ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΜΕΤΡΟΥ

Σάμος 2009

Επιλογή υλικού

Αντώνης Τσολομύτης
Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Τμήμα Μαθηματικών.

Δημιουργία πρώτου ηλεκτρονικού αρχείου

Μαγδαληνή Πλιόγκα
Απόφοιτος του Τμήματος Μαθηματικών
του Πανεπιστημίου Αιγαίου.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Το πεδίο ορισμού ενός μέτρου

1.1 Εισαγωγή

Πρόβλημα: ο καθορισμός/υπολογισμός του όγκου ή της επιφάνειας στον $\mathbb{R}^3$ ή $\mathbb{R}^2$ χωρίων που φράσονται από επιφάνειες ή καμπύλες οι οποίες δεν είναι τόσο καλές ώστε να αποδίδουν οι τεχνικές του Απειροστικού Λογισμού.

Το βέλτιστο/επιθυμητό θα ήταν η ύπαρξη συνάρτησης

$$\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$$

ώστε οι τιμές της στα «καλά» σύνολα να συμπίπτουν με αυτές που δίνει ο Απειροστικός Λογισμός.

Επιθυμητές ιδιότητες:

(i) αν $E_1, E_2, \ldots$ πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία ξένων συνόλων τότε

$$\mu(E_1 \cup E_2 \cup \ldots) = \mu(E_1) + \mu(E_2) + \ldots$$

(ii) αν το E είναι μεταφορά, στροφή ή ανάκλαση του F τότε $\mu(E) = \mu(F)$

(iii) θέλουμε η συνάρτηση να μην είναι ταυτοτικά μηδέν. Οπότε θέτουμε κάποια κανονικοποίηση, για παράδειγμα, $\mu(Q) = 1$ όπου Q ο μοναδιαίος κύβος

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < x_j < 1 \text{ για } j = 1, \ldots, n\}$$

Δυστυχώς κάτι τέτοιο είναι ανέφικτο ακόμα και στην περίπτωση $n = 1$. Ας δούμε γιατί:

Ορίζουμε στο σύνολο $[0, 1)$ μια σχέση ισοδυναμίας: $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Από κάθε κλάση ισοδυναμίας επιλέγουμε ένα στοιχείο και σχηματίζουμε το σύνολο E (αυτό απαιτεί το αξίωμα της επιλογής). Για κάθε $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$ ορίζουμε το σύνολο

$$E_r = \{y + r : y \in E \cap [0, 1 - r)\} \cup \{y + r - 1 : y \in E \cap [1 - r, 1)\}.$$

Θα δείξουμε ότι για κάθε $x \in [0, 1)$ υπάρχει ακριβώς ένα $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$ ώστε $x \in E_r$. Έστω $x \in [0, 1)$ και έστω $y \in [x] \cap E$ (το E περιέχει ένα στοιχείο από κάθε κλάση ισοδυναμίας). Θέτω

$$r = \begin{cases} x - y & \text{αν } x \geqslant y \\ x - y + 1 & \text{αν } x < y. \end{cases}$$

Σε κάθε περίπτωση $x \in E_r$. Διότι αν $x \geqslant y$ τότε $x = y + r$, $y \in E$ και $y = x - r \leqslant 1 - r$. Αλλιώς αν $x < y$ τότε $x = y + r - 1$, $y \in E$, και $y = x - r + 1 \geqslant 1 - r$ και $y = x - r + 1 < 1 \Leftrightarrow x < r = x - y + 1 \Leftrightarrow y < 1$.

Δείξαμε ότι για κάθε $x \in [0, 1)$ υπάρχει $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$ ώστε $x \in E_r$. Τώρα θα δείξουμε ότι αυτό το r είναι μοναδικό. Αν $x \in E_r \cap E_s$ και $r \neq s$ το $x - r$ ή το $x - r + 1$, και το $x - s$ ή το $x - s + 1$, είναι διακεκριμένα στοιχεία του E (διότι $x - r = x - s \Leftrightarrow r = s$ και $x - r = x - s + 1 \Leftrightarrow r = s - 1 < 0, r \in [0, 1)$), που όμως ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας αφού έχουν ρητή διαφορά. Αυτό είναι αδύνατο.

Έστω τώρα ότι το $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ ικανοποιεί τα (i), (ii) και (iii). Από το (i) και (ii), $\mu(E) = \mu(E \cap [0, 1 - r)) + \mu(E \cap [1 - r, 1)) = \mu(E_r)$ για κάθε $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$. Αλλά το $\mathbb{Q} \cap [0, 1)$ είναι αριθμήσιμο οπότε

$$1 \overset{\text{(iii)}}{=} \mu([0, 1)) \overset{\text{(i)}}{=} \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} \mu(E_r) \overset{\text{(ii)}}{=} \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} \mu(E)$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού $\sum_{r \in \mathbb{R}} \mu(E) < \infty \Rightarrow \mu(E) = 0$ αλλά τότε $\sum \mu(E) = 0 \neq 1$.

Θα μπορούσαμε να χαλαρώσουμε το (i) να ισχύει μόνο σε πεπερασμένα αθροίσματα, αλλά ούτε αυτό είναι καλό αφού η προσθετικότητα για άπειρες ακολουθίες είναι απαραίτητη για όλα τα αποτελέσματα συνέχειας και ορίων. Επιπλέον αν $n \geqslant 3$ αυτή η ασθενέστερη εκδοχή της (i) είναι ασύμβατη με τα (ii) και (iii).

Πράγματι το 1924 οι Banach και Tarski απέδειξαν το ακόλουθο καταπληκτικό αποτέλεσμα: Αν U και V φραγμένα ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. Τότε υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ και υποσύνολα $E_1, \dots, E_k, F_1, \dots, F_k \in \mathbb{R}^n$ ώστε

(i) E_j ξένα και $\cup E_j = U$.

(ii) F_j ξένα και $\cup F_j = V$.

(iii) το F_j είναι μεταφορές ή/και στροφές ή/και ανακλάσεις του E_j, $\forall j = 1, \dots$

Διέξοδος: Αλλάζουμε το πεδίο ορισμού του μ από το να είναι όλο το $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ να είναι κατάλληλες υποοικογένειες. Τα μ λέγονται μέτρα και εμφανίζονται σε διάφορα επιστημονικά αντικείμενα όπως στη φυσική ως κατανομή μάζας ή στις πιθανότητες ως πιθανότητα.

1.2 σ-άλγεβρες

Έστω $X \neq \emptyset$. Μια *άλγεβρα* συνόλων στο X είναι μια μη κενή οικογένεια συνόλων $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ η οποία είναι κλειστή στις πεπερασμένες ενώσεις και στα συμπληρώματα. Δηλαδή, αν $E_1, E_2, \dots, E_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \cup_{j=1}^n E_j \in \mathcal{A}$ και $\forall E \in \mathcal{A} \Rightarrow E^c \in \mathcal{A}$. Αν αλλάξουμε τον ορισμό ώστε αριθμήσιμες ενώσεις να ανήκουν στην $\mathcal{A}$ τότε έχουμε τον ορισμό της σ-άλγεβρας.

Παρατήρηση 1.2.1. $\cap_j E_j = (\cup_j E_j^c)^c \in \mathcal{A}$ άρα μια σ-άλγεβρα περιέχει και αριθμήσιμες τομές των στοιχείων της. Έτσι αν $E \in \mathcal{A}$ $(\mathcal{A} \neq \emptyset) \Rightarrow E^c \in \mathcal{A} \Rightarrow \emptyset = E \cap E^c \in \mathcal{A} \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{A}$. Επίσης $X = E \cup E^c \in \mathcal{A} \Rightarrow X \in \mathcal{A}$.

Παρατήρηση 1.2.2. Μια άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα αν είναι κλειστή στις αριθμήσιμες ενώσεις ξένων στοιχείων της: Αν $(E_j)_{j=1}^{n} \subseteq \mathcal{A}$ θέτουμε

$$F_k = E_k \setminus \left[\bigcup_{1}^{k-1} E_j\right] = E_k \cap \left(\bigcup_{1}^{k-1} E_j\right)^c \in \mathcal{A}$$

και (F_j) ξένα και επιπλέον $\cup F_k = \cup E_k$. Αυτό το τέχνασμα, το να μετατρέπει κανείς μια οικογένεια συνόλων σε σύνολα ξένα μεταξύ τους με την ίδια ένωση, θα χρησιμοποιηθεί συχνά παρακάτω.

Παράδειγμα 1: Για κάθε σύνολο X, το $\mathcal{P}(X)$ και το $\{\emptyset, X\}$ είναι σ-άλγεβρες.
Παράδειγμα 2: Αν X υπεραριθμήσιμο (για παράδειγμα, $X = \mathbb{R}$) η

$$\mathcal{A} = \{E \subseteq X : E \text{ αριθμήσιμο ή } E^c \text{ αριθμήσιμο}\}$$

είναι η σ-άλγεβρα των αριθμήσιμων συνόλων ή συν-αριθμήσιμων συνόλων.

Είναι εύκολο να ελέγξει κανείς ότι η τομή σ-άλγεβρων είναι σ-άλγεβρα. Έτσι αν $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ υπάρχει μοναδική ελάχιστη σ-άλγεβρα $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ που περιέχει την οικογένεια $\mathcal{E}$ (η τομή όλων των σ-άλγεβρων που περιέχουν την $\mathcal{E}$ και υπάρχει τουλάχιστον μία τέτοια, η $\mathcal{P}(X)$). Η $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ λέγεται «η σ-άλγεβρα που παράγεται από την $\mathcal{E}$».

Παρατήρηση 1.2.3. *Αν* $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{F}) \Rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{F})$.

