$. Δηλαδή τα περισσότερα (ως προς το μέτρο) στοιχεία βρίσκονται σε απόσταση τάξης \sqrt{n} από το μηδέν (άρα και μεταξύ τους). Ισοδύναμα, απόσταση από το μηδέν ουσιωδώς μεγαλύτερη του \sqrt{n} , για παράδειγμα μεγαλύτερη από $\sqrt{n}/(1 - \varepsilon)$, έχουν ελάχιστα (ως προς το μέτρο) στοιχεία.

Στα επόμενα κεφάλαια θα παρουσιάσουμε το φαινόμενο της συγκέντρωσης του μέτρου σε τρεις βασικούς χώρους:

- στον χώρο του Gauss, δηλαδή τον Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^n εφοδιασμένο με το μέτρο Gauss και την Ευκλείδεια μετρική,
- στην Ευκλείδεια σφαίρα \mathbb{S}^{n-1} (στον \mathbb{R}^n) εφοδιασμένη με το κανονικοποιημένο μέτρο Haar και την γεωδαισιακή μετρική,
- και στο διακριτό κύβο $E_2^n = \{-1, +1\}^n$ εφοδιασμένο με το κανονικοποιημένο ομογενές μέτρο και την μετρική Hamming.

Όλοι οι απαραίτητοι ορισμοί θα δοθούν στα αντίστοιχα κεφάλαια.

Παρατήρηση 16.1.1. Η ουσιώδης διάμετρος δεν είναι παρά μια απλή τροποποίηση μιας έννοιας γνωστής από τη Θεωρία Μέτρου: του ουσιώδους supremum, σε αντιδιαστολή με το supremum, μιας μετρήσιμης συνάρτησης (δείτε σχετικά με το ουσιώδες supremum στο [ΘΜ] ή στο [Fol1984] στον ορισμό του χώρου L_∞). Επειδή οι έννοιες μοιάζουν αλλά δεν είναι, ταυτόσημες για αυτό τον λόγο ο M. Gromov στο [Gro2001] χρησιμοποιεί τον όρο «μερική διάμετρος» θέτοντας

$$(16.5) \quad \text{PartDiam}_\mu(X, d) = \inf\{D > 0 : \exists \text{Borel } A \subseteq X \\ \text{με } \text{diam}(A) \leq D \text{ και } \mu(A) \geq 1 - \kappa\},$$

όπου κ «μικρός» (σταθερός) θετικός αριθμός. Για το κ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την τιμή $1/2$, αφού μια ακριβής τιμή δεν έχει σημασία στις εφαρμογές, μια και αυτή δεν επηρεάζει την τάξη μεγέθους της $\text{PartDiam}_\mu(X, d)$ ως προς τη διάσταση του χώρου που μας ενδιαφέρει. Ο Gromov χρησιμοποιεί την τιμή $\kappa = 10^{-10}$. Η μερική διάμετρος είναι ποσότητα ίδιας τάξης με την ουσιώδη διάμετρο (Άσκηση 16.1.2).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 16.1.1 Δείξτε ότι υπάρχει $\lambda_n \rightarrow 1$ ώστε $\gamma_n(\lambda_n \sqrt{n} B_2^n) = 1/2$ ως εξής: Χρησιμοποιήστε τις ανισότητες αυτής της ενότητας για να αποδείξετε ότι για

$$t_n = \sqrt{1 - \sqrt{\frac{4 \log 2}{n}}} \quad \text{και} \quad s_n = t_n^{-1}$$

ισχύει

$$\gamma_n(t_n \sqrt{n} B_2^n) \leq \frac{1}{2} \leq \gamma_n(s_n \sqrt{n} B_2^n).$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τη συνέχεια της συνάρτησης $\lambda \mapsto \gamma_n(\lambda B_2^n)$ αποδείξτε ότι υπάρχει το ζητούμενο λ_n με $t_n \leq \lambda_n \leq s_n$.

Άσκηση 16.1.2 Αποδείξτε ότι αν χρησιμοποιήσουμε $\kappa = 1/2$ στον ορισμό της μερικής διαμέτρου τότε ισχύει

$$\frac{1}{2} \text{essdiam} X \leq \text{PartDiam} X \leq \text{essdiam} X.$$

Το ίδιο ισχύει για κάθε $0 < \kappa < 1$ αν τροποποιήσουμε τον ορισμό του $\text{essdiam} X$ να είναι ο $\text{essdiam} X = \inf\{r > 0 : \text{υπάρχει } x \in X \text{ ώστε } \mu(B(x, r)) \geq 1 - \kappa\}$.

16.2 Η ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΙΣΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΕΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

Ένας τρόπος να ελέγξουμε την ύπαρξη φαινομένου συγκέντρωσης είναι οι ισοπεριμετρικές ανισότητες στην εξής μορφή: αποδεικνύουμε πρώτα ότι κάποιο συγκεκριμένο σύνολο έχει την μετροθεωρητικά μικρότερη επέκταση κατά t από κάθε άλλο. Για παράδειγμα, στον χώρο το Gauss μπορεί να αποδειχθεί το εξής:

Θεώρημα 16.2.1. Στον \mathbb{R}^n εφοδιασμένο με την Ευκλείδεια μετρική και το γκαουσιανό μέτρο γ_n , ας θέσουμε

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, e_1 \rangle \geq \alpha\},$$

οπότε η επέκτασή του κατά t είναι το σύνολο

$$H_t = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, e_1 \rangle \geq \alpha - t\},$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Τότε για κάθε μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ με $\gamma_n(A) \geq \alpha$ ισχύει

$$\gamma_n(A_t) \geq \gamma_n(H_t).$$

Παρατήρηση 16.2.2. Η τελευταία ανισότητα οδηγεί στην ισοπεριμετρική ανισότητα στον χώρο του Gauss, αφού αν $A \subseteq \mathbb{R}^n$ μετρήσιμο και H ημίχωρος του \mathbb{R}^n με $\gamma_n(A) = \gamma_n(H)$, τότε από το παραπάνω θεώρημα,

$$\frac{\gamma_n(A_t) - \gamma_n(A)}{t} \geq \frac{\gamma_n(H_t) - \gamma_n(H)}{t}.$$

Αφήνοντας το t να πάει στο 0 από δεξιά ($\lim \inf$) προκύπτει ότι οι ημίχωροι έχουν ελάχιστο γκαουσιανό μέτρο συνόρου (περιεχόμενο Minkowski—δείτε Παρατήρηση 6.3.2).

Με το Θεώρημα 16.2.1 υπολογίζουμε εύκολα ότι

$$\gamma_n(A) \geq \gamma_n(H_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$$

το οποίο, λόγω του ότι η παραπάνω εκθετική συνάρτηση είναι άρτια, ισούται με

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-t} e^{-x^2/2} dx = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^{\infty} e^{-x^2/2} dx.$$

Αλλά αλλάζοντας μεταβλητή, θέτοντας $y = x - t$, παίρνουμε

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^\infty e^{-x^2/2} dx \leq \frac{1}{2} e^{-t^2/2}.$$

Συνεπώς $\gamma_n(A_t) \geq 1 - \frac{1}{2} e^{-t^2/2}$. Όπως συζητήσαμε παραπάνω, την επέκταση κατά t στον χώρο του Gauss πρέπει να τη θέσουμε να είναι ένα μικρό ποσοστό της ουσιώδους διαμέτρου \sqrt{n} του χώρου. Έτσι για $\epsilon > 0$, αν θέσουμε $t = \epsilon\sqrt{n}$ προκύπτει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 16.2.3. Για κάθε μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ με $\gamma_n(A) \geq 1/2$ και για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει

$$\gamma_n(A_{\epsilon\sqrt{n}}) \geq 1 - \frac{1}{2} e^{-\epsilon^2 n/2}.$$

Συνεπώς, αν ξέρουμε ότι για παράδειγμα $\gamma(\lambda_n \sqrt{n} B_2^n) = 1/2$ για κατάλληλο $\lambda_n \rightarrow 1$ με το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει άμεσα τόσο η σχέση (16.1) όσο και η σχέση (16.2), με διαφορές μόνο στις σταθερές ποσότητες· διαφορές που δεν τις θεωρούμε σημαντικές, αφού εδώ μας ενδιαφέρει η εξάρτηση από τη διάσταση n καθώς $n \rightarrow \infty$ και η εξάρτηση από το ποσοστό της ουσιώδους διαμέτρου ϵ καθώς $\epsilon \rightarrow 0^+$.

Ανάλογα αποτελέσματα θα δούμε στον διακριτό κύβο E_2^n και στην Ευκλείδεια σφαίρα S^{n-1} στα επόμενα κεφάλαια.

16.3 ΟΙ ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΣΤΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ LIPSCHITZ

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε ένα μετρικό χώρο (X, d) εφοδιασμένο με ένα μέτρο πιθανότητας μ στην Borel σ -άλγεβρα. Έστω ότι η $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση Lipschitz, και γράφουμε $\text{Lip}(f)$ για τη σταθερά Lipschitz. Υποθέτουμε επίσης ότι στον χώρο έχουμε φαινόμενο συγκέντρωσης μέτρου, δηλαδή αν $A \subseteq X$ με $\mu(A) \geq 1/2$ τότε η επέκταση του A κατά $t > 0$ έχει «σχεδόν» πλήρες μέτρο.

Ορίζουμε τη διάμεσο της f (μέσος Levy) να είναι ο αριθμός L ώστε να ισχύει

$$\mu(\{x \in X : f(x) \geq L\}) \geq 1/2 \quad \text{και} \quad \mu(\{x \in X : f(x) \leq L\}) \geq 1/2.$$

Τέτοιος αριθμός L υπάρχει και μπορεί να οριστεί με μοναδικό τρόπο (Άσκηση 16.3.1). Θέτουμε $A = \{x \in X : f(x) \geq L\}$ και $B = \{x \in X : f(x) \leq L\}$ και υπολογίζουμε τα A_t και B_t : $x \in A_t$ αν υπάρχει $y \in A$

ώστε $d(x, y) \leq t$. Εφαρμόζοντας την ιδιότητα Lipschitz της f προκύπτει ότι

$$|f(x) - f(y)| \leq \text{Lip}(f)d(x, y) \leq \text{Lip}(f)t.$$

Άρα $f(x) \geq f(y) - \text{Lip}(f)t \geq L - \text{Lip}(f)t$. Δηλαδή

$$A_t \subseteq \{x \in X : f(x) \geq L - \text{Lip}(f)t\},$$

οπότε

$$\mu(\{x \in X : f(x) \geq L - \text{Lip}(f)t\}) \geq \mu(A_t).$$

Ομοίως

$$\mu(\{x \in X : f(x) \leq L + \text{Lip}(f)t\}) \geq \mu(B_t).$$

Έτσι αν τα σύνολα A_t και B_t έχουν «σχεδόν» πλήρες μέτρο, ενώνοντας τα συμπληρώματά τους και χρησιμοποιώντας την υποπροσθετικότητα του μέτρου, συμπεραίνουμε ότι το σύνολο

$$(16.6) \quad \{x \in X : |f(x) - L| \leq \text{Lip}(f)t\}$$

έχει «σχεδόν» πλήρες μέτρο. Αυτό το ερμηνεύουμε με τη φράση «κάθε συνάρτηση Lipschitz σε ένα χώρο με φαινόμενο συγκέντρωσης του μέτρου, είναι σχεδόν σταθερή σε σχεδόν ολόκληρο το χώρο». Όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, η εφαρμογή αυτής της ιδιότητας σε μια οποιαδήποτε νόρμα $\|\cdot\|_K$ (η Άσκηση 4.2.10 και η τριγωνική ανισότητα δίνουν ότι πρόκειται για συνάρτηση Lipschitz) που επάγεται στον \mathbb{R}^n από ένα κεντρικά συμμετρικό κυρτό σώμα K οδηγεί στο θεώρημα Dvoretzky: το «σχεδόν» πλήρους μέτρου σύνολο πάνω στη σφαίρα \mathbb{S}^{n-1} που η νόρμα είναι «σχεδόν» σταθερή, μας επιτρέπει να βρούμε έναν υπόχωρο επαρκώς μεγάλης διαστάσης που η τομή με τη σφαίρα είναι κοντά στο σύνολο αυτό. Οπότε εκεί, η $\|\cdot\|_K$, είναι σχεδόν σταθερό πολλαπλάσιο της ευκλείδειας νόρμας. Άρα η τομή του υποχώρου με το K είναι σχεδόν ευκλείδεια μπάλα της διάστασης του υποχώρου.

Στην περίπτωση του χώρου του Gauss με t τάξης $\epsilon\sqrt{n}$, λόγω του Θεωρήματος 16.2.1, θα ισχύει

$$(16.7) \quad \gamma_n(\{x \in X : |f(x) - L| \leq \text{Lip}(f)\epsilon\sqrt{n}\}) \geq 1 - e^{-\epsilon^2 n/2}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 16.3.1 Έστω ότι $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ και $A(t) = \{x \in X : f(x) \geq t\}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι οι ποσότητες

$$L_1 = \sup \left\{ \lambda \in \mathbb{R} : \mu(A(\lambda)) \geq \frac{1}{2} \right\} \quad \text{και} \quad L_2 = \inf \left\{ \lambda \in \mathbb{R} : \mu(A(\lambda)) \leq \frac{1}{2} \right\}$$

είναι αριθμοί (δεν είναι $\pm\infty$). Αποδείξτε ότι και οι δύο αυτές ποσότητες ικανοποιούν τις

$$\mu(\{x \in X : f(x) \geq L_j\}) \geq 1/2 \quad \text{και} \quad \mu(\{x \in X : f(x) \leq L_j\}) \geq 1/2,$$

για $j = 1, 2$. Ορίζουμε τον μέσο Levy της f να είναι ο (μοναδικός) αριθμός $L = (L_1 + L_2)/2$. (Υπόδειξη: Επειδή δεν είναι δύσκολο να μπερδευτεί κανείς με τις ανισότητες σε αυτό το θέμα, η υπόδειξη θα είναι εκτενής. Για το ότι οι L_1, L_2 είναι αριθμοί παρατηρήστε ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} A(-n) = X$ και $\bigcap_{n=1}^{\infty} A(n) = \emptyset$ και από τη μονοτονία των συνόλων $A(t)$ και το ότι το μέτρο είναι πεπερασμένο βρείτε $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $\mu(A(n_1)) < 1/2$ το οποίο συνεπάγεται ότι $L_1, L_2 < \infty$ και $\mu(A(-n_2)) > 1/2$ το οποίο συνεπάγεται $L_1, L_2 > -\infty$. Για το ότι ικανοποιούνται οι ζητούμενες σχέσεις, θεωρήστε αύξουσα ακολουθία t_n που να συγκλίνει στο L_1 ώστε $\mu(A(t_n)) \geq 1/2$. Παρατηρήστε ότι $\{x \in X : f(x) \geq L_1\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A(t_n)$ από όπου προκύπτει $\mu(\{x \in X : f(x) \geq L_1\}) \geq 1/2$ και $\{x \in X : f(x) > L\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(L + n^{-1})$ από όπου προκύπτει $\mu(\{x \in X : f(x) \leq L_1\}) \geq 1/2$. Για το L_2 , αν η t_n φθίνει στο L_2 και ικανοποιεί την $\mu(A(t_n)) \leq 1/2$, τότε είτε

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A(t_n) = \{x \in X : f(x) > L_2\} \quad \text{είτε} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A(t_n) = \{x \in X : f(x) \geq L_2\}.$$

Σε κάθε περίπτωση προκύπτει $\mu(\{x \in X : f(x) \leq L_2\}) \geq 1/2$. Η σχέση $\bigcap_{n=1}^{\infty} A(L_2 - n^{-1}) = \{x \in X : f(x) \geq L_2\}$ συνεπάγεται την $\mu(\{x \in X : f(x) \geq L_2\}) \geq 1/2$. Τέλος για την L διακρίνεται τις περιπτώσεις $L_1 \leq L \leq L_2$ ή $L_2 \leq L \leq L_1$.)

16.4 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΗ ΔΙΑΜΕΤΡΟΣ

Ένας άλλος (ισοδύναμος) τρόπος να περιγράψει κανείς το φαινόμενο συγκέντρωσης είναι μέσω της «παρατηρήσιμης διαμέτρου» του χώρου. Μια συνάρτηση Lipschitz f με $\text{Lip}(f) = 1$ από τον μετρικό χώρο (X, d_X) με μέτρο πιθανότητας μ σε ένα μετρικό χώρο (Y, d_Y) εφοδιασμένο με το μέτρο $\mu_*(B) = \mu(f^{-1}(B))$ για κάθε Borel σύνολο μειώνει την μερική/ουσιώδη διάμετρο:

$$(16.8) \quad \text{PartDiam}_{\mu_*}(Y, d_Y) \leq \text{PartDiam}_{\mu}(X, d_X).$$

Πράγματι, αν θέσουμε

$$D_X = \{D > 0 : \exists \text{Borel } A \subseteq X, \text{diam}_X(A) \leq D, \mu(A) \geq 1 - \kappa\}$$

και

$$D_Y = \{D > 0 : \exists \text{Borel } B \subseteq Y, \text{diam}_Y(B) \leq D, \mu_*(B) \geq 1 - \kappa\},$$

τότε εύκολα ελέγχουμε ότι επειδή $\text{Lip}(f) = 1$ ισχύει $D_Y \supseteq D_X$ (Άσκηση 16.4.1) οπότε προκύπτει η (16.8). Αν στη θέση του (Y, d_Y) χρησιμοποιήσουμε τον \mathbb{R} με τη συνήθη μετρική, είναι απρόσμενο το γεγονός ότι η μερική/ουσιώδης διάμετρος όχι απλώς μειώνεται αλλά *μειώνεται δραστικά*. Ορίζουμε την παρατηρήσιμη διάμετρο $\text{ObsDiam}(X)$ να είναι η ποσότητα

$$\text{ObsDiam}(X) = \sup\{\text{PartDiam}_{\mu_*}(\mathbb{R}, \|\cdot\|)\}$$

όπου το supremum υπολογίζεται ως προς τα μέτρα μ_* μέσω οποιασδήποτε 1-Lipschitz συνάρτησης $f : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$.

Το φαινόμενο συγκέντρωσης εμφανίζεται στο γεγονός ότι παρόλο που χρησιμοποιήσαμε supremum στον παραπάνω ορισμό εν τούτοις η παρατηρήσιμη διάμετρος είναι συνήθως πολύ μικρή, το οποίο είναι ισοδύναμο με το ότι το σύνολο στην (16.6) έχει μεγάλο μέτρο. Πράγματι, για $\text{Lip}(f) = 1$ το να είναι το μέτρο του

$$\{x \in X : |f(x) - t| \leq t\}$$

«μεγάλο» για κάθε 1-Lipschitz συνάρτηση από τον X στο \mathbb{R} είναι ισοδύναμο με το να είναι το σύνολο

$$f^{-1}([1-t, 1+t])$$

«μεγάλο». Ισοδύναμα είναι «μεγάλο» το μέτρο $\mu_*([1-t, 1+t])$, όπου $\mu_*(B) = \mu(f^{-1}(B))$ για κάθε Borel υποσύνολο του \mathbb{R} και για κάθε 1-Lipschitz συνάρτηση f . Άρα το t μπορεί να μικρύνει πολύ και το μέτρο $\mu_*([1-t, 1+t])$ να παραμείνει μεγαλύτερο από $1/2$ (ή $1 - \kappa$), δηλαδή η μερική/ουσιώδης διάμετρος του $(\mathbb{R}, |\cdot|, \mu_*)$ είναι μικρή, ισοδύναμα είναι μικρή η $\text{ObsDiam}X$.

Εύκολα βλέπουμε από την (16.7) ότι η παρατηρήσιμη διάμετρος στον χώρο του Gauss είναι τάξης 1, που είναι πολύ μικρότερη από την μερική/ουσιώδη διάμετρό του, η οποία είναι τάξης \sqrt{n} . Ομοίως, στην ευκλείδεια σφαίρα η παρατηρήσιμη διάμετρος είναι της τάξης του $1/\sqrt{n}$ όταν η μερική/ουσιώδης διάμετρός της είναι τάξης 1 και το ίδιο θα δούμε ότι ισχύει και στον διακριτό κύβο.

Το παραπάνω το αντιλαμβανόμαστε ως εξής. Το μέτρο μ στον χώρο (X, d) είναι μια κατάσταση (state) (για παράδειγμα η κατανομή της φωτεινότητας πάνω στη Γ /σφαίρα στον \mathbb{R}^n) και η f ένα παρατηρήσιμο μέγεθος (για παράδειγμα, η ένταση του κυανού σε κάθε σημείο της σφαίρας) η οποία μας δίνει μια οπτική (τομογραφική) εικόνα του μ_* (τομογραφική με την έννοια ότι σε κάθε διάστημα στο \mathbb{R} αποδίδεται από το μ_* το μέτρο μιας «τομής» της \mathbb{S}^{n-1} , του υποσυνόλου της που η ένταση του κυανού είναι στο διάστημα). Παρατηρούμε το μ_* στο \mathbb{R} με γυμνό μάτι με ευαισθησία σ . Δηλαδή δεν μπορούμε να διακρίνουμε διαφορές σε σύνολα μ_* -μέτρου μικρότερου του κ (κ όπως στον ορισμό της μερικής διαμέτρου) για $\sigma \cdot \kappa$ πολύ μικρότερο του 1. Το ότι, για παράδειγμα, $\text{ObsDiam}(\mathbb{S}^{n-1}) \simeq 1/\sqrt{n}$ σημαίνει ότι μια μετροθεωρητικά «μεγάλη» τομή του \mathbb{S}^{n-1} (μέτρου μεγαλύτερου του $1/2$ ή $1 - \kappa$) απεικονίζεται μέσω της f σε διάστημα πλάτους τάξης $1/\sqrt{n}$.

Βεβαίως θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε παρατηρήσιμα μεγέθη σε μεγαλύτερη ανάλυση. Δηλαδή να χρησιμοποιήσουμε μια f με σταθερά Lipschitz $\text{Lip}(f) > 1$ (οπότε η f μπορεί να μεγενθύνει κιόλας εξού και η μεγαλύτερη ανάλυση/ικανότητα διάκρισης) αλλά αυτό θα ήταν ισοδύναμο με το να θεωρήσουμε τη μεγέθυνση του χώρου $(R, |\cdot|) \mapsto (\mathbb{R}, \text{Lip}(f)^{-1}|\cdot|)$. Οπότε μπορούμε να παραμείνουμε στην περίπτωση $\text{Lip}(f) = 1$ χωρίς βλάβη της γενικότητας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 16.4.1 Αποδείξτε την (16.8) δείχνοντας ότι $D_Y \supseteq D_X$ όπως αυτά ορίστηκαν παραπάνω. Προς τούτο παρατηρήστε ότι αν $A \subseteq X$ και θέσουμε $B = f(A)$ τότε επειδή $\text{Lip}(f) = 1$ ισχύει $\text{diam}_Y(B) \leq \text{diam}_X(A)$ και $\mu_*(B) = \mu(f^{-1}(B)) \geq \mu(A)$, αφού $f^{-1}(B) \supseteq A$.

Άσκηση 16.4.2 Επιβεβαιώστε ότι για $\text{Lip}(f) = 1$ η σχέση (16.7) είναι ισοδύναμη με το ότι $\text{ObsDiam}(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2, \gamma_n) \simeq 1$.

17.1 ΤΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΣΤΟ ΧΩΡΟ ΤΟΥ GAUSS

Η περιγραφή της συγκέντρωσης του μέτρου στον χώρο του Gauss έγινε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Εδώ αποδεικνύουμε όσες προτάσεις δεν αποδείχθηκαν πριν και παρουσιάζουμε την ισοπεριμετρική ανισότητα στον χώρο του Gauss.

Ξεκινάμε με την απόδειξη των σχέσεων (16.1) και (16.2).

Λήμμα 17.1.1. Για κάθε $\epsilon \in [1, 0)$ ισχύουν οι ανισότητες

$$(17.1) \quad \frac{e^{-\epsilon/2(1-\epsilon)}}{\sqrt{1-\epsilon}} \leq e^{-\epsilon^2/4}$$

και

$$(17.2) \quad e^{\epsilon/2}\sqrt{1-\epsilon} \leq e^{-\epsilon^2/4}.$$

Απόδειξη: Οι ανισότητες αυτές είναι ισοδύναμες, μετά από απλές πράξεις, με τις

$$(17.3) \quad f(\epsilon) := \log(1-\epsilon) + \frac{\epsilon}{1-\epsilon} - \frac{\epsilon^2}{2} \geq 0,$$

και

$$(17.4) \quad g(\epsilon) := \log(1-\epsilon) + \epsilon + \frac{\epsilon^2}{2} \leq 0.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι

$$(17.5) \quad f'(\epsilon) := \epsilon \cdot \left(\frac{1}{(1-\epsilon)^2} - 1 \right) \geq 0,$$

και

$$(17.6) \quad g'(\epsilon) := -\frac{\epsilon^2}{1-\epsilon} \leq 0.$$

Άρα η f είναι αύξουσα, οπότε $\min f(\epsilon) = f(0) = 0$, και η g είναι

φθίνουσα, οπότε $\max g(\epsilon) = g(0) = 0$ ολοκληρώνοντας την απόδειξη. \square

Πρόταση 17.1.2. Για κάθε $\epsilon \in [0, 1)$ ισχύει

$$(17.7) \quad \gamma_n \left(\sqrt{\frac{n}{1-\epsilon}} B_2^n \right) \geq 1 - e^{-\epsilon^2 n/4}$$

και

$$(17.8) \quad \gamma_n(\sqrt{(1-\epsilon)n} B_2^n) \leq e^{-\epsilon^2 n/4}.$$

Απόδειξη: Για την πρώτη ανισότητα παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\epsilon \|x\|_2^2/2} d\gamma_n(x) &\geq \int_{\left\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \geq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1-\epsilon}}\right\}} e^{\epsilon \|x\|_2^2/2} d\gamma_n(x) \\ &\geq e^{\epsilon n/2(1-\epsilon)} \gamma_n \left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \geq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1-\epsilon}}\right\} \right). \end{aligned}$$

Συμπεπώς

$$\gamma_n \left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \geq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1-\epsilon}}\right\} \right) \leq e^{-\epsilon n/2(1-\epsilon)} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\epsilon \|x\|_2^2/2} d\gamma_n(x).$$

Όμως

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\epsilon \|x\|_2^2/2} d\gamma_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\epsilon \|x\|_2^2/2} e^{-\|x\|_2^2/2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(1-\epsilon)\|x\|_2^2/2} dx \\ (17.9) \quad &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(1-\epsilon)t^2/2} dt \right)^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon}^n}, \end{aligned}$$

όπου για να προκύψει η (17.9) χωρίσαμε τις μεταβλητές του $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ για να μετατραπεί το ολοκλήρωμα στον \mathbb{R}^n σε γινόμενο ολοκληρωμάτων στον \mathbb{R} .

Συνεπώς

$$\gamma_n \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \geq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1-\epsilon}} \right\} \right) \leq \left(\frac{e^{-\epsilon/2(1-\epsilon)}}{\sqrt{1-\epsilon}} \right)^n \leq e^{-\epsilon^2 n/4},$$

όπου χρησιμοποίησαμε το Λήμμα 17.1.1.

Για τη δεύτερη ανισότητα εργαζόμαστε ανάλογα:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\epsilon \|x\|_2^2/2(1-\epsilon)} d\gamma_n(x) &\geq \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq \sqrt{(1-\epsilon)n}\}} e^{-\epsilon \|x\|_2^2/2(1-\epsilon)} d\gamma_n(x) \\ &\geq e^{-\epsilon n/2} \gamma_n \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq \sqrt{(1-\epsilon)n}\}. \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} \gamma_n \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq \sqrt{(1-\epsilon)n}\} &\leq e^{\epsilon n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\epsilon \|x\|_2^2/2(1-\epsilon)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} e^{-\|x\|_2^2/2} dx \\ &\leq e^{\epsilon n/2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2(1-\epsilon)} dt \right)^n \\ &\leq \left(e^{\epsilon/2} \sqrt{1-\epsilon} \right)^n \leq e^{-\epsilon^2 n/4}, \end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Η γενική διατύπωση της ισοπεριμετρικής ανισότητας στο χώρο του Gauss δίνεται στο ακόλουθο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 17.1.3 (Borell, Sudakov-Tsirelson). Έστω ότι $\alpha \in (0,1)$ και $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$. Έστω επίσης ότι ο ημίχωρος $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta \rangle \leq \lambda\}$ έχει γκαουσιανό μέτρο ίσο με α . Τότε για κάθε Borel υποσύνολο A του \mathbb{R}^n με $\gamma_n(A) = \alpha$ ισχύει $\gamma_n(A_t) \geq \gamma_n(H_t)$.

Παραλείπουμε την απόδειξη αυτού του θεωρήματος και αποδεικνύουμε μια πιο ασθενή μορφή που όμως οδηγεί στην ίδια ανισότητα με αυτήν του Θεωρήματος 16.2.3 εκτός από ασήμαντες διαφορές στις σταθερές (Πρόταση 17.1.5 παρακάτω).

ΘΕΩΡΗΜΑ 17.1.4 (Maurey). Έστω ότι το A είναι μη κενό Borel υποσύν-

νολο του \mathbb{R}^n . Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{d(x,A)^2/4} d\gamma_n(x) \leq \frac{1}{\gamma_n(A)},$$

όπου $d(x, A)$ είναι η Ευκλείδεια απόσταση του x από το A .

Απόδειξη: Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = e^{d(x,A)^2/4} f_{\gamma_n}, \quad g(x) = 1_A(x) f_{\gamma_n}, \quad h(x) = f_{\gamma_n},$$

όπου f_{γ_n} η πυκνότητα του γκαουσιανού μέτρου γ_n . Ελέγχουμε τώρα ότι οι συναρτήσεις αυτές ικανοποιούν την υπόθεση της ανισότητας Prekora-Leindler για $\lambda = 1/2$. Πράγματι, χρησιμοποιώντας τον κανόνα του παραλληλογράμου και το γεγονός ότι για $y \in A$ ισχύει $d(x, A) \leq \|x - y\|_2$, έχουμε:

$$\begin{aligned} (2\pi)^n f(x)g(x) &= e^{d(x,A)^2/4} e^{-\|x\|_2^2/2} e^{-\|y\|_2^2/2} \\ &\leq \exp\left(\frac{\|x - y\|_2^2}{4} - \frac{\|x\|_2^2}{2} - \frac{\|y\|_2^2}{2}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{\|x + y\|_2^2}{4}\right) = \left(\exp\left(-\frac{1}{2} \left\|\frac{x + y}{2}\right\|_2^2\right)\right)^2 \\ &= (2\pi)^2 \left(h\left(\frac{x + y}{2}\right)\right)^2. \end{aligned}$$

Άρα από την ανισότητα Prekora-Leindler συμπεραίνουμε ότι

$$1 = \left(\int_{\mathbb{R}^n} h\right)^2 \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right) = \gamma_n(A) \int_{\mathbb{R}^n} e^{d(x,A)^2/2} d\gamma_n(x),$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. \square

Πόρισμα 17.1.5. Αν A είναι ένα Borel υποσύνολο του \mathbb{R}^n με $\gamma_n(A) \geq 1/2$ τότε

$$\gamma_n(A_{\epsilon\sqrt{n}}) \geq 1 - 2e^{-\epsilon^2 n/4},$$

για κάθε $\epsilon > 0$, όπου $A_{\epsilon\sqrt{n}} = \{y \in \mathbb{R}^n : d(y, A) \leq \epsilon\sqrt{n}\}$,

Απόδειξη: Από το προηγούμενο θεώρημα και χρησιμοποιώντας την ανι-

σότητα Markov παίρνουμε ότι

$$2 \geq \int_{\mathbb{R}^n} e^{d(x,A)^2/2} d\gamma_n(x) \geq e^{\epsilon^2 n/4} \gamma_n(\{x \in \mathbb{R}^n : d(x,A) \geq \epsilon\sqrt{n}\}),$$

από όπου προκύπτει το ζητούμενο. \square

ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΣΗ ΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΣΤΟ ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΚΥΒΟ

18.1 ΤΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΣΤΟ ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΚΥΒΟ

19.1 ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΑ

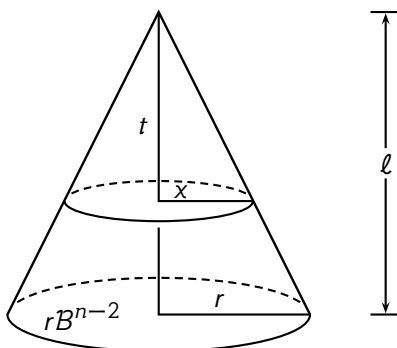
Θεωρούμε το μετρικό χώρο $(\mathbb{S}^{n-1}, \rho_n)$ εφοδιασμένο με το Borel μέτρο πιθανότητας σ_n (το κανονικοποιημένο εμβαδόν επιφανείας) αναλλοίωτο στους ορθογώνιους μετασχηματισμούς, όπως αυτά ορίστηκαν στην υποενότητα 15.1.1

Για την παρουσίαση του φαινομένου συγκέντρωσης στην επόμενη ενότητα θα χρειαστούμε έναν τύπο που να υπολογίζει το μέτρο σ_n μιας γεωδαισιακής μπάλας στον \mathbb{S}^{n-1} , δηλαδή το $\sigma_n(B(x, r))$ για $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ και $0 \leq r \leq \pi$. Στα ακόλουθα θα υποθέτουμε ότι $n \geq 3$. Πρώτα υπολογίζουμε τον όγκο ενός ορθού κώνου στον \mathbb{R}^n :

Λήμμα 19.1.1. *Ο όγκος ενός ορθού κώνου C στον \mathbb{R}^{n-1} βάσης rB_2^{n-2} και ύψους ℓ ισούται με*

$$\frac{\ell}{n-1} \text{vol}_{n-2}(rB_2^{n-2}).$$

Απόδειξη: Στο Σχήμα 19.1 ολοκληρώνουμε τους όγκους διάστασης $n - 2$ των τομών με υπερεπίπεδα παράλληλα στη βάση του κώνου. Οι τομές αυτές σε απόσταση t από την κορυφή έχουν ακτίνα rt/ℓ όπως προκύπτει εύκολα χρησιμοποιώντας όμοια τρίγωνα. Συνεπώς



ΣΧΗΜΑ 19.1: Υπολογισμός όγκου ορθού κώνου στον \mathbb{R}^{n-1} .

$$\begin{aligned}
 \text{vol}_n(C) &= \int_0^\ell \text{vol}_{n-2}\left(t \frac{r}{\ell} B_2^{n-2}\right) dt \\
 &= \frac{1}{\ell^{n-2}} \text{vol}_{n-2}(r B_2^{n-2}) \int_0^\ell t^{n-2} dt \\
 &= \frac{1}{\ell^{n-2}} \text{vol}_{n-2}(r B_2^{n-2}) \frac{\ell^{n-1}}{n-1} = \frac{\ell}{n-1} \text{vol}_{n-2}(r B_2^{n-2}),
 \end{aligned}$$

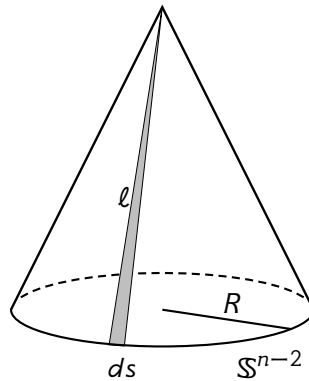
ολοκληρώνοντας την απόδειξη. \square

Τώρα χρησιμοποιούμε το προηγούμενο λήμμα για να υπολογίσουμε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας ενός κώνου στον \mathbb{R}^n .

Λήμμα 19.1.2. Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας ορθού κώνου στον \mathbb{R}^n με βάση $R B_2^{n-1}$ και μήκος γενέτειρας ℓ ισούται με

$$\ell R^{n-2} \text{vol}_{n-1}(B_2^{n-1}).$$

Απόδειξη: Μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας ολοκληρώνοντας στην $R S^{n-2}$ τα εμβαδά των στοιχειωδών κώνων στην παράπλευρη επιφάνεια όπως στο Σχήμα 19.2. Κάθε τέτοιος



ΣΧΗΜΑ 19.2: Υπολογισμός όγκου ορθού κώνου.

στοιχειώδης κώνος είναι $n-1$ διαστάσεων με βάση ds και ύψος ℓ . Άρα από το Λήμμα 19.1.1 έχει $n-1$ -διάστατο όγκο $(n-1)^{-1} \ell ds$. Συνεπώς

η παράπλευρη επιφάνεια έχει εμβαδόν

$$\begin{aligned} \int_{R\mathbb{S}^{n-2}} \frac{\ell}{n-1} ds &= \frac{\ell}{n-1} \text{vol}_{n-2}(R\mathbb{S}^{n-2}) \\ &= \frac{\ell}{n-1} R^{n-2} (n-1) \text{vol}_{n-1}(B_2^{n-1}) \\ &= \ell R^{n-2} \text{vol}_{n-1}(B_2^{n-1}). \end{aligned} \quad \square$$

Τώρα είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε το εμβαδόν (σ_n) γεωδαισιακών μπαλών πάνω στη μοναδιαία σφαίρα του \mathbb{R}^n .

Λήμμα 19.1.3. Για κάθε $x_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ στον \mathbb{R}^n και για κάθε $0 \leq t \leq \pi/2$ ισχύει

$$\sigma_n(B(x_0, t + \pi/2)) = \frac{\int_0^{t+\pi/2} \sin^{n-2}(\theta) d\theta}{\int_0^\pi \sin^{n-2}(\theta) d\theta},$$

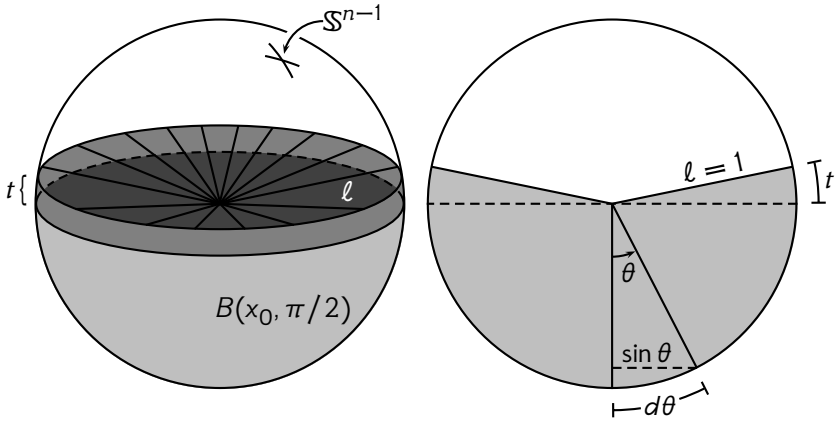
και άρα

$$\sigma_n(B(x_0, (\pi/2) - t)) = \frac{\int_t^{\pi/2} \cos^{n-2}(\theta) d\theta}{2 \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2}(\theta) d\theta}.$$

Απόδειξη: Για να υπολογίσουμε το μέτρο αυτό θα πρέπει να υπολογίσουμε το ποσοστό του όγκου του $C(B(x_0, t + \pi/2))$ ως προς τον όγκο της B_2^n μπάλας σύμφωνα με τον ορισμό του μέτρου σ_n . Ας υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι το x_0 είναι το $-e_n$. Σύμφωνα με το Σχήμα 19.3 θα πρέπει να ολοκληρώσουμε τα εμβαδά των παράπλευρων επιφανειών των κώνων που σχηματίζουν γωνία θ με τον αρνητικό n άξονα για θ από 0 μέχρι $t + \pi/2$ και να διαιρέσουμε με το ίδιο ολοκλήρωμα αλλά από 0 μέχρι π για να πετύχουμε το κλάσμα που ορίζει το $\sigma_n(B(x_0, t + \pi/2))$. Ο κώνος που σχηματίζει γωνία θ με τον αρνητικό n άξονα έχει μήκος γενέτειρας 1 και ακτίνα βάσης $\sin \theta$. Έτσι, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 19.1.2 παίρνουμε ότι

$$\sigma_n(B(x_0, t + \pi/2)) = \frac{\int_0^{t+\pi/2} \sin^{n-2}(\theta) d\theta}{\int_0^\pi \sin^{n-2}(\theta) d\theta}.$$

Για το $\sigma_n(B(x_0, (\pi/2) - t))$ παρατηρούμε ότι αυτό ισούται με $1 -$

ΣΧΗΜΑ 19.3: Υπολογισμός του $\sigma_n(B(x_0, t + \pi/2))$.

$\sigma_n(B(x_0, (\pi/2) - t))$ συνεπώς είναι ίσο με

$$\frac{\int_{t+\pi/2}^{\pi} \sin^{n-2}(\theta) d\theta}{\int_0^{\pi} \sin^{n-2}(\theta) d\theta}.$$

Το ολοκλήρωμα στον παρονομαστή το γράφουμε ως άθροισμα των ολοκληρωμάτων στο $[0, \pi/2]$ και στο $[\pi/2, \pi]$ και παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα στο δεύτερο διάστημα είναι ίσο με το ολοκλήρωμα στο πρώτο αλλάζοντας το θ σε $\pi - \theta$. Έτσι τώρα το κλάσμα είναι ίσο με

$$\frac{\int_{t+\pi/2}^{\pi} \sin^{n-2}(\theta) d\theta}{2 \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(\theta) d\theta}.$$

Στο αριθμητή αλλάζουμε τη μεταβλητή από θ σε $\pi/2 + \theta$ και στον παρονομαστή από θ σε $\pi/2 - \theta$ ολοκληρώνοντας την απόδειξη (Άσκηση 19.1.1).

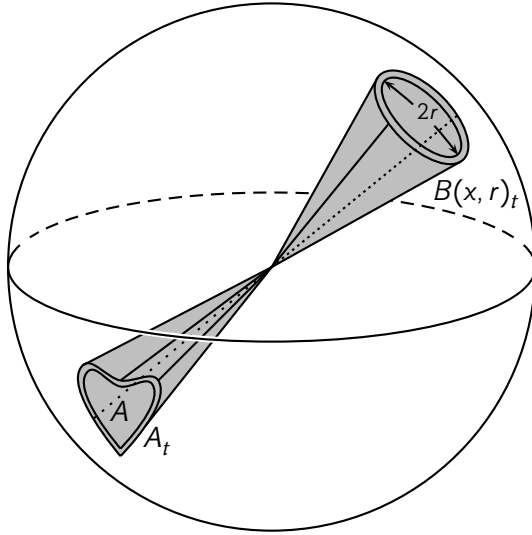
□

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 19.1.1 Ελέγξτε όλες τις πράξεις και τις αλλαγές μεταβλητών στην απόδειξη του Λήμματος 19.1.3.

19.2 ΤΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΣΤΗΝ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΣΦΑΙΡΑ

Έστω ότι $\alpha \in (0,1)$ και $t > 0$. Η ισοπεριμετρική ανισότητα στη σφαίρα προσδιορίζει εκείνα τα Borel υποσύνολα A της σφαίρας \mathbb{S}^{n-1} με $\sigma_n(A) = \alpha$, των οποίων οι t -επεκτάσεις έχουν το ελάχιστο μέτρο $\sigma_n(A_t)$.



ΣΧΗΜΑ 19.4: Η $\sigma_n(B(x, r)) = \sigma_n(A)$ συνεπάγεται $\sigma_n(B(x, r)_t) \leq \sigma_n(A_t)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 19.2.1 (Levy, Schmidt). Έστω $\alpha \in (0,1)$ και έστω $B(x, r)$ η γεωδαισική μπάλα ακτίνας $r > 0$ στην επιφάνεια της σφαίρας \mathbb{S}^{n-1} με $\sigma_n(B(x, r)) = \alpha$. Τότε για κάθε υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{S}^{n-1}$ με $\sigma_n(A) = \alpha$ και για κάθε $t > 0$ ισχύει:

$$\sigma_n(A_t) \geq \sigma_n(B(x, r)_t) = \sigma_n(B(x, r + t))$$

Έτσι, αν θέσουμε x_0 να είναι το σημείο $-e_n$, όπου e_n το n -στο διάνυσμα της συνήθους βάσης του \mathbb{R}^n , συμπεραίνουμε ότι αν $A \subseteq \mathbb{S}^{n-1}$ με $\sigma_n(A) \geq 1/2$ και $t > 0$ τότε $\sigma_n(A_t) \geq \sigma_n(B(x_0, t + \pi/2))$. Από το Λήμμα 19.1.3 συμπεραίνουμε ότι

$$\sigma_n(A_t) \geq \frac{\int_0^{t+\pi/2} \sin^{n-2}(\theta) d\theta}{\int_0^\pi \sin^{n-2}(\theta) d\theta} = 1 - \frac{\int_t^{\pi/2} \cos^{n-2}(\theta) d\theta}{2 \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2}(\theta) d\theta}.$$

Στη συνέχεια θα εκτιμήσουμε την παραπάνω ποσότητα. Για να φράξουμε άνω το ολοκλήρωμα $\int_t^{\pi/2} \cos^{n-2}(\theta) d\theta$ χρησιμοποιούμε την ανισότητα $\cos(x) \leq e^{-x^2/2}$ την οποία ελέγχουμε ότι είναι αληθής με τη βοήθεια της παραγώγου (Άσκηση 19.2.1). Έτσι,

$$\int_t^{\pi/2} \cos^{n-2}(\theta) d\theta \leq \int_t^{\pi/2} e^{-x^2(n-2)/2} dx \leq \int_t^{\infty} e^{-x^2(n-2)/2} dx.$$

Στο τελευταίο ολοκλήρωμα αλλάζουμε μεταβλητή θέτοντας

$$y = x\sqrt{n-2} - t\sqrt{n-2}$$

και παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_t^{\pi/2} \cos^{n-2}(\theta) d\theta &\leq \frac{1}{\sqrt{n-2}} \int_0^{\infty} e^{-(y+t\sqrt{n-2})^2/2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{n-2}} \int_0^{\infty} e^{-y^2/2} e^{-yt\sqrt{n-2}} e^{-t^2(n-2)/2} dy \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n-2}} e^{-t^2(n-2)/2} \int_0^{\infty} e^{-y^2/2} dy \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{n-2}} e^{-t^2(n-2)/2}, \end{aligned}$$

αφού $\int_0^{\infty} \exp(-y^2/2) dy = \sqrt{2\pi}/2 = \sqrt{\pi/2}$. Άρα

$$\sigma_n(A_t) \geq 1 - \frac{\sqrt{\pi/2} e^{-t^2(n-2)/2}}{2\sqrt{n-2} I_{n-2}},$$

όπου θέσαμε $I_{n-2} = \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2}(\theta) d\theta$.

Τέλος αποδεικνύουμε ότι η ακολουθία $\sqrt{n}I_n$ είναι κάτω φραγμένη.

Λήμμα 19.2.2. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\sqrt{n} I_n \geq 1.$$

Απόδειξη: Εύκολα ελέγχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$ (Άσκηση 19.2.2). Έτσι έχουμε

$$\sqrt{n+2} I_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{n+2}} (n+2) I_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{n+2}} (n+1) I_n \geq \sqrt{n} I_n.$$

Συνεπώς, μένει να ελέγξουμε τις περιπτώσεις $n = 1$ και $n = 2$. Αλλά για $n = 1$ ισχύει $\sqrt{1} I_1 = 1 \geq 1$ και για $n = 2$ ισχύει $\sqrt{2} I_2 = \sqrt{2}\pi/4 \geq 1$. \square

Παρατήρηση 19.2.3. Μπορεί να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling ότι $\sqrt{n} I_n \rightarrow \sqrt{\pi/2}$. Δείτε Άσκηση 19.2.3.