Ορισμός 1.2.4. *Αν X μετρικός ή τοπολογικός χώρος, η σ-άλγεβρα που παράγεται από τα ανοιχτά υποσύνολα του X λέγεται Borel σ-άλγεβρα και συμβολίζεται με $\mathcal{B}_X$. Τα στοιχεία της λέγονται σύνολα Borel. Η $\mathcal{B}_X$ περιέχει ανοιχτά, κλειστά σύνολα, αριθμήσιμες ενώσεις κλειστών συνόλων κ.λπ.*

Αριθμήσιμη τομή ανοιχτών συνόλων ονομάζονται G_δ σύνολα.

Αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων ονομάζονται F_σ σύνολα.

Αριθμήσιμη ένωση G_δ συνόλων ονομάζονται $G_{\delta\sigma}$ σύνολα.

Αριθμήσιμη τομή F_σ συνόλων ονομάζονται $F_{\sigma\delta}$ σύνολα.

(δ και σ από τα γερμανικά Durchschnitt και Summe, δηλαδή τομή και ένωση).

Η Borel σ-άλγεβρα στο $\mathbb{R}$ θα είναι σημαντική παρακάτω και γι' αυτό δίνουμε στην επόμενη πρόταση διάφορους τρόπους με τους οποίους μπορεί να παραχθεί.

Πρόταση 1.2.5. *Η $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ μπορεί να παραχθεί από τις ακόλουθες οικογένειες:*

ανοιχτά διαστήματα $\mathcal{E}_1 = \{(\alpha, b) : \alpha < b\}$

κλειστά διαστήματα $\mathcal{E}_2 = \{[\alpha, b] : \alpha < b\}$

ημι-ανοιχτά διαστήματα $\mathcal{E}_3 = \{(\alpha, b] : \alpha < b\}$ *ή* $\mathcal{E}_4 = \{[\alpha, b) : \alpha < b\}$

$\mathcal{E}_5 = \{(\alpha, \infty) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ *ή* $\mathcal{E}_6 = \{(-\infty, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$

$\mathcal{E}_7 = \{[\alpha, \infty) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ *ή* $\mathcal{E}_8 = \{(-\infty, \alpha] : \alpha \in \mathbb{R}\}$

Απόδειξη: Όλα τα παραπάνω είναι σύνολα Borel, άρα $\mathcal{M}(\mathcal{E}_j) \subseteq \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Κάθε ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμη ένωση διαστημάτων, άρα $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{E}_1)$. Ομοίως κάθε $\mathcal{M}(\mathcal{E}_j)$, $j \geqslant 2$, περιέχει τα ανοιχτά διαστήματα, άρα $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{E}_j)$. □

Έστω $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ συλλογή μη κενών συνόλων και έστω $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Επίσης $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ η προβολή στην α-συντεταγμένη. Αν $\mathcal{M}_\alpha$ είναι μια σ-άλγεβρα στο X_α για κάθε α, η σ-άλγεβρα γινόμενο στο X είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από τα

$$\{\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) : E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha, \alpha \in A\}.$$

Αυτή τη σ-άλγεβρα τη συμβολίζουμε με $\bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$.

Πρόταση 1.2.6. *Αν A αριθμήσιμο, τότε η $\bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$ είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από τα $\{\prod_{\alpha \in A} E_\alpha : E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha\}$.*

Απόδειξη: $E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha \Rightarrow \pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) = \prod_{\beta \in A} E_\beta$ με $E_\beta = X_\beta$ $\forall \beta \neq \alpha$ άρα $\bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha \subseteq \mathcal{M}\{\prod_{\alpha \in A} E_\alpha : E_\alpha \in M_\alpha\}$ (είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από τα $\{\prod_{\alpha \in A} E_\alpha : E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha\}$). Αντιστρόφως, $\prod_{\alpha \in A} E_\alpha = \cap_{\alpha \in A} \pi_\alpha^{-1}(E_\alpha)$ το οποίο ανήκει στο $\bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$, γιατί το A είναι αριθμήσιμο. Άρα η τομή είναι αριθμήσιμη και $\{\prod_{\alpha \in A} E_\alpha : E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha\} \subseteq \bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$. Από την Παρατήρηση 1.2.3 έπεται ότι $\mathcal{M}\{\prod_{\alpha \in A} E_\alpha : E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha\} \subseteq \bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$. □

Πρόταση 1.2.7. *Έστω ότι η $\mathcal{M}_\alpha$ παράγεται από την οικογένεια $\mathcal{E}_\alpha$, $\alpha \in A$. Τότε η $\bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$ παράγεται από την $\mathcal{F}_1 = \{\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) : E_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha, \alpha \in A\}$. Αν A αριθμήσιμο και $X_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha$, $\forall \alpha$, τότε η $\bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$ παράγεται από την $\mathcal{F}_2 = \{\prod_{\alpha \in A} : E_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha\}$.*

Απόδειξη: Φανερά $\mathcal{M}(\mathcal{F}_1) \subseteq \bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$. Αντιστρόφως $\forall \alpha$, η $\{E \subseteq X_\alpha : \pi_\alpha^{-1}(E) \in \mathcal{M}(\mathcal{F}_1)\}$ είναι σ-άλγεβρα στο X_α που περιέχει την $\mathcal{E}_\alpha$, άρα και την $\mathcal{M}_\alpha$. Δηλαδή $\pi_\alpha^{-1}(E) \in \mathcal{M}(\mathcal{F}_1)$, $\forall E \in \mathcal{M}_\alpha$, $\forall \alpha \in A$ και άρα $\bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{F}_1)$. Ο δεύτερος ισχυρισμός προκύπτει από τον πρώτο όπως στην απόδειξη της Πρότασης 1.2.6. □

Για την επόμενη πρόταση, υπενθυμίζουμε ότι αν (X_1, ρ_1), $(X_2, \rho_2), \ldots, (X_n, \rho_n)$ είναι μετρικοί χώροι, η μετρική γινόμενο ρ στο σύνολο $X = \prod_1^n X_j$ ορίζεται ως εξής: αν $x = (x_j)_{j=1}^n$, $y = (y_j)_{j=1}^n \in X$ τότε $\rho(x,y) = \max\{\rho_j(x_j, y_j) : j = 1, 2, \ldots, n\}$.

Πρόταση 1.2.8. *Έστω $X_1, \ldots, X_n$ μετρικοί χώροι και έστω $X = \prod_1^n X_j$, εφοδιασμένο με τη μετρική γινόμενο. Τότε $\bigotimes_{j=1}^n \mathcal{B}_{X_j} \subseteq \mathcal{B}_X$. Αν οι X_j είναι διαχωρίσιμοι τότε $\bigotimes_{j=1}^n \mathcal{B}_{X_j} = \mathcal{B}_X$.*

Απόδειξη: Η $\bigotimes_{j=1}^n \mathcal{B}_{X_j}$ παράγεται (από την Πρόταση 1.2.7) από τα σύνολα $\pi_j^{-1}(U_j)$, $1 \leqslant j \leqslant n$ με U_j ανοιχτό στον X_j. Αλλά αυτά τα σύνολα είναι ανοιχτά στον X άρα $\bigotimes_{j=1}^n \mathcal{B}_{X_j} \subseteq \mathcal{B}_X$. Έστω τώρα ότι $(x_j^k)_{k=1}^\infty$ πυκνό στον X_j και $\mathcal{E}_j$ η συλλογή των ανοιχτών μπαλών με κέντρα τα x_j^k, $k = 1, 2, \ldots$ και ρητή ακτίνα. Έτσι κάθε ανοιχτό σύνολο του X_j είναι ένωση στοιχείων της $\mathcal{E}_j$, και μάλιστα αριθμήσιμη ένωση αφού, η $\mathcal{E}_j$ είναι αριθμήσιμη. Τα στοιχεία του X με συντεταγμένες από τα x_j^k είναι αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολό του. Οι μπάλες του X, με κέντρα αυτά τα στοιχεία και ακτίνα ρητό r, είναι γινόμενα μπαλών ακτίνας r στα X_j, με κέντρο από τα x_j^k, $k = 1, 2, \ldots$ Έτσι η $\mathcal{B}_{X_j}$ παράγεται από την $\mathcal{E}_j$ και η $\mathcal{B}_X$ από τα $\{E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n : E_j \in \mathcal{E}_j\}$. Από την Πρόταση 1.2.7 έπεται ότι $\mathcal{B}_X = \bigotimes_{j=1}^n \mathcal{B}_{X_j}$. □

Πόρισμα 1.2.9. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

Ορισμός 1.2.10. *Μια οικογένεια $\mathcal{E}$, αποτελούμενη από υποσύνολα του X, λέγεται στοιχειώδης όταν*

(i) $\emptyset \in \mathcal{E}$

(ii) $E, F \in \mathcal{E} \Rightarrow E \cap F \in \mathcal{E}$

(iii) $E \in \mathcal{E} \Rightarrow$ *το E^c είναι πεπερασμένη ένωση στοιχείων της $\mathcal{E}$.*

Πρόταση 1.2.11. *Αν $\mathcal{E}$ είναι στοιχειώδης οικογένεια, η συλλογή $\mathcal{A}$ των πεπερασμένων ξένων ενώσεων στοιχείων της $\mathcal{E}$ είναι άλγεβρα.*

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι η

$$\mathcal{A} = \{\cup_{j=1}^{N} E_j \; : \; E_j \in \mathcal{E}, \text{ ξένα }, N \in \mathbb{N}\}$$

είναι άλγεβρα.

$\mathcal{A} \neq \emptyset$ διότι αν θέσουμε $N = 1$, $E_1 = \emptyset$ έπεται από τον ορισμό της $\mathcal{A}$ ότι $\emptyset \in \mathcal{A}$.

Για να είναι η $\mathcal{A}$ κλειστή στης πεπερασμένες ενώσεις, επειδή η πεπερασμένη ένωση στοιχείων της $\mathcal{A}$ είναι πεπερασμένη ένωση στοιχείων της $\mathcal{E}$, αρκεί να δείξουμε ότι αν $E_1, E_2, \ldots, E_N \in \mathcal{E}$ όχι απαραίτητα ξένα, τότε $\cup_{j=1}^{N} E_j \in \mathcal{A}$. Θα το δείξουμε με επαγωγή στο N. Αν $N = 1$ είναι προφανές. Αν $N = 2$ τότε αν E_1, $E_2 \in \mathcal{E}$ όχι απαραίτητα ξένα, τότε από την ιδιότητα (iii) της $\mathcal{E}$ (ορισμός 1.2.10) υπάρχουν $Z_1(E_2)$ και $Z_2(E_2) \in \mathcal{E}$ ξένα ώστε $E_2^c = Z_1(E_2) \cup Z_2(E_2)$. Οπότε

$$E_1 \cup E_2 = (E_1 \cap E_2^c) \cup E_2 = \big(E_1 \cap Z_1(E_2)\big) \cup \big(E_1 \cap Z_2(E_2)\big) \cup E_2$$

και τα τρια τελευταία σύνολα είναι φανερά ξένα, και λόγω της ιδιότητας (ii) της $\mathcal{E}$ (ορισμός 1.2.10) είναι στοιχεία της $\mathcal{E}$.

Έστω τώρα ότι οποιαδήποτε $N-1$ στοιχεία της $\mathcal{E}$ έχουν ένωση $\cup_{j=1}^{N-1} E_j$ που γράφεται ως ξένη πεπερασμένη ένωση στοιχείων της $\mathcal{E}$. Θεωρούμε N σύνολα $E_1, E_2, \ldots, E_N \in \mathcal{E}$. Από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει φυσικός αριθμός m και ξένα σύνολα $W_k \in \mathcal{E}$ ώστε $\cup_{j=1}^{N-1} E_j = \cup_{k=1}^{m} W_k$. Επιπλέον υπάρχουν ξένα σύνολα $Z_1(E_N)$, $Z_2(E_N)$ της $\mathcal{E}$ ώστε $E_N^c = Z_1(E_N) \cup Z_2(E_N)$. Έτσι,

$$\begin{aligned} \cup_{j=1}^{N} E_j &= \left(\bigcup_{k=1}^{m} W_k\right) \cup E_N \\ &= \left(\bigcup_{k=1}^{m} \big(W_k \cap Z_1(E_N)\big)\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{m} \big(W_k \cap Z_2(E_N)\big)\right) \cup E_N. \end{aligned}$$

Η ένωση αυτή είναι πεπερασμένη ξένη ένωση στοιχείων της $\mathcal{E}$ ολοκληρώνοντας το επαγωγικό βήμα.

Για τα συμπληρώματα τώρα, έστω ότι $\cup_{j=1}^{N} \in \mathcal{A}$ με τα E_j ξένα στοιχεία της $\mathcal{E}$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\big(\cup_{j=1}^{N} E_j\big)^c \in \mathcal{A}$. Όμως,

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{j=1}^{N} E_j\right)^c &= \bigcap_{j=1}^{N} \big(Z_1(E_j) \cup Z_2(E_j)\big) \\ &= \bigcup \big\{Z_{k_1}(E_1) \cap \ldots \cap Z_{k_N}(E_N) \; : \; k_1, k_2, \ldots, k_N \in \{1, 2\}\big\}, \end{aligned}$$

που είναι πεπερασμένη ένωση ξένων στοιχείων της $\mathcal{E}$. $\square$

1.3 Ασκήσεις

(i) Αποδείξτε ότι μια άλγεβρα $\mathcal{A}$ που είναι κλειστή στις αριθμήσιμες αύξουσες ενώσεις (δηλαδή, αν $E_j \in \mathcal{A}$ με $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$, τότε $\cup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{A}$) είναι απαραίτητα και σ-άλγεβρα.

(ii) Έστω ότι η $\mathcal{M}$ είναι μια σ-άλγεβρα με άπειρο πλήθος στοιχείων. Δείξτε ότι

(α) η $\mathcal{M}$ περιέχει μια άπειρη ακολουθία μη κενών ξένων συνόλων, ακολουθώντας τα εξής βήματα, και εφαρμόζοντάς τα εναλλάξ:

Βήμα 1 Δείξτε πρώτα ότι αν $B \in \mathcal{A}$ τότε η οικογένεια

$$\mathcal{A}_B = \{A \cap B \,:\, A \in \mathcal{A}\}$$

είναι σ-άλγεβρα στο σύνολο B.

Βήμα 2 Δείξτε (με απαγωγή στο άτοπο) ότι υπάρχει μη κενό $A \in \mathcal{A}$ ώστε η $\mathcal{A}$ έχει άπειρο πλήθος στοιχείων που είναι υποσύνολα του $X \setminus A$.

(β) η $\mathcal{M}$ είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο ($\text{card}(\mathcal{M}) \geqslant \mathfrak{c} := \text{card}(\mathbb{R})$). (Υπόδειξη: Αναπαραστήστε το διάστημα $(0,1)$ στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης και βρείτε μια ένα προς ένα απεικόνιση από το $(0,1)$ στην $\mathcal{A}$ χρησιμοποιώντας το (α).)

Κεφάλαιο 2

Μέτρα

Ορισμός 2.0.1. *Έστω ότι το σύνολο* X *είναι εφοδιασμένο με μια σ-άλγεβρα* $\mathcal{M}$. *Ένα μέτρο στον χώρο* $(X, \mathcal{M})$ *είναι μια συνάρτηση* $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ *ώστε*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) *αν* $(E_j)_{j=1}^{\infty}$ *ακολουθία ξένων συνόλων στην* $\mathcal{M}$ *τότε* $\mu(\cup_1^\infty E_j) = \sum_1^\infty \mu(E_j)$.

Η (ii) λέγεται «αριθμήσιμη προσθετικότητα» και συνεπάγεται την πεπερασμένη προσθετικότητα βάζοντας $E_j = \emptyset$ από κάποιο δείκτη και μετά. Το $(X, \mathcal{M})$ λέγεται μετρήσιμος χώρος και η τριάδα $(X, \mathcal{M}, \mu)$ χώρος μέτρου.

Αν $\mu(X) < \infty$ το μέτρο λέγεται πεπερασμένο. Αν $X = \cup_1^\infty E_j$, $E_j \in \mathcal{M}$, $\mu(E_j) < \infty$ $\forall j$, το μ λέγεται σ-πεπερασμένο. Αν $E = \cup_1^\infty E_j$, $E_j \in \mathcal{M}$, $\mu(E_j) < \infty$ $\forall j$, το E λέγεται σ-πεπερασμένο για το μέτρο μ. Τέλος, αν $\forall E \in \mathcal{M}$ με $\mu(E) = \infty$, τότε υπάρχει $F \in \mathcal{M}$ με $F \subseteq E$ ώστε $0 < \mu(F) < \infty$ το μ λέγεται ημιπεπερασμένο (semifinite). Κάθε σ-πεπερασμένο είναι ημιπεπερασμένο, αλλά δεν ισχύει το αντίστροφο. Συνήθως τα μέτρα είναι σ-πεπερασμένα. Όσα δεν είναι, έχουν συχνά παθολογική συμπεριφορά.

Παραδείγματα: (i) Έστω $X \neq \emptyset$, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ και $f : X \to [0, \infty]$ μια συνάρτηση. Η f ορίζει ένα μέτρο πάνω στην $\mathcal{M}$ ως εξής: $\mu(E) = \sum_{x \in E} f(x)$. Το μ είναι ημιπεπερασμένο αν και μόνο αν $f(x) < \infty$ $\forall x \in X$. Το μ είναι σ-πεπερασμένο αν και μόνο αν το μ είναι ημιπεπερασμένο και το $\{x : f(x) > 0\}$ είναι αριθμήσιμο

- Αν $f(x) = 1$ $\forall x$ το μ λέγεται «αριθμητικό μέτρο».
- Αν $f(x) = 0$ $\forall x \neq x_0$ και $f(x_0) = 1$ το μ λέγεται μέτρο Dirac στο x_0.

(Χρησιμοποιούμε τα ίδια ονόματα και για την περίπτωση όπου $\mathcal{M} \neq \mathcal{P}(X)$.)

(ii) Έστω X υπεραριθμήσιμο και $\mathcal{M}$ η σ-άλγεβρα των αριθμήσιμων και συναριθμήσιμων υποσυνόλων του X. Η απεικόνιση $\mu(E) = 0$ αν E αριθμήσιμο και $\mu(E) = 1$ αν E συναριθμήσιμο είναι μέτρο.

(iii) Έστω X απειροσύνολο, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ και $\mu(E) = 0$ αν E πεπερασμένο και $\mu(E) = \infty$ αν E άπειρο. Τότε το μ είναι πεπερασμένα προσθετικό μέτρο αλλά όχι μέτρο.

Θεώρημα 2.0.2. *Έστω* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *χώρος μέτρου.*

(i) (*Μονοτονία*) *Αν* $E, F \in \mathcal{M}$ *και* $E \subseteq F \Rightarrow \mu(E) \leqslant \mu(F)$.

(ii) (*Υποπροσθετικότητα*) *Αν* $(E_j)_1^\infty \subseteq \mathcal{M} \Rightarrow \mu(\cup_1^\infty E_j) \leqslant \sum_1^\infty \mu(E_j)$.