Οι παραπάνω υπολογισμοί έγιναν για $0 < t \leq \pi/2$. Αν $t > \pi/2$ τότε επειδή $B(x_0, t + \pi/2) = \mathbb{S}^{n-1}$ θα ισχύει $\sigma_n(A_t) = 1$. Αποδείξαμε λοιπόν το ακόλουθο:

Θεώρημα 19.2.4. Για κάθε Borel υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{S}^{n-1}$ με $\sigma_n(A) \geq 1/2$ και για κάθε $t > 0$ ισχύει

$$\sigma_n(A_t) \geq 1 - \sqrt{\frac{\pi}{8}} e^{-t^2(n-2)/2},$$

για κάθε $n \geq 3$. \square

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω θεώρημα και ακριβώς την ίδια διαδικασία που χρησιμοποιήσαμε για την απόδειξη της (16.7) εύκολα βλέπουμε ότι αν $f : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση Lipschitz με σταθερά $\text{Lip}(f)$ και μέσο Levy L ικανοποιεί την

$$(19.1) \quad \sigma_n(\{x \in \mathbb{S}^{n-1} : |f(x) - L| \leq \text{Lip}(f)t\}) \geq 1 - \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-t^2(n-2)/2},$$

για κάθε $t > 0$. Βλέπουμε δηλαδή ότι και εδώ μια συνάρτηση Lipschitz σε «σχεδόν» πλήρες μέτρο είναι «σχεδόν» σταθερή (έχει μικρή/ελεγχόμενη διακύμανση από την L).

Η απόδειξη του Θεωρήματος 19.2.4 έγινε με τη βοήθεια του Θεωρήματος 19.2.1 του οποίου την απόδειξη παραλείπουμε. Αντ' αυτού μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο θεώρημα το οποίο μας οδηγεί στην ίδια ακριβώς εκτίμηση εκτός ασήμαντες διαφορές στις σταθερές. Θέτουμε μ να είναι το κανονικοποιημένο μέτρο στην B_2^n , δηλαδή για κάθε Borel σύνολο $A \subseteq B_2^n$ θέτουμε $\mu(A) = \text{vol}_n(A)/\text{vol}_n(B_2^n)$. Το παρακάτω θεώρημα λέει ότι αν δυο ξένα Borel υποσύνολα της B_2^n έχουν απόσταση ρ , οπωσδήποτε το ένα από τα δύο θα έχει μικρό μέτρο μ .

ΘΕΩΡΗΜΑ 19.2.5 (Arias de Reyna και Villa). Αν τα A, B είναι δυο Borel υποσύνολα της B_2^n και

$$\rho = d(A, B) = \inf\{|\alpha - \beta| : \alpha \in A, \beta \in B\} > 0.$$

Τότε

$$\min\{\mu(A), \mu(B)\} \leq e^{-\frac{\rho^2 n}{8}}.$$

Απόδειξη: Από την πολλαπλασιαστική μορφή της Brunn-Minkowski ισχύει ότι:

$$\text{vol}_n\left(\frac{A+B}{2}\right) \geq \text{vol}_n(A)^{1/2} \text{vol}_n(B)^{1/2},$$

και διαιρώντας με τον όγκο $\text{vol}_n(B_2^n)$

$$\mu\left(\frac{A+B}{2}\right) \geq \mu(A)^{1/2} \mu(B)^{1/2} \geq \min\{\mu(A), \mu(B)\}.$$

Αλλά από τον κανόνα του παραλληλογράμμου και τον ορισμό του ρ για κάθε $a \in A$ και για κάθε $b \in B$ ισχύει

$$\|a+b\|_2^2 = 2\|a\|_2^2 + 2\|b\|_2^2 - \|a-b\|_2^2 \leq 4 - \rho^2$$

οπότε

$$\left\|\frac{a+b}{2}\right\|_2 \leq \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4}}.$$

Δηλαδή $\frac{1}{2}(A+B) \subseteq \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4}} B_2^n$, και άρα

$$\begin{aligned} \min\{\mu(A), \mu(B)\} &\leq \mu\left(\frac{1}{2}(A+B)\right) \leq \left(1 - \frac{\rho^2}{4}\right)^{n/2} = e^{\frac{n}{2} \log\left(1 - \frac{\rho^2}{4}\right)} \\ &\leq e^{-\rho^2 n/8}, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποίησαμε την ανισότητα Bernoulli στη μορφή $\log(1-\lambda) \leq -\lambda$. □

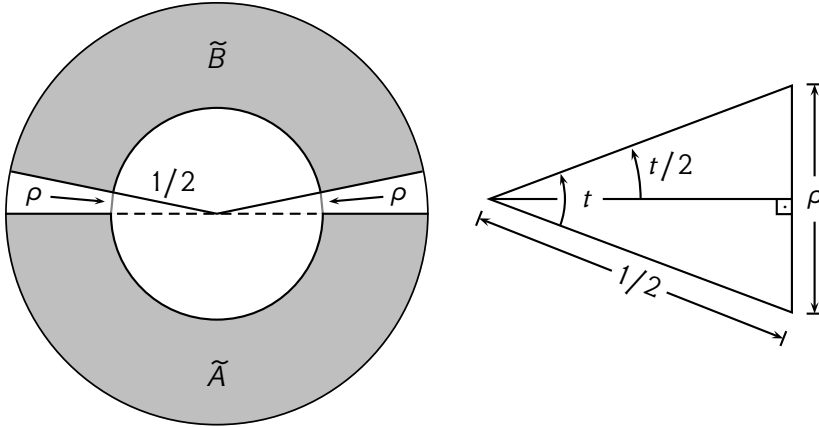
Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε το φαινόμενο συγκέντρωσης με ελαφρώς χειρότερες σταθερές, χρησιμοποιώντας το προηγούμενο θεώρημα αντί της ισοπεριμετρικής ανισότητας.

Θεώρημα 19.2.6. Για κάθε Borel σύνολο $A \subseteq \mathbb{S}^{n-1}$ με $\sigma_n(A) = 1/2$ και για κάθε $t > 0$ ισχύει

$$\sigma_n(A_t) \geq 1 - 2e^{-t^2 n / (8\pi^2)}.$$

Απόδειξη: Έστω ότι $A \subseteq \mathbb{S}^{n-1}$ με $\sigma_n(A) = 1/2$ και $t > 0$. Θεωρούμε το

σύνολο $B = \mathbb{S}^{n-1} \setminus A_t$ και ορίζουμε τα σύνολα $\tilde{A} = \cup\{sA : 1/2 \leq s \leq 1\}$ και $\tilde{B} = \cup\{sB : 1/2 \leq s \leq 1\}$, υποσύνολα της B_2^n . Η απόσταση ρ αυτών



ΣΧΗΜΑ 19.5: Το φαινόμενο συγκέντρωσης του μέτρου στην Ευκλείδεια σφαίρα μέσω του Θεωρήματος 19.2.5.

των συνόλων ικανοποιεί τη σχέση $\rho/2 = \sin(t/2)/2$ (δείτε Σχήμα 19.5) και άρα $\rho \geq t/\pi$. Συνεπώς από το Θεώρημα 19.2.5 συμπεραίνουμε ότι

$$\mu(\tilde{B}) \leq \exp\left(\frac{-\rho^2 n}{8}\right) \leq \exp\left(-\frac{t^2 n}{8\pi^2}\right).$$

Όμως

$$\mu(\tilde{B}) = \mu(\text{conv}\{0, B\}) - \mu(2^{-1}\text{conv}\{0, B\}) = (1 - 2^{-n})\sigma_n(B).$$

Άρα

$$\mu(\tilde{A}_t) \geq 1 - \frac{1}{1 - 2^{-n}} \exp(-t^2 n / (8\pi^2)).$$

Επειδή $1 - 2^{-n} \geq 2^{-1}$ η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Από τα παραπάνω εύκολα μπορεί να δει κανείς ότι η ουσιώδης/μερική διάμετρος της σφαίρας \mathbb{S}^{n-1} είναι τάξης 1 και η παρατηρήσιμη διάμετρος είναι τάξης $1/\sqrt{n}$. (Άσκηση 19.2.4).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 19.2.1 Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x) = e^{x^2/2} \cos x - 1$ στο $[0, \pi/2]$ και

υπολογίστε τα ακρότατά της ώστε να αποδείξετε ότι $\cos(x) \leq e^{-x^2/2}$.

Άσκηση 19.2.2 Αποδείξτε με ολοκλήρωση κατά παράγοντες ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$ όπου $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(\theta) d\theta$.

Άσκηση 19.2.3 Αποδείξτε ότι $\sqrt{n}I_n \rightarrow \sqrt{\pi/2}$ ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

- (i) Αλλάξτε μεταβλητή στο I_n θέτοντας $t = \sin(\theta)$ και αποδείξτε ότι $I_n = B(1/2, (n+1)/2)$, όπου B η συνάρτηση βήτα όπως ορίζεται στην Άσκηση Β'.2.6 στο Παράρτημα Β'.
- (ii) Χρησιμοποιήστε την Άσκηση Β'.2.6, το γεγονός ότι $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ (Πρόταση Β'.1.1) και τον τύπο του Stirling για να ολοκληρώσετε την απόδειξη.

Άσκηση 19.2.4 Αποδείξτε ότι $\text{PartDiam}\mathbb{S}^{n-1} \simeq 1$ και $\text{ObsDiam}\mathbb{S}^{n-1} \simeq 1/\sqrt{n}$.

Άσκηση 19.2.5 Για μια νόρμα $\|\cdot\|$ στον \mathbb{R}^n θέτουμε M να είναι η μέση τιμή της πάνω στην \mathbb{S}^{n-1} , δηλαδή $M = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \|x\| d\sigma_n(x)$. Επίσης θέτουμε b τον ελάχιστο αριθμό για τον οποίο ισχύει $\|x\| \leq b\|x\|_2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

- (i) Χρησιμοποιήστε τον ορισμό του μέσου Levy της $\|\cdot\|$ στην \mathbb{S}^{n-1} (Άσκηση 16.3.1) και την ανισότητα Markov για να αποδείξετε ότι $M \geq L/2$.
- (ii) Χρησιμοποιήστε τη σχέση (15.1) και την (19.1) για να αποδείξετε ότι $|M - L| \leq \pi b / (2\sqrt{n-2})$.
- (iii) Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 4.2.10 για να καταλήξετε ότι υπάρχει σταθερά $c > 0$ ώστε

$$\frac{1}{2}L \leq M \leq cL.$$

Το θεώρημα Dvoretzky λέει ότι κάθε κυρτό σώμα στον \mathbb{R}^n έχει «σχεδόν» ευκλείδεια τομή με ένα επίπεδο που περνάει από την αρχή των αξόνων, με τάξη διάστασης τουλάχιστον $\log n$. Σε αυτό το κεφάλαιο θα ξεκαθαρίσουμε το περιεχόμενο του προηγούμενου «σχεδόν» και γενικώς θα περιγράψουμε το θεώρημα στις λεπτομέρειές του. Πριν προχωρήσουμε σε αυτό, χρειαζόμαστε μερικούς ορισμούς και μερικές προτάσεις που αποδεικνύουμε στην επόμενη ενότητα.

20.1 ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΑ

Θεωρούμε ένα σύνολο σημείων x_1, \dots, x_N στην \mathbb{S}^{n-1} για το οποίο ισχύει $\|x_i - x_j\|_2 \geq \delta$ για κάθε $i \neq j$. Το πλήθος αυτών των σημείων δεν μπορεί να είναι άπειρο διότι οι μπάλες στον \mathbb{R}^n κέντρου x_i και ακτίνας $\delta/2$ έχουν ξένα εσωτερικά και ο συνολικός τους όγκος πρέπει να είναι μικρότερος από τον όγκο της ευκλείδειας μπάλας ακτίνας $1 + \delta/2$, αφού όλες είναι υποσύνολά της. Άρα θα πρέπει $N \text{vol}_n(B(x_i, \delta/2)) \leq \text{vol}_n(B(0, 1 + \delta/2))$ από όπου εύκολα παίρνουμε ότι $N \leq (1 + 2/\delta)^n$. Θα ονομάζουμε το σύνολο αυτών των σημείων δ -δίκτυο αν είναι μεγιστικό ώστε να ισχύει $\|x_i - x_j\|_2 \geq \delta$. Έτσι για κάθε σημείο της σφαίρας x υπάρχει δείκτης $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ ώστε $\|x - x_i\|_2 < \delta$, διότι αλλιώς τα x, x_1, \dots, x_N είναι $N + 1 > N$ σημεία και ανά δύο απέχουν περισσότερο ή ίσο από δ αντιφάσκοντας με τη μεγιστικότητα του $\{x_1, \dots, x_N\}$. Αποδείξαμε λοιπόν την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 20.1.1. Για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει δ -δίκτυο x_1, x_2, \dots, x_N στην \mathbb{S}^{n-1} με

$$N \leq \left(1 + \frac{2}{\delta}\right)^n. \quad \square$$

Δείχνουμε τώρα ότι για $0 < \delta < 1$ τα σημεία ενός δ -δικτύου μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να προσεγγιστεί οποιοδήποτε σημείο με την εξής έννοια:

Πρόταση 20.1.2. Έστω ότι $0 < \delta < 1$ και τα $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{S}^{n-1}$ είναι δ -δίκτυο. Τότε για κάθε $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ υπάρχει ακολουθία $y_m \in$

$\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ και αριθμοί $0 \leq a_m < \delta^{m-1}$ με $a_1 = 1$ ώστε

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} a_m y_m,$$

δηλαδή

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{j=1}^m a_j y_j \right\|_2 = 0.$$

Απόδειξη: Θέτουμε $A = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$. Αν $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, θεωρούμε ένα $y_1 \in A$ ώστε $\|x - y_1\|_2 \leq \delta$. Αν $x = y_1$ η απόδειξη ολοκληρώθηκε. Αν όχι, επειδή το $(x - y_1) / \|x - y_1\|_2$ ανήκει στη σφαίρα, υπάρχει $y_2 \in A$ ώστε

$$\left\| \frac{x - y_1}{\|x - y_1\|_2} - y_2 \right\|_2 \leq \delta$$

από όπου προκύπτει ότι

$$\|x - (y_1 + \|x - y_1\|_2 y_2)\|_2 \leq \delta \|x - y_1\|_2 \leq \delta^2.$$

Άρα $\|x - (a_1 y_1 + a_2 y_2)\|_2 \leq \delta^2$ με $a_1 = 1$ και $a_2 = \|x - y_1\|_2 \leq \delta$. Συνεχίζουμε επαγωγικά: αν έχουν οριστεί τα $y_1, \dots, y_m \in A$ και τα $a_1 = 1, a_2, \dots, a_m$ με $0 \leq a_k \leq \delta^{k-1}$ για $k = 1, \dots, m$ ώστε

$$\|x - (a_1 y_1 + \dots + a_m y_m)\|_2 \leq \delta^m,$$

τότε είτε $x = a_1 y_1 + \dots + a_m y_m$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε είτε $x \neq a_1 y_1 + \dots + a_m y_m$ και

$$\frac{x - (a_1 y_1 + \dots + a_m y_m)}{\|x - (a_1 y_1 + \dots + a_m y_m)\|_2} \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

Έτσι, υπάρχει $y_{m+1} \in A$ ώστε

$$\left\| \frac{x - (a_1 y_1 + \dots + a_m y_m)}{\|x - (a_1 y_1 + \dots + a_m y_m)\|_2} - y_{m+1} \right\|_2 \leq \delta$$

από όπου προκύπτει ότι

$$\|x - (a_1 y_1 + \dots + a_{m+1} y_{m+1})\|_2 \leq \delta^{m+1},$$

για $0 \leq a_{m+1} = \|x - (a_1 y_1 + \dots + a_m y_m)\|_2 \leq \delta^m$. ◻

20.2 Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΣΗΣ ΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΣΤΙΣ ΝΟΡΜΕΣ

Στο εξής το K θα είναι ένα κυρτό κεντρικά συμμετρικό σώμα στον \mathbb{R}^n και θα γράφουμε $\|\cdot\|$ για την νόρμα που αυτό επάγει στον \mathbb{R}^n . Έστω ότι ο b είναι ο μικρότερος αριθμός για τον οποίο ισχύει $\|x\| \leq b\|x\|_2$. Για παράδειγμα, από την Άσκηση 4.2.10 γνωρίζουμε ότι $b = \text{Lip}(\|\cdot\|) \leq c\sqrt{n}M$ για κατάλληλη σταθερά $c > 0$. Θα γράφουμε L για τον μέσο Levy της $\|\cdot\|$ πάνω στη σφαίρα \mathbb{S}^{n-1} . Θεωρούμε ένα $0 < \epsilon < 1$ και θέτουμε $\delta = \epsilon/(2 + \epsilon)$. Από την (19.1) θέτοντας $t = \delta L/b$ θα έχουμε ότι για το σύνολο

$$A = \{x \in \mathbb{S}^{n-1} : |\|x\| - L| \leq \delta L\}$$

ισχύει

$$(20.1) \quad \sigma_n(A) \geq 1 - \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\delta^2 L^2(n-2)/(2b^2)}.$$

Θεωρούμε τώρα τον υπόχωρο \mathbb{R}^k του \mathbb{R}^n για κάποιο k (θα προσδιοριστεί παρακάτω) και θεωρούμε ένα δ -δίκτυο $x_1, x_2, \dots, x_{N_k} \in \mathbb{S}^{k-1}$ $N_k \leq (1 + 2/\delta)^k$. Από την (20.1) και την (15.3) θα έχουμε ότι

$$\mu\left(\{T \in \mathcal{O}(n) : T(x_j) \notin A\}\right) = \sigma_n(A^c) \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\delta^2 L^2(n-2)/(2b^2)}.$$

Άρα

$$\begin{aligned} \mu\left(\{T \in \mathcal{O}(n) : \text{υπάρχει } j \in \{1, 2, \dots, N_k\} : T(x_j) \notin A\}\right) \\ &= \mu\left(\bigcup_{j=1}^{N_k} \{T \in \mathcal{O}(n) : T(x_j) \notin A\}\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{N_k} \mu(\{T \in \mathcal{O}(n) : T(x_j) \notin A\}) \\ &\leq N_k \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\delta^2 L^2(n-2)/(2b^2)}. \end{aligned}$$

Έτσι, αν η τελευταία ποσότητα είναι γνησίως μικρότερη του 1 τότε υπάρχουν $T \in \mathcal{O}(n)$ τα οποία απεικονίζουν όλα τα x_j μέσα στο A .