(iii) (*Συνέχεια από αριστερά*) *Αν* $(E_j)_1^\infty \subseteq \mathcal{M}$ *και* $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots \Rightarrow \mu(\cup_1^\infty E_j) = \lim_{j\to\infty} \mu(E_j)$.

(iv) (*Συνέχεια από δεξιά*) *Αν* $(E_j)_1^\infty \subseteq \mathcal{M}$ *και* $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \ldots$ *και* $\mu(E_n) < \infty$ *για κάποιο* $n \Rightarrow \mu(\cap_1^\infty E_j) = \lim_{j\to\infty} \mu(E_j)$.

Απόδειξη: (i) $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E) \geqslant \mu(E)$.

(ii) $F_1 = E_1$, $F_k = E_k \setminus (\cup_{j=1}^{k-1} E_j)$, $\forall k > 1$. Τα F_k είναι ξένα και $\cup_1^n F_j = \cup_1^n E_j$. Από το (i)

$$\mu\left(\bigcup_1^\infty E_j\right) = \mu\left(\bigcup_1^\infty F_j\right) = \sum_1^\infty \mu(F_j) \leqslant \sum_1^\infty \mu(E_j).$$

(iii) Θέτουμε $E_0 = \emptyset$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_1^\infty E_j\right) &= \mu\left(\bigcup_1^\infty (E_j \setminus E_{j-1})\right) = \sum_1^\infty \mu(E_j \setminus E_{j-1}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_1^n \mu(E_j \setminus E_{j-1}) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^n (E_j \setminus E_{j-1})\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^n E_j\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).
\end{aligned}$$

(iv) Θέτουμε $F_j = E_n \setminus E_j$, για κάθε $j > n$. Οπότε $F_{n+1} \subseteq F_{n+2} \subseteq \ldots$, $\mu(E_n) = \mu(F_j) + \mu(E_j)$, $\forall j > n$ και $\cup_{j=n+1}^\infty F_j = E_n \setminus (\cap_{j=1}^\infty E_j)$. Οπότε από το (iii) έχουμε

$$\mu(E_n) = \mu\left(\bigcap_1^\infty E_j\right) + \lim_{j\to\infty} \mu(F_j) = \mu\left(\bigcap_1^\infty E_j\right) + \lim_{j\to\infty} \big(\mu(E_n) - \mu(E_j)\big).$$

Επειδή $\mu(E_n) < \infty$ έχουμε

$$\mu\left(\bigcap_1^\infty E_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mu(E_j).$$

□

Παρατήρηση 2.0.3. Η συνθήκη $\mu(E_n) < \infty$ είναι απαραίτητη (για παράδειγμα $\cap_{n=1}^\infty [n, \infty) = \emptyset$).

Ορισμός 2.0.4. *Αν* $E \in \mathcal{M}$ *και* $\mu(E) = 0$. *Τότε το* E *λέγεται μηδενικό σύνολο. Έστω ότι μια πρόταση ισχύει για όλα τα* $x \in X$, *εκτός από τα* x *σε ένα σύνολο μέτρου μηδέν. Τότε λέμε ότι η πρόταση ισχύει σχεδόν παντού (σ.π.) ή «σχεδόν για κάθε* x*».*

Αν $\mu(E) = 0$ και $F \subseteq E$ τότε από τη μονοτονία του μ έχουμε ότι $\mu(F) = 0$, εφόσον βέβαια $F \in \mathcal{M}$ (π.χ. αν $\mathcal{M} = \{\emptyset, X\}$), αυτό μπορεί να μην είναι σωστό).

Ορισμός 2.0.5. *Ένα μέτρο λέγεται πλήρες, αν το πεδίο ορισμού του περιέχει όλα τα υποσύνολα των μηδενικών συνόλων.*

Θεώρημα 2.0.6. *Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ χώρος μέτρου, $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{M} : \mu(N) = 0\}$ και $\overline{\mathcal{M}} = \{E \cup F : E \in \mathcal{M}$ και $F \subseteq N$ για κάποιο $N \in \mathcal{N}\}$. Τότε η $\overline{\mathcal{M}}$ είναι σ-άλγεβρα και υπάρχει μοναδική επέκταση $\bar{\mu}$ του μ στην $\overline{\mathcal{M}}$, όπου $\bar{\mu}$ πλήρες. Το $\bar{\mu}$ λέγεται πλήρωση του μ και η $\overline{\mathcal{M}}$ πλήρωση της $\mathcal{M}$.*

Απόδειξη: Οι $\mathcal{M}$ και $\mathcal{N}$ είναι κλειστές στις αριθμήσιμες ενώσεις, άρα το ίδιο ισχύει και για την $\overline{\mathcal{M}}$. Αν $E \cup F \in \overline{\mathcal{M}}$ και $F \subseteq N$, $\mu(N) = 0$, $E \in \mathcal{M}$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $E \cap N = \emptyset$ (αλλιώς αντικαθιστούμε τα F,N με τα $F \setminus E$, $N \setminus E$). Έτσι $E \cup F = (E \cup N) \cap (N^c \cup F) \Rightarrow (E \cup F)^c = (E \cup N)^c \cup (N \setminus F)$. Όμως $(E \cup N)^c \in \mathcal{M}$ και $N \setminus F \subseteq N$, άρα $(E \cup F)^c \in \overline{\mathcal{M}}$. Άρα η $\overline{\mathcal{M}}$ είναι σ-άλγεβρα. Θέτουμε $\bar{\mu}(E \cup F) = \mu(E)$. Αυτό είναι καλά ορισμένο, διότι αν $E_1 \cup F_1 = E_2 \cup F_2$ $(F_j \subseteq N_j \in \mathcal{N}) \Rightarrow E_1 \subseteq E_2 \cup F_2$, οπότε $\mu(E_1) \leqslant \mu(E_2) + \mu(N_2) = \mu(E_2)$. Ομοίως $\mu(E_2) \leqslant \mu(E_1)$, άρα $\mu(E_1) = \mu(E_2) \Rightarrow \bar{\mu}(E_1 \cup F_1) = \bar{\mu}(E_2 \cup F_2)$. Εύκολα βλέπει κανείς ότι το $\bar{\mu}$ είναι πλήρες μέτρο στην $\overline{\mathcal{M}}$ και η μοναδική επέκταση του μ στη $\overline{\mathcal{M}}$. □

2.1 Εξωτερικά μέτρα

Τα εξωτερικά μέτρα είναι ένα εργαλείο με το οποίο μπορούμε να κατασκευάσουμε μέτρα.

Ορισμός 2.1.1. *Μια συνάρτηση $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ λέγεται εξωτερικό μέτρο αν*

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$,

(ii) *Αν* $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$,

(iii) $\mu^*(\cup_{j=1}^{\infty} A_j) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$.

Η ονομασία «εξωτερικό μέτρο» προκύπτει από τον τρόπο κατασκευής τους. Πρώτα ορίζει κανείς ένα είδος «πρότυπου-μέτρου» σε μια οικογένεια $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Μετά προσεγγίζει υποσύνολα του X «από έξω», με αριθμήσιμες ενώσεις στοιχείων του $\mathcal{E}$.

Πρόταση 2.1.2. *Έστω $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ και $\rho : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ ώστε $\emptyset \in \mathcal{E}$, $X \in \mathcal{E}$ και $\rho(\emptyset) = 0$. Για κάθε $A \subseteq X$ ορίζουμε*

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{1}^{\infty} \rho(E_j) : E_j \in \mathcal{E} \text{ και } A \subseteq \bigcup_{1}^{\infty} E_j \right\}.$$

Το μ^* είναι εξωτερικό μέτρο.

Απόδειξη: Φανερά αφού $X \in \mathcal{E}$ κάθε $A \subseteq X$ καλύπτεται από στοιχεία του $\mathcal{E}$. Άρα ο ορισμός του μ^* είναι καλός. Φανερά $\mu^*(\emptyset) = 0$ (βάζουμε $E_j = \emptyset$ $\forall j$). Επίσης, αν $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$ (τα καλύμματα του B είναι και καλύμματα του A). Έστω τώρα $A_j \subseteq X$ και έστω $\varepsilon > 0$, $\exists (E_j^k)_{k=1}^{\infty} : A_j \subseteq \cup_{k=1}^{\infty} E_j^k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \rho(E_j^k) \leqslant \mu^*(A_j) + \varepsilon 2^{-j}$. Αν $A = \cup_{j=1}^{\infty} A_j \Rightarrow A \subseteq \cup_{j,k=1}^{\infty} E_j^k$ και

$$\begin{aligned}
\mu^*(\cup_1^{\infty} A_j) &= \mu^*(A) \leqslant \sum_{j,k}^{\infty} \rho(E_j^k) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \rho(E_j^k) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} (\mu^*(A_j) + \varepsilon 2^{-j}) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Ορισμός 2.1.3. *Έστω μ^* εξωτερικό μέτρο στο X. Το $A \subseteq X$ λέγεται μ^*-μετρήσιμο αν $\forall E \subseteq X$*

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Φανερά, η $\mu^*(E) \leqslant \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ ισχύει από την υποπροσθετικότητα του μ^*, για κάθε E, για κάθε A. Άρα, για να δείξουμε ότι το A είναι μ^*-μετρήσιμο, αρκεί να δείξουμε ότι $\mu^*(E) \geqslant \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$, $\forall E$, με $\mu^*(E) < \infty$ (για $\mu^*(E) = \infty$ είναι προφανής).

Θεώρημα 2.1.4 (Το Θεώρημα του Καραθεοδωρή)**.** *Έστω μ^* εξωτερικό μέτρο στο X και $\mathcal{M}$ η συλλογή όλων των μ^*-μετρήσιμων υποσυνόλων του X. Τότε*

(i) *Η $\mathcal{M}$ είναι σ-άλγεβρα.*

(ii) *Το μ^* περιορισμένο στην $\mathcal{M}$ είναι πλήρες μέτρο.*

Απόδειξη: Η $\mathcal{M}$ είναι κλειστή στα συμπληρώματα γιατί ο ορισμός των μ^*-μετρήσιμων είναι συμμετρικός ως προς A και A^c. Αν $A, B \in \mathcal{M}$ και $E \subseteq X$, από την υποπροσθετικότητα έχουμε

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \\
&= \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) \\
&\qquad + \mu^*(E \cap A^c \cap B) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c) \\
&\geqslant \mu^*((E \cap A \cap B) \cup (E \cap A \cap B^c) \cup (E \cap A^c \cap B)) \\
&\qquad + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c) \\
&\geqslant \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c).
\end{aligned}$$

Άρα $A \cup B \in \mathcal{M}$, οπότε η $\mathcal{M}$ είναι άλγεβρα. Επιπλέον, το μ^* είναι πεπερασμένα προσθετικό, διότι αν $A, B \in \mathcal{M}$ και $A \cap B = \emptyset$, τότε

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*((A \cup B) \cap A) + \mu^*((A \cup B) \cap A^c) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Για να δείξουμε ότι η $\mathcal{M}$ είναι σ-άλγεβρα, αρκεί να δείξουμε ότι είναι κλειστή στις αριθμήσιμες ξένες ενώσεις. Έστω $(A_j)_{j=1}^{\infty}$ ακολουθία ξένων συνόλων της $\mathcal{M}$. Θέτουμε $B_n = \cup_{j=1}^{n} A_j$ και $B = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$. Έστω $E \subseteq X$, τότε

$$\begin{aligned}\mu^*(E\cap B_n) &= \mu^*((E\cap B_n)\cap A_n)+\mu^*((E\cap B_n)\cap A_n^c)\\ &= \mu^*(E\cap A_n)+\mu^*(E\cap B_{n-1}),\end{aligned}$$

αφού A_n ξένα με τα A_j, για $j<n$, οπότε $A_j \subseteq A_n^c$ για κάθε $j<n$. Με επαγωγή $\mu^*(E\cap B_n)=\sum_{j=1}^n \mu^*(E\cap A_j)$. Άρα

$$\mu^*(E)=\mu^*(E\cap B_n)+\mu^*(E\cap B_n^c)\geqslant \sum_{j=1}^n \mu^*(E\cap A_j)+\mu^*(E\cap B^c).$$

Αφήνοντας το $n\to\infty$ έχουμε

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &\geqslant \sum_{j=1}^\infty \mu^*(E\cap A_j)+\mu^*(E\cap B^c)\\ &\geqslant \mu^*(E\cap B)+\mu^*(E\cap B^c)\\ &\geqslant \mu^*(E).\end{aligned}$$

Άρα $B\in\mathcal{M}$ και η $\mathcal{M}$ είναι σ-άλγεβρα. Θέτοντας $E=B$ έχουμε

$$\mu^*(B)=\sum_{j=1}^\infty \mu^*(B\cap A_j)=\sum_{j=1}^\infty \mu^*(A_j)\Rightarrow \mu^*\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right)=\sum_{j=1}^\infty \mu(A_j),$$

δηλαδή το μ^* είναι αριθμήσιμα προσθετικό στην $\mathcal{M}$. Το $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ είναι πλήρες μέτρο, γιατί αν $\mu^*(A)=0$, $E\subseteq X$,

$$\mu^*(E)\leqslant \mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap A^c)=\mu^*(E\cap A^c)\leqslant \mu^*(E).$$

Άρα $A\in\mathcal{M}$. □

Το Θεώρημα του Καραθεοδωρή μας επιτρέπει να επεκτείνουμε μέτρα ορισμένα σε άλγεβρες, σε μέτρα σε σ-άλγεβρες.

Ορισμός 2.1.5. *Αν $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(X)$ είναι άλγεβρα, μια συνάρτηση $\mu:\mathcal{A}\to[0,\infty]$ λέγεται προμέτρο αν*

(i) $\mu(\emptyset)=0$,

(ii) *για ξένα $A_j\in\mathcal{A}$, αν $\cup_1^\infty A_j\in\mathcal{A}$ τότε $\mu(\cup_1^\infty A_j)=\sum_1^\infty \mu(A_j)$*

Ένα προμέτρο δεν είναι ακόμα μέτρο γιατί η $\mathcal{A}$ μπορεί να μην είναι σ-άλγεβρα.

Ένα προμέτρο μ σε μια άλγεβρα $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(X)$, δίνει ένα εξωτερικό μέτρο, το

$$\mu^*(E)=\inf\left\{\sum_1^\infty \mu(A_j): A_j\in\mathcal{A} \text{ και } E\subseteq\bigcup_1^\infty A_j\right\}. \tag{2.1}$$

Πρόταση 2.1.6. *Αν μ προμέτρο στην $\mathcal{A}$ και μ^* όπως στην* (2.1), *τότε*

(i) $\mu^*|_{\mathcal{A}}=\mu$.

(ii) *Κάθε $A\in\mathcal{A}$ είναι μ^*-μετρήσιμο.*

Απόδειξη: (i) Αν $E \in \mathcal{A}$ θα δείξουμε ότι $\mu(E) = \mu^*(E)$. Φανερά, $\mu(E) \geqslant \mu^*(E)$, γιατί θέτοντας $A_1 = E \in \mathcal{A}$ και $A_j = \emptyset$, $\forall j \geqslant 2$, ισχύει $E \subseteq \cup_1^\infty A_j$ και $\mu^*(E) \leqslant \sum_1^\infty \mu(A_j) = \mu(E)$. Αντιστρόφως, έστω $A_j \in \mathcal{A}$ με $E \subseteq \cup_1^\infty A_j$. Θα δείξουμε ότι $\sum_1^\infty \mu(A_j) \geqslant \mu(E)$, οπότε παίρνοντας infimum θα προκύψει $\mu^*(E) \geqslant \mu(E)$. Επειδή η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα, τα σύνολα $B_n = E \cap (A_n \setminus (\cup_{j=1}^{n-1} A_j))$ είναι στοιχεία της. Επίσης τα B_n είναι ξένα και η ένωσή τους είναι το E, αφού $E \subseteq \cup_1^\infty A_j$. Δηλαδή $E = \cup_1^\infty B_n$ και άρα $\cup_1^\infty B_n \in \mathcal{A}$. Έτσι από τον ορισμό του προμέτρου $\mu(E) = \sum_1^\infty \mu(B_j) \leqslant \sum_1^\infty \mu(A_j)$.

(ii) Έστω $A \in \mathcal{A}$ και $E \subseteq X$. Έστω $\varepsilon > 0$ και $(B_j)_{j=1}^\infty \subseteq \mathcal{A}$, με $E \subseteq \cup_{j=1}^\infty B_j$ και $\sum_1^\infty \mu(B_j) \leqslant \mu^*(E) + \varepsilon$. Χρησιμοποιώντας το ότι το μ είναι προμέτρο στη σχέση (2.2) παρακάτω, έχουμε

$$
\begin{aligned}
\mu^*(E) + \varepsilon &\geqslant \sum_1^\infty \mu(B_j) \\
&\geqslant \sum_1^\infty \mu(B_j \cap A) + \mu(B_j \cap A^c) \qquad (2.2)\\
&\overset{(i)}{=} \sum_1^\infty \mu^*(B_j \cap A) + \mu^*(B_j \cap A^c) \\
&\geqslant \mu^*\left(\bigcup_1^\infty B_j \cap A\right) + \mu^*\left(\bigcup_1^\infty B_j \cap A^c\right) \\
&\geqslant \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).
\end{aligned}
$$

Αυτή ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα το A είναι μ^*-μετρήσιμο. □

Θεώρημα 2.1.7. *Έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ άλγεβρα, μ προμέτρο στην $\mathcal{A}$ και $\mathcal{M}$ η σ-άλγεβρα που παράγεται από την $\mathcal{A}$.*

(i) *Υπάρχει μέτρο $\bar{\mu}$ στη $\mathcal{M}$ που $\bar{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$. Συγκεκριμένα, $\bar{\mu} = \mu^*|_{\mathcal{M}}$, όπου το μ^* ορίζεται από την* (2.1).

(ii) *Αν ν ένα άλλο τέτοιο μέτρο στη $\mathcal{M}$ τότε $\nu(E) \leqslant \bar{\mu}(E)$, για όλα τα $E \in \mathcal{M}$. Ισχύει η ισότητα όταν $\bar{\mu}(E) < \infty$.*

(iii) *Αν μ σ-πεπερασμένο, τότε το $\bar{\mu}$ είναι η μοναδική επέκταση του μ σε ένα μέτρο στη $\mathcal{M}$.*

Απόδειξη: Το (i) προκύπτει αμέσως από το Θεώρημα του Καραθεοδωρή και την Πρόταση 2.1.6, διότι η σ-άλγεβρα των μ^*-μετρήσιμων περιέχει την $\mathcal{A}$, άρα και τη $\mathcal{M}$.