Συνεπώς για τέτοιους $T \in \mathcal{O}(n)$ ο υπόχωρος $F = T(\mathbb{R}^k)$ του \mathbb{R}^n έχει τα σημεία $T(x_j)$ στο σύνολο A για κάθε $j = 1, 2, \dots, N_k$, και αυτά αποτελούν δ -δίκτυο. Από την Πρόταση 20.1.2 για κάθε $x \in F \cap \mathbb{S}^{n-1}$ υπάρχει ακολουθία σημείων $y_m \in \{T(x_j) : j = 1, 2, \dots, N_k\}$ και συντελεστές $0 \leq a_m \leq \delta^{m-1}$ με $a_1 = 1$ ώστε $x = \sum_{m=1}^{\infty} a_m y_m$. Οπότε χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα και την κάτω τριγωνική ανισότητα,

$$\|x\| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \delta^{m-1} \|y_m\| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \delta^{m-1} (L + \delta L) = L \frac{1 + \delta}{1 - \delta}$$

και

$$\begin{aligned} \|x\| &\geq \|y_1\| - \left\| \sum_{m=2}^{\infty} a_m y_m \right\| \geq L - \delta L - \sum_{m=2}^{\infty} \delta^{m-1} (L + \delta L) \\ &= L - \delta L - \frac{\delta}{1 - \delta} (L + \delta L) = \frac{1 - 3\delta}{1 - \delta} L. \end{aligned}$$

Δείξαμε λοιπόν ότι το μέτρο των $T \in \mathcal{O}(n)$ ώστε για κάθε $x \in T(\mathbb{R}^k) \cap \mathbb{S}^{n-1}$ να ισχύει

$$\frac{1 - 3\delta}{1 - \delta} L \leq \|x\| \leq L \frac{1 + \delta}{1 - \delta}$$

είναι μεγαλύτερο από $1 - \sqrt{\pi/2} N_k e^{-\delta^2 L^2 (n-2)/(2b^2)}$. Αφαιρώντας L από τις παραπάνω ανισότητες και λαμβάνοντας υπόψιν ότι $\delta = \epsilon/(2 + \epsilon)$ παίρνουμε ότι

$$(20.2) \quad \left| \|x\| - L \right| \leq \frac{2\delta}{1 - \delta} L = \epsilon L.$$

Αυτό συμβαίνει για κάθε $x \in T(\mathbb{R}^k) \cap \mathbb{S}^{n-1}$ και για κάθε T σε ένα υποσύνολο του $\mathcal{O}(n)$ μέτρου μεγαλύτερου από $1 - \sqrt{\pi/2} N_k e^{-\delta^2 L^2 (n-2)/(2b^2)}$. Αντικαθιστώντας το δ με το $\epsilon/(2 + \epsilon)$ και παρατηρώντας ότι επειδή $0 < \epsilon < 1$ συνεπάγεται ότι $\delta \geq \epsilon/3$ παίρνουμε ότι η (20.2) ισχύει για κάθε $x \in T(\mathbb{R}^k) \cap \mathbb{S}^{n-1}$ και για κάθε T σε ένα υποσύνολο του $\mathcal{O}(n)$ μέτρου μεγαλύτερου από $1 - \sqrt{\pi/2} N_k e^{-\epsilon^2 L^2 (n-2)/(18b^2)}$.

Θα επιλέξουμε τώρα το k ώστε το τελευταίο μέτρο όχι μόνο να είναι θετικό αλλά να είναι και «κοντά» στο 1. Από την Πρόταση 20.1.1 αρκεί το k να επιλεγεί ώστε

$$\left(1 + \frac{2}{\epsilon/(2 + \epsilon)} \right)^k < \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{\frac{n-2}{18} \epsilon^2 (L/b)^2}.$$

Από την Πρόταση 20.2.2 (δείτε παρακάτω, σελίδα 251) υπάρχει σταθερά c_1 ώστε $(n - 2)(L/b)^2 \geq c_1 \log n \geq c_1$. Έτσι υπάρχουν σταθερές $c_2, c_3 > 0$ ώστε αν

$$k \leq c_2 \frac{\epsilon^2}{\log\left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right)} n \left(\frac{L}{b}\right)^2$$

να υπάρχει σύνολο υποχώρων διάστασης k μέτρου μεγαλύτερου του $1 - c_1 e^{-c_3 \epsilon^2 n (L/b)^2}$ ώστε να ισχύει η (20.2) για κάθε x στην μοναδιαία Ευκλείδεια σφαίρα του υποχώρου. Άρα, χρησιμοποιώντας το

$$k = \frac{c_2}{2} \frac{\epsilon^2}{\log\left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right)} n \left(\frac{L}{b}\right)^2$$

και αλλάζοντας τα ονόματα των σταθερών και χρησιμοποιώντας την (15.4) έχουμε αποδείξει το ακόλουθο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 20.2.1 (Dvoretzky-Milman). Υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2, c_3 > 0$ ώστε για κάθε $0 < \epsilon < 1$, για κάθε $n \geq 3$ και για κάθε κυρτό κεντρικά συμμετρικό σώμα K στον \mathbb{R}^n υπάρχει

$$k \geq c_1 \frac{\epsilon^2}{\log\left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right)} n \left(\frac{L}{b}\right)^2$$

και υποσύνολο \mathcal{H} του $\mathbb{G}_{n,k}$ μέτρου μεγαλύτερου του $1 - c_2 e^{-c_3 \epsilon^2 n (L/b)^2}$ ώστε για κάθε x στη μοναδιαία σφαίρα των υποχώρων του συνόλου \mathcal{H} να ισχύει

$$|\|x\| - L| \leq \epsilon L,$$

ισοδύναμα

$$(1 - \epsilon)L\|x\|_2 \leq \|x\| \leq (1 + \epsilon)L\|x\|_2$$

για κάθε $x \in F$ για κάθε $F \in \mathcal{H}$.

Η αξία του παραπάνω έγκειται στο γεγονός ότι μπορούμε να βάλουμε το σώμα K σε κατάλληλη θέση ώστε η ποσότητα $n(L/b)^2$ να τείνει στο άπειρο καθώς $n \rightarrow \infty$. Οπότε μέσα στον $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ μπορούμε να βρούμε υποχώρους διάστασης k στους οποίους η νόρμα είναι είναι σχεδόν πολλαπλάσια της Ευκλείδειας, και $k \rightarrow \infty$ καθώς $n \rightarrow \infty$.

Με βάση τα παραπάνω μένει να αποδειχθεί η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 20.2.2. Υπάρχει σταθερά $c > 0$ ώστε αν το σώμα K είναι στη θέση του John τότε $n(L/b)^2 \geq c \log n$.

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε δυο λήμματα και μια ακόμα πρόταση.

Λήμμα 20.2.3. Για οποιαδήποτε νόρμα $\|\cdot\|$ και για διανύσματα y_1, \dots, y_n στον \mathbb{R}^n ισχύει

$$\max_{1 \leq j \leq n} \|y_j\| \leq \int_{E_2^n} \left\| \sum_{j=1}^n \theta_j y_j \right\| d\theta_1 \dots d\theta_n.$$

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι για $n = 2$ αν υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $\max_{1 \leq j \leq 2} \|y_j\| = \|y_2\|$, τότε χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα

$$\begin{aligned} \|y_2\| &= \left\| \frac{y_1 + y_2}{2} - \frac{y_1 - y_2}{2} \right\| \leq \frac{1}{2} \|y_1 + y_2\| + \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\| \\ (20.3) \quad &\leq \int_{E_2^1} \|y_1 + \theta y_2\| d\theta. \end{aligned}$$

Θεωρούμε τώρα n διανύσματα y_1, \dots, y_n στον \mathbb{R}^n για $n \geq 2$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $\max_{1 \leq j \leq n} \|y_j\| = \|y_n\|$. Από την (20.3) παίρνουμε ότι

$$\|y_n\| \leq \int_{E_2^1} \left\| \sum_{j=1}^{n-1} \theta_j y_j + \theta_n y_n \right\| d\theta_n$$

για κάθε $(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) \in E_2^{n-1}$. Ολοκληρώνοντας στον E_2^{n-1} προκύπτει άμεσα ότι

$$\|y_n\| \leq \int_{E_2^n} \left\| \sum_{j=1}^n \theta_j y_j \right\| d\theta_1 \dots d\theta_n,$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Λήμμα 20.2.4. Υπάρχει σταθερά $c > 0$ ώστε για κάθε $1 \leq m \leq n$ φυσικό αριθμό να ισχύει

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \max_{1 \leq j \leq m} |x_j| d\sigma_n(x) \geq c \left(\frac{\log m}{n} \right)^{1/2},$$

όπου x_j είναι οι συντεταγμένες του x ως προς οποιαδήποτε ορθοκανονική βάση.

Απόδειξη: Υπολογίζουμε πρώτα το $\int_{\mathbb{R}^n} \max_{1 \leq j \leq m} |x_j| d\gamma_n(x)$ αλλάζοντας σε πολικές συντεταγμένες:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \max_{1 \leq j \leq m} |x_j| d\gamma_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \max_{1 \leq j \leq m} |x_j| e^{-\|x\|_2^2/2} dx \\ &= \frac{n\omega_n}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^\infty \max_{1 \leq j \leq m} |rx_j| r^{n-1} e^{-r^2/2} dr d\sigma_n(x) \end{aligned}$$

που μετά από απλές πράξεις και την (4.3) δίνει

$$\begin{aligned} &\simeq \frac{n\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma((n+2)/2)} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \max_{1 \leq j \leq m} |x_j| d\sigma_n(x) \\ &\simeq \sqrt{n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \max_{1 \leq j \leq m} |x_j| d\sigma_n(x). \end{aligned}$$

Δηλαδή υπάρχει σταθερά $c > 0$ ώστε

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \max_{1 \leq j \leq m} |x_j| d\sigma_n(x) \geq \frac{c}{\sqrt{n}} \int_{\mathbb{R}^n} \max_{1 \leq j \leq m} |x_j| d\gamma_n(x).$$

Μένει να αποδείξουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} \max_{1 \leq j \leq m} |x_j| d\gamma_n(x) \gtrsim \sqrt{\log m}.$$

Αλλά εύκολα ελέγχουμε ότι για $t = \sqrt{\lambda \log m}$

$$\begin{aligned} \gamma_n(\{x : \max_{1 \leq j \leq m} |x_j| \leq t\}) &= \int_{-t}^t \dots \int_{-t}^t \frac{2}{\sqrt{2\pi}^m} e^{-\sum_{j=1}^m x_j^2/2} dx \\ &= \left(1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_t^\infty e^{-r^2/2} dr\right)^m \\ (20.4) \quad &\leq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2m\lambda}}\right)^m \\ &\leq \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

αν επιλέξουμε $\lambda > 0$ αρκετά μικρό, όπου για να προκύψει η (20.4)

χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$\begin{aligned} \int_t^\infty e^{-r^2/2} dr &= \int_0^\infty e^{-(s+t)^2/2} ds \\ &\geq \int_0^\infty e^{-(s^2+t^2)} ds = e^{-t^2} \int_0^\infty e^{-s^2} ds. \end{aligned}$$

Οπότε τώρα

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \max_{1 \leq j \leq m} |x_j| d\gamma_n(x) &\geq \gamma_n(\{x : \max_{1 \leq j \leq m} |x_j| \geq t\}) \cdot t \\ &\geq \frac{1}{2}t = \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \sqrt{\log m}, \end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 20.2.5 (Θεώρημα Dvoretzky-Rogers). Έστω ότι το κυρτό και κεντρικά συμμετρικό σώμα K που επάγει στον \mathbb{R}^n τη νόρμα $\|\cdot\|$, βρίσκεται στη θέση του John. Τότε υπάρχει ορθοκανονική βάση e_1, \dots, e_n του \mathbb{R}^n ώστε

$$\left(\frac{n-j+1}{n}\right)^{1/2} \leq \|e_j\| \leq \|e_j\|_2 = 1.$$

Συγκεκριμένα $\|e_j\| \geq 1/4$ για κάθε $j = 1, \dots, [n/2]$.

Απόδειξη: Επιλέγουμε με e_j με επαγωγή. Θέτουμε e_1 οποιοδήποτε σημείο επαφής των συνόρων του K και της B_2^n . Αν υποθέσουμε ότι τα e_1, \dots, e_k με $k < n$ έχουν επιλεγεί, από την Άσκηση 12.4.1 υπάρχει σημείο επαφής y των συνόρων του K και της B_2^n ώστε αν P η προβολή στον $\text{span}\{e_1, \dots, e_k\}$ τότε

$$\|(I - P)(y)\|_2^2 = \langle y, (I - P)(y) \rangle \geq \text{tr}(I - P)/n = (n - k)/n.$$

Άρα $\|P(y)\| \leq \|P(y)\|_2 \leq \sqrt{k/n}$. Θέτουμε $e_{k+1} = (I - P)(y)/\|(I - P)(y)\|_2$. Όμως το y ήταν σημείο επαφής των συνόρων του K και της B_2^n άρα $h_K(y) = 1$ (Άσκηση 20.2.1), οπότε

$$1 = \|e_{k+1}\|_2 \geq \|e_{k+1}\| \geq \langle y, e_{k+1} \rangle = \|(I - P)(y)\| \geq ((n - k)/n)^{1/2},$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 20.2.2: Στη θέση του John ισχύει $B_2^n \subseteq K \subseteq \sqrt{n}B_2^n$, άρα $\sqrt{n}^{-1}\|x\|_2 \leq \|x\| \leq \|x\|_2$ οπότε $b = 1$. Έτσι αρκεί να

δείξουμε ότι $L \geq c\sqrt{(\log n)/n}$. Από την Άσκηση 19.2.5, τροποποιώντας τη σταθερά, αρκεί να δείξουμε ότι $M \geq c\sqrt{(\log n)/n}$.

Από το Θεώρημα Dvoretzky-Rogers (Πρόταση 20.2.5) υπάρχει ορθοκανονική βάση e_1, \dots, e_n με $\|e_j\| \geq 1/4$ για κάθε $j = 1, \dots, [n/2]$. Παρατηρούμε ότι λόγω της συμμετρίας της \mathbb{S}^{n-1} για κάθε $\theta_j \in \{\pm 1\}$ ισχύει

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left\| \sum_{j=1}^n \theta_j \langle x, e_j \rangle e_j \right\| d\sigma_n(x) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \|x\| d\sigma_n(x) = M.$$

Ολοκληρώνοντας ως προς θ_j και αλλάζοντας τη σειρά της ολοκλήρωσης προκύπτει ότι

$$M = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{E_2^n} \left\| \sum_{j=1}^n \theta_j \langle x, e_j \rangle e_j \right\| d\theta_1 \dots d\theta_n d\sigma_n(x).$$

Χρησιμοποιώντας τώρα το Λήμμα 20.2.3 παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} M &\geq \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \max_{1 \leq j \leq n} \|\langle x, e_j \rangle e_j\| d\sigma_n(x) \geq \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \max_{1 \leq j \leq [n/2]} \|\langle x, e_j \rangle e_j\| d\sigma_n(x) \\ &\geq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \max_{1 \leq j \leq [n/2]} |\langle x, e_j \rangle| d\sigma_n(x). \end{aligned}$$

Το Λήμμα 20.2.4 ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Επαναδιατυπώνουμε τώρα το θεώρημα Dvoretzky-Milman με βάση την Πρόταση 20.2.2.

ΘΕΩΡΗΜΑ 20.2.6 (Dvoretzky-Milman). Υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2, c_3 > 0$ ώστε για κάθε $0 < \epsilon < 1$, για κάθε $n \geq 3$ και για κάθε κυρτό κεντρικά συμμετρικό σώμα K στον \mathbb{R}^n υπάρχει

$$k \geq c_1 \frac{\epsilon^2}{\log\left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right)} \log n$$

και υποσύνολο \mathcal{H} του $\mathbb{G}_{n,k}$ μέτρου μεγαλύτερου του $1 - c_2/n^{c_3\epsilon^2}$ ώστε για κάθε x στη μοναδιαία σφαίρα των υποχώρων του συνόλου \mathcal{H} να ισχύει

$$\left| \|x\| - L \right| \leq \epsilon L,$$

ισοδύναμα

$$(1 - \epsilon)L\|x\|_2 \leq \|x\| \leq (1 + \epsilon)L\|x\|_2$$

για κάθε $x \in F$ για κάθε $F \in \mathcal{H}$. Ισοδύναμα $\delta(K \cap F, B_2^k) \leq \epsilon$ όπου δ η μετρική Hausdorff στον \mathbb{R}^k .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 20.2.1 Αποδείξτε ότι αν $B_2^n \subseteq K$ και το x_0 είναι σημείο επαφής του K με τη σφαίρα \mathbb{S}^{n-1} , τότε $h_K(x_0) = 1$ ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα.

- (i) Αφού $B_2^n \subseteq K$ τότε $h_K(x_0) \geq 1$.
- (ii) Υποθέστε ότι $h_K(x_0) > 1$ οπότε υπάρχει $x \in K$ ώστε $\langle x, x_0 \rangle > 1$. Χρησιμοποιήστε το προηγούμενο για να αποδείξετε ότι υπάρχει $\lambda > 0$ ώστε $\|y_\lambda\|_K \leq \|y_\lambda\|_2 < 1$ όπου $y_\lambda = x_0 + \lambda(x_0 - x)$, γράφοντας την $\|y_\lambda\|_2^2$ ως $\langle y_\lambda, y_\lambda \rangle$.
- (iii) Θέστε $z = y_\lambda / \|y_\lambda\|_K \in K$ και αποδείξτε ότι

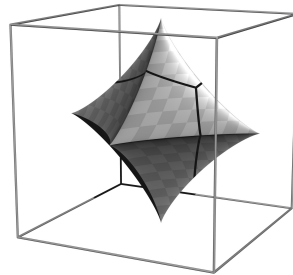
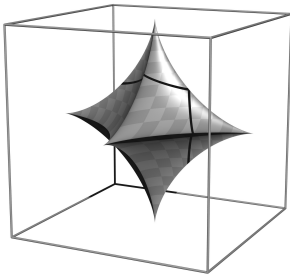
$$\frac{\|y_\lambda\|_K}{\lambda + \|y_\lambda\|_K} z + \frac{\lambda}{\lambda + \|y_\lambda\|_K} x = \frac{\lambda + 1}{\lambda + \|y_\lambda\|_K} x_0$$

(κάντε ένα σχήμα). Συμπεράνετε ότι το τελευταίο πολλαπλάσιο του x_0 ανήκει στο K ως κυρτός συνδιασμός στοιχείων του αλλά αυτό είναι άτοπο, αφού $(\lambda + 1)/(\lambda + \|y_\lambda\|_K) > 1$ και το $x_0 \in \text{bd}(K)$.

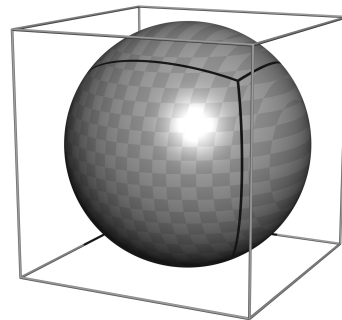
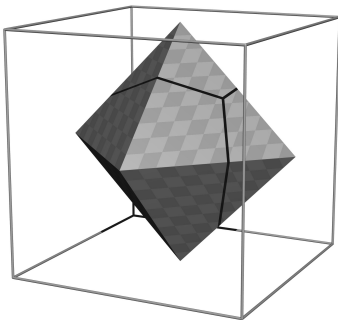
ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

Παρακάτω βλέπουμε μερικά βασικά κυρτά και μη-κυρτά σώματα του \mathbb{R}^3 μέσα στον κύβο $[-1, 1]^3$.

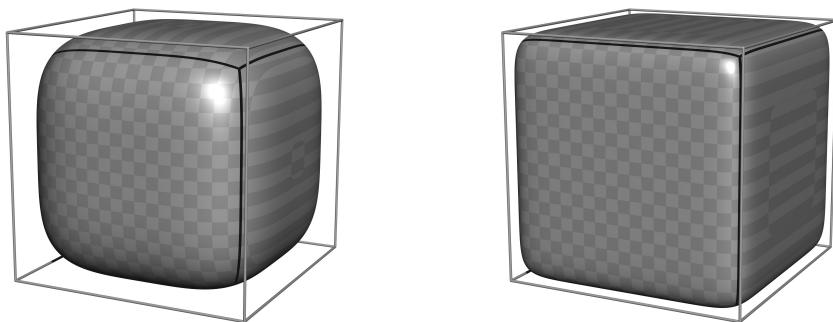
A'



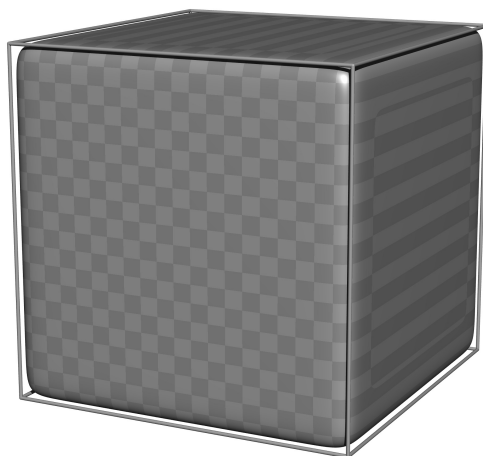
ΣΧΗΜΑ Α'.1: Τα σύνολα $\{x \in \mathbb{R}^n : (\sum_{j=1}^n |x_j|^p)^{1/p} \leq 1\}$ για $p = 0,6$ και $p = 0,8$ δεν είναι κυρτά.



ΣΧΗΜΑ Α'.2: Τα σύνολα $\{x \in \mathbb{R}^n : (\sum_{j=1}^n |x_j|^p)^{1/p} \leq 1\}$ για $p = 1$ και $p = 2$.



ΣΧΗΜΑ Α'.3: Τα σύνολα B_p^n για $p = 4$ και $p = 10$. Όσο το p μεγαλώνει το σώμα προσεγγίζει τον κύβο.



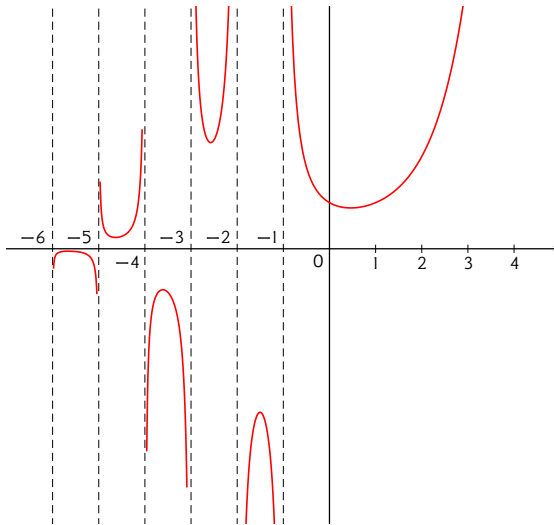
ΣΧΗΜΑ Α'.4: Για $p = 20$ το B_p^n είναι ήδη «πολύ κοντά» στον κύβο.

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ Γ

Σε αυτό το παράρτημα θα παρουσιάσουμε τις βασικές ιδιότητες της συνάρτησης Γ η οποία ορίζεται με το ολοκλήρωμα

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt,$$

για $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ Το γράφημα της συνάρτησης $\Gamma(x+1)$ δίνεται στο Σχήμα Β'.1.



ΣΧΗΜΑ Β'.1: Το γράφημα της συνάρτησης $\Gamma(x+1) : \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, -3 \dots\} \rightarrow \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση Γ ορίστηκε από το Euler το 1729 ως το απειρογινόμενο

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \frac{1 \cdot 2^x}{1+x} \cdot \frac{2^{1-x} 3^x}{2+x} \cdot \frac{3^{1-x} 4^x}{3+x} \dots \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

B'

και μελετήθηκε στη μορφή του ολοκληρώματος $\int_0^1 (-\log t)^x dt$ στην προσπάθειά του να ορίσει μια έννοια παραγοντικού για πραγματικούς αριθμούς. Επίσης και ο Gauss από το 1811 μελέτησε τη συνάρτηση Γ στη μορφή

$$\Gamma x = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k \cdot k^x}{(x+1)(x+2) \cdots (x+k)}$$

δεδομένου του ότι $\Gamma n = n!$ (Άσκηση Β'.2.1).

Β'.1 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ Γ

Πριν προχωρήσουμε στη μελέτη της συνάρτησης Γ υπενθυμίζουμε ότι το ολοκλήρωμα της γκαουσιανής συνάρτησης είναι ίσο με 1:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = 1.$$

Πρόταση Β'.1.1. Η συνάρτηση Γ ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες.

- (i) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
- (ii) Για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει $\Gamma(n+1) = n!$.
- (iii) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Απόδειξη: (i) Προκύπτει άμεσα με ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

(ii) Αποδεικνύεται εύκολα από το (i) με επαγωγή.

(iii) $\Gamma(1/2) = \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt$. Αλλάζουμε μεταβλητές, θέτοντας $t = x^2/2$ οπότε παίρνουμε

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{\infty} \sqrt{2}x^{-1} e^{-x^2/2} x dx = \sqrt{2} \int_0^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2} \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} = \sqrt{\pi}.$$



Ο υπολογισμός τιμών της συνάρτησης Γ είναι πολύ δυσχερής. Όμως αυτό που συχνά είναι χρήσιμο να ξέρουμε είναι η ασυμπτωτική συμπεριφορά των τιμών της Γ. Συγκεκριμένα ισχύει ο ακόλουθος τύπος:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(1+x)}{\sqrt{2\pi x} (x/e)^x} = 1.$$

Μια άμεση συνέπεια του τύπου αυτού είναι ο τύπος του Stirling ο οποίος μας λέει πόσο είναι περίπου το $n!$ για μεγάλα $n \in \mathbb{N}$. Αυτός προκύπτει

από το γεγονός ότι $\Gamma(n + 1) = n!$. Οπότε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} (n/e)^n} = 1.$$

Δηλαδή για μεγάλα n

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Αυτό συνεπάγεται και την $(n!)^{1/n} \simeq n/e$.

Το υπόλοιπο αυτού του παραρτήματος θα αφιερωθεί στην παρουσίαση μια απόδειξης για την ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης Γ (υπάρχουν διάφορες στη βιβλιογραφία).

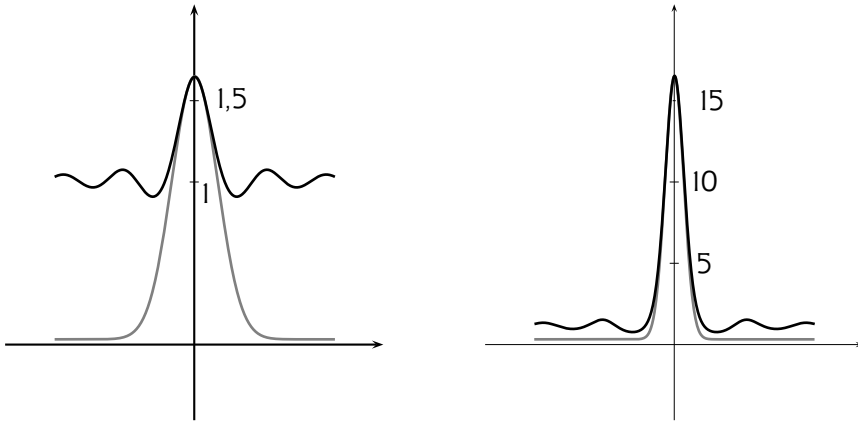
B'.2 Η ΜΕΘΟΔΟΣ LAPLACE

Το 1774 ο Laplace παρουσίασε μια μέθοδο για τον υπολογισμό του ορίου ολοκληρωμάτων της μορφής $\int_a^b e^{nf(x)} dx$ καθώς $n \rightarrow \infty$ (δείτε [Lap1986]) την οποία θα παρουσιάσουμε εδώ, και θα την χρησιμοποιήσουμε για την εκτίμηση της συνάρτησης Γ . Η μέθοδος αφορά σε συναρτήσεις f οι οποίες έχουν μέγιστη τιμή σε ένα και μόνο σημείο x_0 στο διάστημα $[a, b]$, και επιπλέον $a < x_0 < b$ και η f έχει συνεχή 2η παράγωγο στο σημείο αυτό.

Η ιδέα του Laplace είναι η εξής. Αν η f έχει μέγιστο σε ένα μόνο σημείο x_0 τότε ενώ ο πολλαπλασιασμός n επί $f(x)$ θα μεγαλώσει ανάλογα όλες τις τιμές της f στο διάστημα $[a, b]$ κατά τον παράγοντα n (συμπεριλαμβανομένης της $f(x_0)$), δηλαδή $nf(x_0)/nf(x) = f(x_0)/f(x)$. Αν όμως υψώσουμε σε εκθέτη μετά τον πολλαπλασιασμό, συγκεκριμένα αν θεωρήσουμε την $e^{nf(x)}$, οι αντίστοιχοι λόγοι μεγεθύνονται εκθετικά: $e^{nf(x_0)}/e^{nf(x)} = e^{n(f(x_0)-f(x))}$. Αυτή η μεγέθυνση κάνει το ολοκλήρωμα της $e^{nf(x)}$ να εξαρτάται πολύ περισσότερο από τις τιμές κοντά στο x_0 παρά από αυτές που είναι πιο μακριά. Αλλά για τις τιμές κοντά στο x_0 μπορούμε να προσεγγίσουμε την f από μια κατάλληλη γκαουσιανή καμπύλη (καμπύλη της μορφής $e^{-a(x-x_0)^2}$). Αυτό είναι πράγματι εφικτό διότι έχοντας η f μέγιστο στο x_0 έχει πρώτη παράγωγο στο x_0 ίση με το μηδέν. Οπότε στο ανάπτυγμα Taylor της f με κέντρο στο x_0 δεν υπάρχει γραμμικός όρος! Δηλαδή μετά τον σταθερό όρο του αναπτύγματος ο επόμενος είναι ο $f''(x_0)(x - x_0)^2/2$, όρος ο οποίος θα δώσει την κατάλληλη γκαουσιανή.

Το φαινόμενο αυτό το βλέπουμε στο Σχήμα B'.2 όπου έχουμε σχεδιά-

σει τη συνάρτηση $\exp(0.5((\sin x)/x))$ και στη συνέχεια την $\exp(3((\sin x)/x))$ (μαύρη καμπύλη) σε σμίκρυνση ώστε να χωράει στη σελίδα. Στη δεύτερη περίπτωση η καμπύλη προσεγγίζεται πολύ καλά από την γκαουσιανή (γκρι καμπύλη). Η προσέγγιση αυτή αιτιολογεί τόσο την εμφάνιση του αριθμού e όσο και την εμφάνιση του αριθμού π στο αποτέλεσμα!



ΣΧΗΜΑ Β'.2: Η ιδέα της μεθόδου Laplace.