(ii) Αν $E \in \mathcal{M}$, $E \subseteq \cup_{j=1}^\infty A_j$, $A_j \in \mathcal{A}$. Άρα $\nu(E) \leqslant \sum_1^\infty \nu(A_j) = \sum_1^\infty \mu(A_j)$. Παίρνοντας infimum έχουμε ότι $\nu(E) \leqslant \bar{\mu}(E)$. Παρατηρούμε ότι αν $A = \cup_{j=1}^\infty A_j$, έχουμε

$$\nu(A) = \lim_{n\to\infty} \nu(\cup_{j=1}^n A_j) = \lim_{n\to\infty} \mu(\cup_{j=1}^n A_j) = \bar{\mu}(A).$$

Άρα αν $\mu(E) < \infty$ διαλέγουμε τα A_j, ώστε $\bar{\mu}(A) \leqslant \bar{\mu}(E) + \varepsilon$ οπότε $\bar{\mu}(A \setminus E) < \varepsilon$. Έτσι έχουμε

$$
\begin{aligned}
\bar{\mu}(E) &\leqslant \bar{\mu}(A) = \mu(A) = \nu(A) = \nu(A \cap E) + \nu(A \cap E^c) \\
&\leqslant \nu(E) + \bar{\mu}(A \setminus E) \leqslant \nu(E) + \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Αφού ισχύει $\forall \varepsilon > 0$, έχουμε ότι $\bar{\mu}(E) = \nu(E)$.

(iii) Αν $X = \cup_1^\infty A_j$ με $\mu(A_j) < \infty$, τότε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα A_j είναι ξένα. Οπότε για κάθε $E \in \mathcal{M}$, έχουμε

$$\bar{\mu}(E) = \sum_1^\infty \bar{\mu}(E \cap A_j) \overset{(ii)}{=} \sum_1^\infty \nu(E \cap A_j) = \nu(E),$$

άρα $\bar{\mu} = \nu$. □

Ασκήσεις

(i) Αν $\mu_1, \dots, \mu_n$ μέτρα στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{M})$ και $a_1, \dots, a_n \in [0, \infty)$, τότε το $\sum_{j=1}^n a_j \mu_j$ είναι μέτρο τον $(X, \mathcal{M})$.

(ii) Αν $(X, \mathcal{M}, \mu)$ είναι χώρος μέτρου και $\{E_j\}_{j=1}^\infty \subseteq \mathcal{M}$, τότε

(α) $\mu(\liminf E_j) \leqslant \liminf \mu(E_j)$

(β) Αν $\mu(\cup_{j=1}^\infty E_j) < \infty$ τότε $\mu(\limsup E_j) \geqslant \limsup \mu(E_j)$. Υπενθύμιση: $\limsup E_j = \cap_{n=1}^\infty \cup_{j=n}^\infty E_j$ και $\liminf E_j = \cup_{n=1}^\infty \cap_{j=n}^\infty E_j$.

(iii) Αν $(X, \mathcal{M}, \mu)$ είναι χώρος μέτρου και $E, F \in \mathcal{M}$ τότε

$$\mu(E) + \mu(F) = \mu(E \cup F) + \mu(E \cap F).$$

(iv) Έστω ότι ο $(X, \mathcal{M}, \mu)$ είναι χώρος μέτρου και $E \in \mathcal{M}$. Ορίζουμε την απεικόνιση $\mu_E : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ θέτοντας $\mu_E(A) = \mu(E \cap A)$ για κάθε $A \in \mathcal{M}$. Δείξτε ότι το μ_E είναι μέτρο.

(v) Έστω ότι το μ^* είναι ένα εξωτερικό μέτρο στο σύνολο X που ορίζεται με τη βοήθεια μιας σ-άλγεβρας $\mathcal{M}$ στο X. Αποδείξτε ότι για κάθε $E \subseteq X$ ισχύει

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(B) \, : \, B \in \mathcal{M}, \text{ και } E \subseteq B\}.$$

(vi) Έστω ότι το μ^* είναι ένα εξωτερικό μέτρο στο σύνολο X που παράγεται από ένα προμέτρο και $\mu^*(X) < \infty$. Αν $E \subseteq X$ ορίζουμε το *εσωτερικό μέτρο* του E να είναι η ποσότητα $\mu_*(E) = \mu^*(X) - \mu^*(E^c)$. Με τη βοήθεια της προηγούμενης άσκησης, δείξτε ότι το E είναι μ^*-μετρήσιμο αν και μόνο αν $\mu^*(E) = \mu_*(E)$.

(vii) Έστω ότι η $\mathcal{A}$ είναι η συλλογή των πεπερασμένων ενώσεων συνόλων της μορφής $(a, b] \cap \mathbb{Q}$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty)$. Δείξτε ότι

(α) η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα στο $\mathbb{Q}$.

(β) Η σ-άλγεβρα που παράγεται από την $\mathcal{A}$ είναι η $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$.

(γ) Ορίζουμε το μ στην $\mathcal{A}$ με $\mu(\emptyset) = 0$ και $\mu(A) = \infty$ για κάθε $A \neq \emptyset$. Τότε το μ είναι προμέτρο στην $\mathcal{A}$ και υπάρχουν τουλάχιστον δύο μέτρα στην $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ των οποίων ο περιορισμός στην $\mathcal{A}$ είναι το μ.

2.2 Μέτρα Borel στο $\mathbb{R}$

Η σ-άλγεβρα $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ των Borel υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από τα ημιανοιχτά διαστήματα του $\mathbb{R}$, δηλαδή διαστήματα της μορφής $(\alpha, b]$ ή (α, ∞) ή $\emptyset$.

Έστω $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση, οπότε έχει πλευρικά όρια σε κάθε σημείο:

$$F(\alpha^+) = \lim_{x\to\alpha^+} F(x) = \inf_{x>\alpha} F(x),$$
$$F(\alpha^-) = \lim_{x\to\alpha^-} F(x) = \sup_{x<\alpha} F(x).$$

Επίσης τα $F(\infty) = \sup_{x\in\mathbb{R}} F(x)$ και $F(-\infty) = \inf_{x\in\mathbb{R}} F(x)$ υπάρχουν στο $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Η F είναι από δεξιά συνεχής αν $F(\alpha) = F(\alpha^+)$.

Πρόταση 2.2.1. *Έστω $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αύξουσα και δεξιά συνεχής. Αν τα $(\alpha_j, b_j]$, $j = 1, \dots, n$, είναι ξένα, θέτουμε*

$$\mu\left(\bigcup_1^n (\alpha_j, b_j]\right) = \sum_1^n (F(b_j) - F(\alpha_j))$$

και $\mu(\emptyset) = 0$. Τότε το μ είναι προμέτρο στην άλγεβρα $\mathcal{A}$ των ημιανοιχτών διαστημάτων (δηλαδή στην άλγεβρα που παράγεται από διαστήματα της μορφής $(\alpha, b]$, (α, ∞), $\emptyset$).

Απόδειξη: Το μ είναι καλά ορισμένο: αν τα $(\alpha, b] = \cup_1^n (\alpha_j, b_j]$ και τα $(\alpha_j, b_j]$ είναι ξένα, τότε μετά ίσως από μια επαναδιάταξη των διαστημάτων μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\alpha = \alpha_1 < b_1 = \alpha_2 < b_2 = \alpha_3 < b_3 = \ldots < b_n = b$, οπότε

$$\sum_1^n (F(b_j) - F(\alpha_j)) = F(b) - F(\alpha).$$

Γενοκότερα, αν $(I_i)_{i=1}^n$ και $(J_j)_{j=1}^m$ είναι πεπερασμένες ακολουθίες ξένων ημιανοιχτών διαστημάτων με $\cup_1^n I_i = \cup_1^m J_j$, το παραπάνω λέει ότι

$$\sum_1^n \mu(I_i) = \sum_1^n \sum_1^m \mu(I_i \cap J_j) = \sum_1^m \mu(J_j).$$

Έτσι το μ είναι καλά ορισμένο και πεπερασμένα προσθετικό.

Μένει να δείξουμε ότι αν $(I_j)_{j=1}^\infty$ είναι ακολουθία ξένων ημιανοιχτών διαστημάτων με $\cup_1^\infty I_j \in \mathcal{A}$ τότε $\mu(\cup_1^\infty I_j) = \sum_1^\infty \mu(I_j)$. Τα σύνολα της $\mathcal{A}$ φτιάχνονται με πεπερασμένες ενώσεις, τομές και συμπληρώματα ημιανοιχτών διαστημάτων. Επειδή οι πεπερασμένες τομές ημιανοιχτών διαστημάτων είναι ημιανοιχτό διάστημα και το συμπλήρωμα ενός ημιανοιχτού διαστήματος είναι ένωση δύο ξένων ημιανοιχτών διαστημάτων, κάθε στοιχείο της $\mathcal{A}$ είναι πεπερασμένη ένωση ξένων ημιανοιχτών διαστημάτων. Άρα αφού $\cup_1^\infty I_j \in \mathcal{A}$ το ίδιο θα ισχύει και για αυτό. Επειδή τώρα το μ είναι πεπερασμένα προσθετικό αρκεί να υποθέσουμε ότι το $\cup_1^\infty I_j$ είναι ένα ημιανοιχτό διάστημα $I = (\alpha, b]$. Τώρα

$$\mu(I) = \mu\left(\bigcup_1^n I_j\right) + \mu\left(I \setminus \bigcup_1^n I_j\right) \geqslant \mu\left(\bigcup_1^n I_j\right) = \sum_1^n \mu(I_j).$$

Άρα
$$\mu(I) \geqslant \sum_1^n \mu(I_j).$$
Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε πρώτα ότι $-\infty < \alpha < b < \infty$ και έστω $\varepsilon > 0$. Αφού F δεξιά συνεχής υπάρχει $\delta > 0 : F(\alpha+\delta) - F(\alpha) < \varepsilon$. Αν $I_j = (\alpha_j, b_j]$, $\forall j$ $\exists \delta_j > 0$ ώστε $F(b_j+\delta_j) - F(b_j) < \varepsilon 2^{-j}$. Τα ανοιχτά διαστήματα $(\alpha_j, b_j+\delta_j)$ καλύπτουν το συμπαγές σύνολο $[\alpha+\delta, b]$, οπότε υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Διαγράφοντας όσα $(\alpha_j, b_j+\delta_j)$ περιέχονται σε ένα άλλο τέτοιο σύνολο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

(i) τα $(\alpha_1, b_1+\delta_1), \ldots, (\alpha_N, b_N+\delta_N)$ καλύπτουν το $[\alpha+\delta, b]$,

(ii) $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_N$,

(iii) $b_j+\delta_j \in (\alpha_{j+1}, b_{j+1}+\delta_{j+1})$, για $j = 1, \ldots, N-1$.

Τώρα, χρησιμοποώντας στην (2.3) παρακάτω ότι $b_N+\delta_N > b$, $\alpha_1 < \alpha+\delta$ και F αύξουσα, έχουμε

$$\begin{aligned} \mu(I) &= \mu((\alpha+\delta, b]) + \mu((\alpha, \alpha+\delta]) \\ &\leqslant F(b) - F(\alpha+\delta) + \varepsilon \\ &\leqslant F(b_N+\delta_N) - F(\alpha_1) + \varepsilon \qquad (2.3) \\ &= F(b_N+\delta_N) - F(\alpha_N) + \sum_1^{N-1} (F(\alpha_{j+1}) - F(\alpha_j)) + \varepsilon \\ &\leqslant F(b_N+\delta_N) - F(\alpha_N) + \sum_1^{N-1} (F(b_j+\delta_j) - F(\alpha_j)) + \varepsilon \\ &= \sum_1^N (F(b_j+\delta_j) - F(\alpha_j)) + \varepsilon \\ &\leqslant \sum_1^N (F(b_j) + \varepsilon 2^{-j} - F(\alpha_j)) + \varepsilon \\ &= \sum_1^N \mu(I_j) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Άρα
$$\mu(I) \leqslant \sum_1^N \mu(I_j).$$
Αν $\alpha = -\infty$ το ίδιο επιχείρημα δίνει $F(b) - F(-M) \leqslant \sum_1^\infty \mu(I_j) + 2\varepsilon$, $\forall M < \infty$. Αν $b = \infty$ τότε $F(M) - F(\alpha) \leqslant \sum_1^\infty \mu(I_j) + 2\varepsilon$. Οπότε ολοκληρώνουμε την απόδειξη αφήνοντας το $\varepsilon \to 0$ και το $M \to \infty$. □

Θεώρημα 2.2.2. *Αν $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αύξουσα και δεξιά συνεχής συνάρτηση τότε υπάρχει ακριβώς ένα μ_F στην $\mathcal{B}_\mathbb{R}$, ώστε $\mu_F((\alpha, b]) = F(b) - F(\alpha)$, για κάθε $\alpha, b \in \mathbb{R}$. Αν G μια άλλη τέτοια συνάρτηση τότε $\mu_F = \mu_G \Leftrightarrow F - G =$ σταθερά. Αντιστρόφως, αν μ είναι ένα μέτρο στην $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ πεπερασμένο σε κάθε φραγμένο Borel σύνολο, τότε ορίζουμε*

$$F(x) = \mu((0, x]) \text{ αν } x > 0, \quad F(0) = 0, \quad F(x) = -\mu((x, 0]) \text{ αν } x < 0,$$

και αυτή η F *είναι αύξουσα, δεξιά συνεχής και* $\mu = \mu_F$.

Απόδειξη: Κάθε τέτοια F ορίζει ένα προμέτρο στην άλγεβρα $\mathcal{A}$ των ημιανοιχτών διαστημάτων από την προηγούμενη πρόταση. Φανερά οι F και G ορίζουν το ίδιο προμέτρο αν και μόνο αν $F - G$ σταθερά και τα προμέτρα είναι σ-πεπερασμένα αφού $\mathbb{R} = \cup_{-\infty}^{\infty}(j, j+1]$. Άρα τα δύο πρώτα προκύπτουν από το Θεώρημα 2.1.7

Για τον τελευταίο ισχυρισμό, η μονοτονία του μ συνεπάγεται ότι η F είναι αύξουσα. Η συνέχεια από δεξιά του μ (δες θεώρημα 2.0.2 (iv)) συνεπάγεται ότι η F είναι δεξιά συνεχής. Φανερά $\mu = \mu_F$ στην $\mathcal{A}$. Οπότε $\mu = \mu_F$ στην $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, από τη μοναδικότητα του Θεωρήματος 2.1.7 □

Παρατήρηση 2.2.3. Θα μπορούσαμε να είχαμε χρησιμοποιήσει διαστήματα της μορφής $[\alpha, b)$ και αριστερά συνεχείς συναρτήσεις.

Παρατήρηση 2.2.4. Αν μ πεπερασμένο μέτρο στην $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, τότε $\mu = \mu_F$ όπου $F(x) = \mu((-\infty, x])$.

Παρατήρηση 2.2.5. Η F λέγεται συνάρτηση κατανομής του μ (cumulative distribution function).

Παρατήρηση 2.2.6. Η θεωρία που αναπτύχθηκε μέχρι και το Θεώρημα 2.1.7 για κάθε αύξουσα, δεξιά συνεχή συνάρτηση F δίνει ένα πλήρες μέτρο $\bar{\mu}_F$ με πεδίο ορισμού συνήθως μεγαλύτερο της $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Στην πραγματικότητα το $\bar{\mu}_F$ είναι η πλήρωση του μ_F. Αυτό το πλήρες μέτρο θα το γράφουμε πάλι μ_F και θα το λέμε «το Lebesgue-Stieltjes μέτρο της F».

Έστω F αύξουσα και δεξιά συνεχής συνάρτηση και μ το πλήρες Lebesgue-Stieltjes μέτρο της F με πεδίο ορισμού το $\mathcal{M}$. Έτσι $\forall E \in \mathcal{M}$

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \inf\left\{\sum_1^{\infty}\big(F(b_j) - F(\alpha_j)\big) : E \subseteq \bigcup_1^{\infty}(\alpha_j, b_j]\right\} \\ &= \inf\left\{\sum_1^{\infty}\mu\big((\alpha_j, b_j]\big) : E \subseteq \bigcup_1^{\infty}(\alpha_j, b_j]\right\}. \end{aligned}$$

Λήμμα 2.2.7. *Για κάθε* $E \in \mathcal{M}$,

$$\mu(E) = \inf\left\{\sum_1^{\infty}\mu\big((\alpha_j, b_j)\big) : E \subseteq \bigcup_1^{\infty}(\alpha_j, b_j)\right\}.$$

Απόδειξη: Έστω $\nu(E) = \inf\{\sum_1^{\infty}\mu\big((\alpha_j, b_j)\big) : E \subseteq \cup_1^{\infty}(\alpha_j, b_j)\}$. Έστω $l_j = b_j - \alpha_j$ και $I_{jk} = \big(b_j - l_j 2^{1-k}, b_j - l_j 2^{-k}\big]$ για $k \in \mathbb{N}$. Έπεται $(\alpha_j, b_j) = \cup_{k=1}^{\infty} I_{jk}$, οπότε $E \subseteq \cup_{j,k=1}^{\infty} I_{jk}$ και επειδή τα $(I_{jk})_k$ είναι ξένα,

$$\sum_1^{\infty}\mu\big((\alpha_j, b_j)\big) = \sum_{j,k=1}^{\infty}\mu(I_{jk}) \geqslant \mu(E).$$

Άρα $\nu(E) \geqslant \mu(E)$. Αντιστρόφως, αν $\varepsilon > 0$, υπάρχει ακολουθία διαστημάτων $\{(\alpha_j, b_j]\}_1^{\infty}$ με $E \subseteq \cup_1^{\infty}(\alpha_j, b_j]$ και $\sum_1^{\infty}\mu\big((\alpha_j, b_j]\big) \leqslant \mu(E) + \varepsilon$ και $\forall j\ \exists \delta_j > 0$: $F(b + \delta_j) - F(b) < \varepsilon 2^{-j}$. Έτσι $E \subseteq \cup_1^{\infty}(\alpha_j, b_j + \delta_j)$ και

$$\sum_1^{\infty}\mu\big((\alpha_j, b_j + \delta_j)\big) \leqslant \sum_1^{\infty}\mu\big((\alpha_j, b_j]\big) + \varepsilon \leqslant \mu(E) + 2\varepsilon.$$

Άρα $\nu(E) \leqslant \mu(E)$. □

Θεώρημα 2.2.8. *Αν* $E \in \mathcal{M}$*, τότε*

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \inf\{\mu(U) : U \supseteq E, U \text{ ανοιχτό}\} \quad (\text{εξωτερική κανονικότητα}),\\ &= \sup\{\mu(K) : K \subseteq E, K \text{ συμπαγές}\} \quad (\text{εσωτερική κανονικότητα}). \end{aligned}$$

Απόδειξη: Αν U ανοιχτό με $U \supseteq E$ τότε $\mu(U) \geqslant \mu(E)$. Το U είναι αριθμήσιμη ένωση διαστημάτων (α_j, b_j), άρα

$$\begin{aligned} &\inf\{\mu(U) : U \supseteq E, U \text{ ανοιχτό}\}\\ &\qquad = \inf\left\{\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j)\right) \,:\, E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j)\right\}\\ &\qquad \leqslant \inf\left\{\sum_{1}^{\infty}\mu\big((\alpha_j, b_j)\big) \,:\, E \subseteq \cup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j)\right\} = \mu(E). \end{aligned}$$