Θα ξεκινήσουμε με την υπενθύμιση του Θεωρήματος Taylor από τον απειροστικό λογισμό με το υπόλοιπο στη μορφή Peano.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β'.2.1 (Taylor). Αν μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει συνάρτηση $h_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + h_2(x)(x - x_0)^2$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow x_0} h_2(x) = 0.$$

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι απλή: θέτουμε

$$h_2(x) = \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2}$$

και υπολογίζουμε το όριο για $x \rightarrow x_0$ με τον κανόνα L' Hospital. \square

Λήμμα Β'.2.2.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy = 1.$$

Απόδειξη: Θέτουμε $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy$ και παρατηρούμε ότι

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy.$$

Αλλάζουμε σε πολικές συντεταγμένες και παίρνουμε

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2/2} r dr d\theta \\ &= 2\pi \left(-e^{-r^2/2} \right) \Big|_0^{\infty} \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

Έτσι $I = \sqrt{2\pi}$ ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Λήμμα Β'.2.3.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^t e^{-y^2/2} dy = 1.$$

Απόδειξη: Επειδή η $e^{-y^2/2}$ είναι άρτια συνάρτηση και $\sqrt{2\pi}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy = 1$, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{\infty} e^{-y^2/2} dy = 0.$$

Αλλά η αλλαγή μεταβλητής $z = y - t$ δίνει

$$\begin{aligned} \int_t^{\infty} e^{-y^2/2} dy &= e^{-t^2/2} \int_0^{\infty} e^{-z^2/2} e^{-zt/2} dz \\ &\leq e^{-t^2/2} \int_0^{\infty} e^{-z^2/2} dz = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} e^{-t^2/2}, \end{aligned}$$

η οποία έχει όριο το 0 για $t \rightarrow \infty$. □

Τώρα είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε το γενικό θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β'.2.4 (Μέθοδος Laplace). Έστω ότι η $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο x_0 , με την f'' συνεχή στο x_0 , το οποίο είναι το μοναδικό σημείο στο $[a, b]$ στο οποίο έχει μέγιστο. Υποθέτουμε επίσης ότι $f''(x_0) < 0$ και $x_0 \in (a, b)$. Τότε

$$(B'.1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_a^b e^{tf(x)} dx}{e^{tf(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{t(-f''(x_0))}}} = 1.$$

Απόδειξη: (Κάτω φράγμα) Από το Θεώρημα Taylor όπως διατυπώθηκε στο Θεώρημα Β'.2.1 για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $|x - x_0| < \delta$ τότε $|h_2(x)| < \epsilon/2$, δηλαδή $-\epsilon/2 < h_2(x) < \epsilon/2$. Επιλέγουμε $\delta > 0$ ώστε να ικανοποιούνται τα προηγούμενα και επιπλέον $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq [a, b]$. Άρα από το Θεώρημα Taylor και το ότι $f'(x_0) = 0$, αφού στο x_0 η f έχει μέγιστο, θα έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + h_2(x)(x - x_0)^2 \\ &\geq f(x_0) + \frac{1}{2}(f''(x_0) - \epsilon)(x - x_0)^2. \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{tf(x)} dx &\geq \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} e^{tf(x)} dx \\ &\geq e^{tf(x_0)} \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} e^{t(f''(x_0) - \epsilon)(x - x_0)^2 / 2} dx \end{aligned}$$

(αλλάζοντας μεταβλητή με $y = \sqrt{t(-f''(x_0) + \epsilon)}(x - x_0)$)

$$\geq e^{tf(x_0)} \sqrt{\frac{1}{t(-f''(x_0) + \epsilon)}} \int_{-\delta\sqrt{t(-f''(x_0) + \epsilon)}}^{\delta\sqrt{t(-f''(x_0) + \epsilon)}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy.$$

Έτσι

$$\frac{\int_a^b e^{tf(x)} dx}{e^{tf(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{t(-f''(x_0))}}} \geq \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\delta\sqrt{t(-f''(x_0)+\epsilon)}}^{\delta\sqrt{t(-f''(x_0)+\epsilon)}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \right) \sqrt{\frac{-f''(x_0)}{-f''(x_0)+\epsilon}}$$

Όμως σύμφωνα με το Λήμμα Β'.2.3 η τελευταία παρένθεση συγκλίνει στο 1 για $t \rightarrow \infty$. Οπότε παίρνοντας \liminf ως προς $t \rightarrow \infty$ συμπεραίνουμε ότι

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_a^b e^{tf(x)} dx}{e^{tf(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{t(-f''(x_0))}}} \geq \sqrt{\frac{-f''(x_0)}{-f''(x_0)+\epsilon}},$$

για κάθε $\epsilon > 0$. Συνεπώς (για $\epsilon \rightarrow 0^+$)

$$(B'.2) \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_a^b e^{tf(x)} dx}{e^{tf(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{t(-f''(x_0))}}} \geq 1.$$

(Άνω φράγμα) Επιλέγουμε $\epsilon > 0$ ώστε $f''(x_0) + \epsilon < 0$ (θυμηθείτε ότι $f''(x_0) < 0$). Εφαρμόζοντας το θεώρημα Taylor όπως και πριν παίρνουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε x με $|x - x_0| < \delta$ να ισχύει

$$f(x) \leq f(x_0) + \frac{1}{2}(f''(x_0) + \epsilon)(x - x_0)^2.$$

Από την υπόθεση ότι η f έχει μέγιστο μόνο στο x_0 συμπεραίνουμε ότι για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $\theta > 0$ ώστε αν $|x - x_0| \geq \delta$ να ισχύει $f(x) \leq f(x_0) - \theta$. Πράγματι, αρκεί να θέσουμε $\theta = f(x_0) - \max_{|x-x_0| \geq \delta} f(x)$, το οποίο είναι θετικό εφόσον η f έχει μοναδικό σημείο μεγίστου στο x_0 .

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{tf(x)} dx &= \int_a^{x_0-\delta} e^{tf(x)} dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{tf(x)} dx + \int_{x_0+\delta}^b e^{tf(x)} dx \\ &\leq ((x_0 - \delta) - a)e^{t(f(x_0)-\theta)} + e^{tf(x_0)} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{\frac{t}{2}(f''(x_0)+\epsilon)(x-x_0)^2} dx \\ &\quad + (b - (x_0 + \delta))e^{t(f(x_0)-\theta)} \\ &\leq (b - a)e^{t(f(x_0)-\theta)} + e^{tf(x_0)} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{\frac{t}{2}(f''(x_0)+\epsilon)(x-x_0)^2} dx. \end{aligned}$$

Αλλάζοντας μεταβλητές όπως και στο κάτω φράγμα, καταλήγουμε στην ανισότητα

$$\int_a^b e^{tf(x)} dx \leq (b - a)e^{t(f(x_0)-\theta)} + e^{tf(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{t(-f''(x_0) - \epsilon)}}.$$

Παίρνοντας \limsup καθώς $t \rightarrow \infty$ οδηγούμαστε στην

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_a^b e^{tf(x)} dx}{e^{tf(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{t(-f''(x_0))}}} \leq \sqrt{\frac{-f''(x_0)}{-f''(x_0) - \epsilon}},$$

για κάθε ϵ αρκετά κοντά στο μηδέν (ώστε $-f''(x_0) + \epsilon < 0$). Αφήνοντας το ϵ να πάει στο μηδέν από δεξιά, καταλήγουμε στην

$$(B'.3) \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_a^b e^{tf(x)} dx}{e^{tf(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{t(-f''(x_0))}}} \leq 1.$$

Οι (B'.2) και (B'.3) μαζί δίνουν το αποτέλεσμα. \square

Η μέθοδος του Laplace μπορεί να εφαρμοστεί τώρα ώστε να υπολογίσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης Γ.

Πόρισμα Β'.2.5. Για τη συνάρτηση Γ ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x+1)}{\sqrt{2\pi x}(x/e)^x} = 1.$$

Απόδειξη: Στο ολοκλήρωμα που ορίζει τη συνάρτηση Γ κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $t = xr$, οπότε παίρνουμε

$$\Gamma(x+1) = x^{x+1} \int_0^\infty e^{x(\log r - r)} dr.$$

Διαιρούμε με x^{x+1} και παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα στα δεξιά μπορεί να εκτιμηθεί από τη μέθοδο Laplace: πράγματι, η συνάρτηση $f(r) = \log r - r$ έχει μέγιστο μόνο στο σημείο $x_0 = 1$ και $f''(x_0) = -1 < 0$. Έχουμε όμως να λύσουμε άλλο ένα πρόβλημα. Η απόδειξη που κάναμε στη μέθοδο Laplace χρησιμοποίησε κατά ουσιαστικό τρόπο το ότι το πεδίο ολοκλήρωσης ήταν πεπερασμένο. Τώρα το άνω άκρο του ολοκληρώματος είναι $+\infty$. Για να ξεπεράσουμε αυτό το πρόβλημα χωρίζουμε το ολοκλήρωμα σε δύο ολοκληρώματα, το ένα μέχρι 2 και το άλλο από 2 και πάνω. Εύκολα βλέπουμε ότι για $r \geq 2$ ισχύει $\log r \leq r/e$ (η $(\log r)/r$ έχει μέγιστο στο $r = e$). Γράφουμε τώρα,

$$(B'.4) \quad \frac{\Gamma(x+1)}{x^{x+1}} = \int_0^2 e^{x(\log r - r)} dr + \int_2^\infty e^{x(\log r - r)} dr.$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα έχουμε ότι

$$\int_2^\infty e^{x(\log r - r)} dr \leq \int_2^\infty e^{-rx(1-e^{-1})} dr = (x(1-e^{-1}))^{-1} e^{-2x(1-e^{-1})}.$$

Επιστρέφοντας στην (B'.4) και διαιρώντας με $e^{-x}\sqrt{2\pi/x}$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^{-x}\sqrt{2\pi/x}} \int_0^2 e^{x(\log r - r)} dr &\leq \frac{\Gamma(x+1)}{x^{x+1}e^{-x}\sqrt{2\pi/x}} \\ &\leq \frac{1}{e^{-x}\sqrt{2\pi/x}} \int_0^2 e^{x(\log r - r)} dr + \frac{1}{\sqrt{2\pi x}(1-e^{-1})} e^{-x(1-2e^{-1})}. \end{aligned}$$

Το όριο των ολοκληρωμάτων για $x \rightarrow \infty$ είναι ίσο με 1 από τη μέθοδο

Laplace ενώ το όριο του τελευταίου όρου είναι 0. Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x+1)}{x^{x+1} e^{-x} \sqrt{2\pi/x}} = 1,$$

δηλαδή το ζητούμενο. □

Πορίσμα Β'.2.6 (Τύπος του Stirling). *Ισχύει*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} (n/e)^n} = 1.$$

Δηλαδή για μεγάλα $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n. \quad \square$$

Πιο συγκεκριμμένη εκτίμηση για το $n!$ είναι η ακόλουθη.

Πόρισμα Β'.2.7. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει*

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{(12n+1)^{-1}} < n! < \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{(12n)^{-1}}.$$

Απόδειξη: Θεωρούμε την ακολουθία

$$d_n = \log(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n + n = \log \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}} \rightarrow \log \sqrt{2\pi},$$

όπως αποδείχθηκε στο Θεώρημα Β'.2.5. Επίσης ως προς τη μονοτονία αυτής της ακολουθίας έχουμε

$$\begin{aligned} d_n - d_{n+1} &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \log \frac{n+1}{n} - 1 \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \log \frac{1 + (2n+1)^{-1}}{1 - (2n+1)^{-1}} - 1 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{2} \log \frac{1+t}{1-t} = t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \frac{1}{7(2n+1)^6} + \dots$$

Η τελευταία έκφραση είναι μικρότερη από

$$\frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{3(2n+1)^4} + \frac{1}{3(2n+1)^6} + \dots$$

που ως γεωμετρική σειρά έχει άθροισμα

$$\frac{1}{12n(n+1)} = \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)},$$

και μεγαλύτερη από τον πρώτο της όρο $(3(2n+1)^2)^{-1}$, ο οποίος ελέγχουμε με απλές πράξεις ότι είναι γνήσια μεγαλύτερος από

$$\frac{1}{12n+1} - \frac{1}{12(n+1)+1}.$$

Δείξαμε έτσι ότι η ακολουθία $d_n - (12n)^{-1}$ είναι γνήσιως αύξουσα με όριο το $\log(\sqrt{2\pi})$, άρα $d_n - (12n)^{-1} < \log \sqrt{2\pi}$, και η ακολουθία $d_n - (12n+1)^{-1}$ είναι γνήσιως φθίνουσα με όριο πάλι το $\log(\sqrt{2\pi})$, άρα $d_n - (12n+1)^{-1} > \log \sqrt{2\pi}$. Οι $d_n - (12n)^{-1} < \log \sqrt{2\pi}$ και $d_n - (12n+1)^{-1} > \log \sqrt{2\pi}$ είναι οι ζητούμενες. \square

Ανάλογη εκτίμηση ισχύει και για τη συνάρτηση Γ .

Θεώρημα Β'.2.8. Για κάθε $x \geq 0$ ισχύει

$$\Gamma(x+1) = x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x} \exp(\mu(x)),$$

όπου η $\mu(x)$ είναι μια φθίνουσα συνάρτηση, μη αρνητική για $x \geq 1$ και

$$\mu(x) = \frac{1}{12x} - \frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{p_3(t)}{(t+x)^3} dt,$$

όπου η $p_3(t)$ είναι μια περιοδική συνάρτηση με περίοδο 1 η οποία στο $[0, 1]$ δίνεται από τον τύπο $p_3(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t$.

Η απόδειξη ξεφεύγει από τους σκοπούς του παρόντος και μπορεί να βρεθεί στο [Rem1998] (σελίδα 62), όπου διατηρήσαμε τον συμβολισμό το συγκεκριμένου βιβλίου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση Β'.2.1 Αποδείξτε ότι

$$\Gamma(n+1) = n! = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k \cdot k^n}{(n+1)(n+2) \cdots (n+k)}.$$

Άσκηση Β'.2.2 Αποδείξτε ότι $\Gamma(x+1) = \int_0^1 (-\log t)^x dt$.

Άσκηση Β'.2.3 Αποδείξτε ότι η συνάρτηση Γ είναι λογαριθμικά κυρτή, δηλαδή ότι η συνάρτηση $\log \Gamma$ είναι κυρτή.

Άσκηση Β'.2.4 Αποδείξτε ότι

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!} \sqrt{\pi}.$$

Άσκηση Β'.2.5 Χρησιμοποιείστε τη συνάρτηση Γ για να αποδείξετε ότι

$$\int_0^\infty e^{-t^a} dt = \frac{1}{a} \Gamma\left(\frac{1}{a}\right)$$

όπου $a > 0$.

Άσκηση Β'.2.6 Η συνάρτηση «βήτα» B δίνεται από τον τύπο $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ για $x > 0$ και $y > 0$. Αποδείξτε ότι

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα. Γράψτε το γινόμενο $\Gamma(x)\Gamma(y)$ ως διπλό ολοκλήρωμα με δύο μεταβλητές u, v στο $[0, \infty) \times [0, \infty)$. Αλλάξτε μεταβλητές θέτοντας $u = zw$ και $v = z(1-w)$ ώστε να οδηγηθείτε στο γινόμενο $\Gamma(x+y)B(x, y)$.

Άσκηση Β'.2.7 Αποδείξτε, χρησιμοποιώντας την ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης Γ , ότι ασυμπτωτικά (για x και y μεγάλα) ισχύει

$$B(x, y) \simeq \sqrt{2\pi} \frac{x^{x-\frac{1}{2}} y^{y-\frac{1}{2}}}{(x+y)^{x+y-\frac{1}{2}}}.$$

Άσκηση Β'.2.8 Υποθέστε ότι $f(x+1) = xf(x)$ και $f(1) = 1$. Αποδείξτε ότι αν

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x+n)}{(n-1)!n^x} = 1$$

τότε

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}.$$

Άσκηση Β'.2.9 Αποδείξτε ότι για κάθε $n, k \in \mathbb{N}$ με $k \leq n$ ισχύει

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} < \frac{1}{e} \left(\frac{en}{k}\right)^k.$$

Υπόδειξη: Για το κάτω φράγμα παρατηρήστε ότι

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{n-i}{k-i} \quad \text{και} \quad \frac{n-i}{k-i} \geq \frac{n}{k},$$

για κάθε $i = 1, 2, \dots, k-1$. Για το άνω φράγμα,

$$\binom{n}{k} < \frac{n^k}{k!} \quad \text{και} \quad e^{k-1} \geq \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^i = \frac{k^k}{k!},$$

από τη μονοτονία της $(1 + 1/i)^i$. (Παρατηρήστε επίσης ότι αν αντί για την τελευταία ανισότητα χρησιμοποιηθεί η $k^k/k! \leq \sum_{n=0}^{\infty} k^n/n! = e^k$ θα πάρουμε ασθενέστερη ανισότητα κατά τον παράγοντα $1/e$.)

Παρατήρηση Β'.2.9. Το άνω φράγμα για τον διωνυμικό συντελεστή δεν είναι ακριβές όταν το k είναι κοντά στο n . Για αυτό, χρησιμοποιώντας το ότι $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ μπορούμε να γράψουμε την ακριβέστερη ανισότητα:

$$\max \left\{ \left(\frac{n}{k}\right)^k, \left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k} \right\} \leq \binom{n}{k} < \frac{1}{e} \min \left\{ \left(\frac{en}{k}\right)^k, \left(\frac{en}{n-k}\right)^{n-k} \right\}.$$

Επίσης, και η κάτω ανισότητα είναι γνήσια αν $k < n$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [ΠρΑναλ] Μιχάλης Ανούσης, Αντώνης Τσολομούτης, Βαγγέλης Φελουζής. *Πραγματική Ανάλυση*, 2014.
- [ΓρΑλγ2] Δημήτριος Βάρσος, Δημήτριος Δεριζιώτης, Ιωάννης Εμμανουήλ, Μιχαήλ Μαλιάκας, Αντώνιος Μελάς και Ολυμπία Ταλέλλη. *Μια εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα*, τόμος II. Σοφία, 2009.
- [Για2009] Απόστολος Γιαννόπουλος. *Κυρτή γεωμετρική ανάλυση*, Σημειώσεις Μαθήματος, Αθήνα 2009.
- [ΘΜ] Στυλιανός Νεγρεπόντης, Γεώργιος Κουμουλλής. *Θεωρία Μέτρου*, Συμμετρία 1988.
- [ΕΓ] Πάρις Πάμφιλος. *Γεωμετρικόν*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης 2016.
- [AGM2015] Shiri Artstein-Avidan, Apostolos Giannopoulos and Vitali Milman. *Asymptotic Geometric Analysis*, Mathematical Surveys and Monographs vol. 202, AMS 2015.
- [Ball1988] Keith Ball. *Some remarks on the geometry of convex sets*, Geometric aspects of functional analysis, volume 1317 of *Lecture Notes in Math*. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1988. pp. 224–231.
- [Bob1997] Sergei Bobkov. *An isoperimetric inequality on the discrete cube, and an elementary proof of the isoperimetric inequality in Gauss space*, Ann. Probab. 25 (1997), no. 1, 206–214.
- [Bor1975] Christer Borel, *Convex set functions in d -space*, Period. Math. Hung. Vol. 6 (2), (1975), pp. 111–136.

- [BGVV2014] Silouanos Brazitikos, Apostolos Giannopoulos, Petros Valettas and Beatrice-Helen Vritsiou. *Geometry of Isotropic Convex Bodies*, Mathematical Surveys and Monographs vol. 196, AMS 2014.
- [Coh2013] Donald Cohn *Measure Theory*, Second Edition, Birkhäuser Advanced Texts, Basler Lehrbücher 2013.
- [Foll1984] Gerald B. Folland. *Real Analysis, Modern techniques and their applications*, Wiley Interscience, John Wiley & Sons, Inc. 1984.
- [GH2004] Mariano Giaquinta and Stefan Hildebrandt. *Calculus of Variations*, volume II. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2004.
- [GPS2001] Herbert Goldstein, Charles Poole, and John Safko. *Classical Mechanics*, 3rd edition. Addison Wesley, 2001.
- [Gro2001] Misha Gromov, with Appendices by M. Katz, P. Pansu, and S. Semmes. *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*, Based on *Structures Métriques des Variétés Riemanniennes*, Edited by J. LaFontaine and P. Pansu, eng. transl. by Sean Michael Bates, Corrected Edition, Progress in Mathematics, Birkhäuser Boston, 2001.
- [Gru2007] Peter M. Gruber. *Convex and discrete geometry*, volume 336 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2007.
- [KO2007] Owe Krey and Anthony Owen. *Basic Theoretical Physics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2007.
- [Lan2013] Serge Lang. *Linear Algebra*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer 2013.
- [Lap1986] Pierre Simon Laplace. *Memoir on the probability of causes of events*, tome sixième of *Mémoires de Mathématique et de Physique*. English translation by S. M. Stigler, *Statist. Sci.*, 1(19):364–378. 1986.
- [MPI1986] Vitali Milman and Alain Pajor. *Isotropic position and inertia ellipsoids and zonoids of the unit ball of a normed n -dimensional space*, Lecture Notes in Mathematics 1376, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1989, σελ. 64–104.

- [Pis1989] Gilles Pisier. *The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry*, Cambridge Tracts in Mathematics 94, 1989.
- [Rem1998] Reinhold Remmert. *Classical Topics in Complex Function Theory*, volume 172 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer Verlag, 1998.
- [Roy2010] Halsey Royden and Patrick Fitzpatrick. *Real Analysis*, Pearson, 4th edition 2010.
- [Rud1987] Walter Rudin. *Real & Complex Analysis*, McGraw-Hill Education, 3rd edition 1987.
- [Sai1981] J. Saint-Raymond. *Sur le volume des corps convexes symétriques*, Initiation Seminar on Analysis: G. Choquet-M. Rogalski-J. Saint-Raymond, 20th year: 1980/1981, Publ. Math. Univ. Pierre et Marie Curie, vol. 46, Univ. Paris VI, Paris 1981, Exp. No. II, 25.
- [Sch1993] Rolf Schneider. *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, volume 44 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, 1993.

Ευρετήριο Ελληνικών Όρων

A

αδράνεια
 καμπύλη, 51
αναλλοίωτο επίπεδο, 140
ανάστροφος πίνακας, 13
ανεξάρτητα σημεία
 affine, 13
ανισότητα
 Barthe, 167, 172
 Blaschke-Santaló, 116
 Brascamp-Lieb, 167, 172
 Brunn-Minkowski, 87, 91
 Brunn-Minkowski (αθροιστική
 μορφή), 92
 Brunn-Minkowski (πολλαπλα-
 σιαστική μορφή), 91
 Cauchy-Schwartz, 8
 Hadamard, 187
 Hölder, 87
 Hölder για αθροίσματα, 25
 Hölder για ολοκληρώματα,
 27
 Jensen, 20
 Minkowski για αθροίσματα,
 28
 Minkowski για ολοκληρώματα,
 29
 Prekopa-Leindler, 87, 169
 Young, 25
αντίστροφη ισοπεριμετρική,
 183, 189, 190
αριθμητικού-γεωμετρικού μέ-
 σου, 23, 144
 ισοπεριμετρική, 94, 95, 116
ανοικτή μπάλα, 3
αντιπολική καμπύλη, 140
αντίστροφη ισοπεριμετρική ανι-
 σότητα, 183

απόλυτα συνεχής συνάρτηση, 6
απόσταση
 Hausdorff, 77
 ευκλείδεια, 3
αρχή του Brunn, 96

B

βαρύκεντρο, 62

Γ

γενική θέση σημείων, 13
γεωδαισιακή μετρική, 211
γκρασμανιανή, 216
γνήσια κυρτή συνάρτηση, 17
γνήσια κυρτό σύνολο, 12
γνήσιος διαχωρισμός, 58

Δ

διάμετρος
 μερική, 221
 ουσιώδης, 221
 παρατηρήσιμη, 226
διαχωρισμός, 58
γνήσιος, 58

E

ελάχιστη επιφάνεια, 199
ελλειψοειδές
 Binet, 139, 140, 147
 Legendre, 139, 147
 Poincot, 139
αδρανείας, 139
κινητικής ενέργειας, 139, 140
μεγίστου όγκου, 159
εμβαδόν επιφανείας, 94
 συνέχεια, 204
εσωτερικό γινόμενο, 7
 συνέχεια, 9
εσωτερικό σημείο, 3

εσωτερικό συνόλου, 3
 ευθύγραμμο τμήμα, 11
 ευκλείδεια
 απόσταση, 3
 μπάλα, 4
 νόρμα
 συνέχεια, 9
 ευκλείδειο μήκος, 3

H

ημίχωρος, 13

Θ

θέση

 ελάχιστης επιφάνειας, 199
 ελαχίστου μέσου πλάτους,
 193
 ισοτροπική, 131
 ισοτροπική, μοναδικότητα,
 146
 κυρτού σώματος, 127
 του John, 163
 του John, αναπαράσταση ταυ-
 τοτικής, 184
 θετικά ημιορισμένοι πίνακες, 122
 θετικά ορισμένοι πίνακες, 122
 θετική ομογένεια, 8
 θεώρημα
 Dvoretzky-Milman, 247
 Dvoretzky-Rogers, 254
 Fubini, 87
 αναπαράστασης ταυτοτικής
 (John), 184
 επιλογής του Baschke, 82
 Καραθεοδωρή, 39
 σφαιρικότητας του Gross, 111

I

ιδιότητες όγκου, 69
 ισοπεριμετρική ανισότητα, 94, 95,
 116
 ισοτροπική θέση, 131

ίχνος πίνακα, 121

K

καμπύλη αδρανείας, 51
 κανονικό
 οκτάεδρο, 35
 υπεροκτάεδρο, 39
 κάτω τριγωνική ανισότητα, 8
 κεντρικά συμμετρικό σύνολο, 33
 κλειστή θήκη, 4
 κυκλικό πολύτοπο, 51
 κυρτή
 θήκη, 36
 συνάρτηση, 17
 κυρτό
 σύνολο, 11
 σώμα, 33
 θέση, 127
 κυρτός συνδυασμός, 37

Λ

λήμμα του Borel, 97
 λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση,
 150
 λογαριθμικά κοίλο μέτρο, 150
 λωρίδα, 13

M

μέθοδος Laplace, 261
 μερική διάμετρος, 221
 μετασχηματισμός Legendre, 141,
 142
 μετρήσιμο
 Jordan, 66
 μετρήσιμο σύνολο, 89
 μετρική
 γεωδαισιακή, 211
 στην $\mathbb{G}_{n,k}$, 216
 στην $\mathcal{O}(n)$, 214
 στην \mathbb{S}^{n-1} , 211
 μέτρο
 Haar, 211

Haar στην $\mathbb{G}_{n,k}$, 216
 Haar στην $\mathbb{O}(n)$, 214
 Haar στην \mathbb{S}^{n-1} , 211, 213
 Lebesgue, 89
 ισοτροπικό, 154
 λογαριθμικά κοίλο, 150
 μήκος
 ευκλείδειο, 3
 μοναδιαία
 μπάλα, 34
 σφαίρα, 5
 μοναδιαία ευκλείδεια μπάλα, 5
 μοναδικότητα ισοτροπικής θέσης,
 146
 μπάλα
 ανοικτή, 3
 ευκλείδεια, 4
 μοναδιαία ευκλείδεια, 5

N

νόρμα, 8

O

όγκος, 65
 ιδιότητες, 69
 κυρτού σώματος, 65
 παραλληλεπιπέδου, 65
 πολυπαραλληλεπιπέδου, 65
 του B_p^n , 71
 υποσυνόλων του \mathbb{R}^n , 66
 οκτάεδρο
 κανονικό, 35
 ορθογώνια
 ομάδα, 121
 προβολή, 11
 ορίζουσα Vandermonde, 207, 208
 ουσιώδης διάμετρος, 221

Π

παράγωγο σύνολο, 4
 παραλληλεπίπεδο, 65
 παρατηρήσιμη διάμετρος, 226

περιεχόμενο Minkowski, 94
 πίνακας
 singular value decomposition,
 123
 αδρανείας, 134
 ανάστροφος, 13
 θετικά ημιορισμένος, 122
 θετικά ορισμένος, 122
 ίχνος, 121
 πολική αναπαράσταση, 124
 πολική
 αναπαράσταση, 124
 καμπύλη, 140
 ροπή αδρανείας, 136
 πολικό σώμα, 52
 πολύτοπο, 39
 k-neighborly, 52
 κυκλικό, 51
 σταυρωτό, 39
 πρόβλημα των Busemann-Petty,
 74
 προβολή, 11

P

ροπή
 αδρανείας, 132
 αδρανείας, 132, 134
 δύναμης, 132
 πολική αδρανείας, 136

Σ

σημεία
 σε γενική θέση, 13
 σημείο
 εσωτερικό, 3
 συσσώρευσης, 4
 σταθερά
 Lipschitz, 6
 ισοτροπίας, 131
 λογαριθμικά κοίλου μέτρου,
 155
 σταυρωτό πολύτοπο, 39

συμμετρικοποίηση Steiner, 101
 συμπαγές σύνολο, 5
 συνάρτηση
 Lipschitz, 6, 224
 απόλυτα συνεχής, 6
 Γ, 259
 γνήσια κυρτή, 17
 κυρτή, 17
 λογαριθμικά κοίλη, 150
 στήριξης, 47
 συνεχής, 6
 συνέχεια
 εμβαδού επιφανείας, 204
 εσωτερικού γινομένου, 9
 ευκλείδειας νόρμας, 9
 όγκου, 81
 συνεχής συνάρτηση, 6
 σύνολο
 γνήσια κυρτό, 12
 εσωτερικό, 3
 κεντρικά συμμετρικό, 33
 κλειστή θήκη, 4
 κυρτό, 11
 μετρήσιμο, 89
 παράγωγο, 4
 συμπαγές, 5
 σύνορο, 5
 σχετικό εσωτερικό, 3
 φραγμένο, 5
 σύνορο συνόλου, 5
 σφαίρα
 μοναδιαία, 5
 σχετικό εσωτερικό συνόλου, 3
 σώμα
 μη ισοτροπικό, 137

Τ

τετράεδρο (simplex), 39
 τριγωνική ανισότητα, 8
 τύπος του Stirling, 268

Υ

υπερεπίπεδο, 12
 στήριξης, 47
 υπερκύβος, 34
 υπεροκτάεδρο κανονικό, 39

Φ

φραγμένο σύνολο, 5

Χ

χώρος
 $C[a, b]$, 31
 $L_p[a, b]$, 31
 του Gauss, 219, 220

Ευρετήριο ξενόγλωσσων όρων

B

- Ball, Keith, 189
Blaschke, θεώρημα επιλογής, 82
Blaschke-Santaló, ανισότητα, 116
Borel, λήμμα, 97
Brunn, αρχή, 96
Brunn-Minkowski, ανισότητα, 87, 91
Brunn-Minkowski, ανισότητα, αθροιστική μορφή, 92
Brunn-Minkowski, ανισότητα, πολλαπλασιαστική μορφή, 91

C

- cross-polytope, 39

D

- Dvoretzky, 247, 254

E

- Euler, 259

F

- Fubini, 87

G

- Gauss, 219, 220
Grassmanian, 216
Gross, θεώρημα σφαιρικότητας, 111

H

- Haar, 211
herpolhode, 140
Hölder, ανισότητα, 87

I

- invariable plane, 140

J

- John, Fritz, 163

- Jordan μετρήσιμο, 66

K

- k -neighborly polytope, 52

L

- Laplace, μέθοδος, 261
Lebesgue, μέτρο, 89
Lipschitz, 224

M

- Milman, V, 247

N

- neighborly polytope, 52

P

- polhode, 140
polytope
 cross, 39
Prekopa-Leindler, ανισότητα, 87

R

- Radon, 39
Rogers, 254

S

- simplex, 39
singular value decomposition, 123
Steiner, συμμετρικοποίηση, 101
Stirling, τύπος, 268

Στοιχειοθεσία: Lua^AT_EX
Postscript producer: dvips
PDF distiller: Ghostscript
Γραμματοσειρές: GFS NeoHellenic
2d-γραφικά: PStricks
3d-γραφικά: PStricks & Inkscape
Persistent Ray Tracer: Povray