Για τη δεύτερη ισότητα, έστω E φραγμένο. Αν $E = \overline{E}$ τότε E συμπαγές. Από την πρώτη ισότητα για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοιχτό U ώστε $U \supseteq \overline{E} \setminus E$: $\mu(U) \leqslant \mu(\overline{E} \setminus E) + \varepsilon$. Θέτω $K = \overline{E} \setminus U$. Το K είναι συμπαγές ως κλειστό υποσύνολο συμπαγούς, $K \subseteq E$ και

$$\begin{aligned} \mu(K) &= \mu(E) - \mu(E \cap U)\\ &= \mu(E) - [\mu(U) - \mu(U \setminus E)]\\ &\geqslant \mu(E) - \mu(U) + \mu(\bar{E} \setminus E)\\ &\geqslant \mu(E) - \varepsilon, \end{aligned} \tag{2.4}$$

όπου στην (2.4) χρησιμοποιούμε ότι τα $K, E \cap U$ είναι ξένα και $K \cup (E \cap U) = E$. Αν E δεν είναι φραγμένο, θέτουμε $E_j = E \cap (j, j+1]$. Από το προηγούμενο $\forall \varepsilon > 0$, υπάρχει συμπαγές $K_j \subseteq E_j$: $\mu(K_j) \geqslant \mu(E_j) - \varepsilon 2^{-j}$. Έστω $H_n = \cup_{-n}^{n} K_j$. Το H_n είναι συμπαγές υποσύνολο του E και

$$\begin{aligned} \mu(H_n) &= \mu(\cup_{j=-n}^{n} K_j) = \sum_{j=-n}^{n} \mu(K_j)\\ &\geqslant \sum_{j=-n}^{n}\left(\mu(E_j) - \varepsilon 2^{-j}\right) \geqslant \mu(\cup_{j=-n}^{n} E_j) - 2\varepsilon. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Αφού $\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(\cup_{-n}^{n} E_j)$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geqslant n_0$ να ισχύει $\mu(\cup_{j=-n}^{n} E_j) \geqslant \mu(E) - \varepsilon$ οπότε η (2.5) γίνεται $\mu(H_n) \geqslant \mu(E) - 3\varepsilon$, και το αποτέλεσμα έπεται. □

Θεώρημα 2.2.9. *Αν* $E \subseteq \mathbb{R}$*, τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) $E \in \mathcal{M}$.

(ii) $E = V \setminus N_1$ *όπου* V *είναι* G_δ *σύνολο και* $\mu(N_1) = 0$.

(iii) $E = H \cup N_2$ *όπου* H *είναι* F_σ *σύνολο και* $\mu(N_2) = 0$.

Απόδειξη: Αφού το μ είναι πλήρες, (ii)⇒(i) και (iii)⇒(i). Έστω $E \in \mathcal{M}$ και E φραγμένο. Από το προηγούμενο, $\forall j \in \mathbb{N}$, $\exists\, U_j \supseteq E \supseteq K_j$, με U_j ανοιχτό και K_j συμπαγές τέτοιο ώστε:

$$\mu(U_j) - 2^{-j} \leqslant \mu(E) \leqslant \mu(K_j) + 2^{-j}.$$

Έστω $V = \cap_{j=1}^{\infty} U_j$, $H = \cup_{j=1}^{\infty} K_j$. Τότε $\mu(V) = \mu(E) = \mu(H) < \infty$, οπότε $\mu(V \setminus E) = \mu(E \setminus H) = 0$. Άρα (i)⇒(ii) και (i)⇒(iii), όταν E φραγμένο. Αν το E δεν είναι φραγμένο, η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

□

Πρόταση 2.2.10. *Αν $\mu(E) < \infty$, τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ένα σύνολο A που είναι πεπερασμένη ένωση ανοιχτών διαστημάτων ώστε $\mu(E \triangle A) < \epsilon$.*

Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

2.3 Το μέτρο Lebesgue

Το μέτρο Lebesgue είναι το πλήρες μέτρο μ_F με $F(x) = x$ και θα το συμβολίζουμε με m. Τα Lebesgue μετρήσιμα σύνολα θα τα συμβολίζουμε με $\mathcal{L}$. Τον περιορισμό $m|_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}$ θα τον λέμε πάλι μέτρο Lebesgue.

Θεώρημα 2.3.1. *Αν $E \subseteq \mathbb{R}$ και $s, r \in \mathbb{R}$, έστω $E + s = \{x + s : x \in E\}$ και $rE = \{rx : x \in E\}$. Αν $E \in \mathcal{L}$ τότε $E + s$, $rE \in \mathcal{L}$ $\forall s, \forall r$ και $m(E + s) = m(E)$ και $m(rE) = |r|\, m(E)$.*

Απόδειξη: $\forall E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ορίζω $m_s(E) = m(E + s)$ και $m^r(E) = m(rE)$. Τα m_s και m^r ταυτίζονται με τα m και $|r|\, m$ αντίστοιχα στις πεπερασμένες ενώσεις διαστημάτων και άρα και στην $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ από το Θεώρημα 2.1.7 Επίσης αν $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ και $m(E) = 0$ τότε $m(E + s) = m(rE) = 0$. Έπεται ότι η $\mathcal{L}$ διατηρείται με μεταφορές και πολλαπλασιασμούς, (από το Θεώρημα 2.2.9), και $m(E + s) = m(E)$, $m(rE) = |r|\, m(E)$. □

Πρόταση 2.3.2. *Έστω C το σύνολο Cantor*

(i) *Το C είναι συμπαγές.*

(ii) *Αν $x, y \in C$ και $x < y$, υπάρχει $z \notin C$: $x < z < y$ οπότε το C είναι ολικά μη συνεκτικό και πουθενά πυκνό.*

(iii) *Το C δεν έχει μεμονωμένα σημεία.*

(iv) $m(C) = 0$.

(v) *card*(*C*)= c.

Απόδειξη: (i) Προφανές, γιατί το C είναι τομή κλειστών υποσυνόλων του $[0, 1]$.

(ii) Προφανές, αν τα x και y διαφέρουν για πρώτη φορά στον k όρο μετά την υποδιαστολή, $\alpha_k(x) = 0$ και $\alpha_k(y) = 2$. Θέτουμε z:

$$\alpha_n(z) = \begin{cases} \alpha_n(x), & \text{αν } n \neq k \\ 1, & \text{αν } n = k. \end{cases}$$

(iii) Αν $x_0 \in C$ μεμονωμένο $\exists \varepsilon > 0$: $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap C = \{x_0\}$. Έστω $x_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j 3^{-j}$, $\alpha_j \in \{0, 2\}$. Βρίσκουμε n τέτοιο ώστε : $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$. Θέτω $y = \sum_{j=1}^{\infty} b_j 3^{-j}$, όπου $b_j = \alpha_j$, $\forall j \neq n+1$ και $b_{n+1} = 0$ αν $\alpha_{n+1} = 2$, $b_{n+1} = 2$ αν $\alpha_{n+1} = 0$. Τότε $y \neq x_0$, $y \in C$,

$$|x_0 - y| \leqslant 2 \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{3^j} = 2\frac{\frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3^n} < \varepsilon,$$

το οποίο είναι άτοπο.

(iv)

$$m(C) = 1 - \sum_{0}^{\infty} \frac{2^j}{3^{j+1}} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - (2/3)} = 0.$$

(v) $\forall x \in C$, $x = \sum_1^{\infty} \alpha_j 3^{-j}$. Ορίζω $f(x) = \sum_1^{\infty} b_j 2^{-j}$. Τότε $b_j = 0$ αν $\alpha_j = 0$ και $b_j = 1$ αν $\alpha_j = 2$. Η f είναι 1-1 και επί: $C \to [0,1]$. □

Η f είναι αύξουσα, διότι αν $x < y$ τότε $f(x) < f(y)$, εκτός αν τα x, y είναι άκρα αφαιρούμενου διαστήματος. Σε αυτή τη περίπτωση $f(x) = p2^{-k}$ για κάποια p, k και τα $f(x), f(y)$ είναι οι δύο αναπαραστάσεις του ίδιου αριθμού στη βάση 2, άρα η f είναι αύξουσα. Έτσι η f επεκτείνεται σε όλο το $[0,1]$. Θέτοντας την σταθερή στα διαστήματα που αφαιρούνται με τιμή ίση με αυτή στα άκρα. Άρα $f : [0,1] \to [0,1]$ αύξουσα και επί. Άρα η f δεν έχει άλματα, συνεπώς είναι συνεχής. Η f λέγεται συνάρτηση Cantor ή Cantor-Lebesgue.

Πρόταση 2.3.3. $\mathcal{L} \neq \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Απόδειξη: card($\mathcal{L}$) =card($\mathcal{P}(\mathbb{R})$) $> c$ αφού κάθε υποσύνολο του C είναι $\mathcal{L}$-μετρήσιμο. Όμως card($\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$) $= c$. □

Ασκήσεις

(i) Αν $\mu(E) < \infty$ τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει σύνολο A που είναι πεπερασμένη ένωση ανοιχτών διαστημάτων ώστε $\mu(E \bigtriangleup A) < \epsilon$.

(ii) Έστω ότι η συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα και δεξιά συνεχής, και έστω μ_E το επαγόμενο μέτρο. Τότε

(α) $\mu_F\big(\{a\}\big) = F(a) - F(a^-)$

(β) $\mu_F\big([a, b)\big) = F(b^-) - F(a^-)$

(γ) $\mu_F\big([a, b]\big) = F(b) - F(a^-)$

(δ) $\mu_F\big((a, b)\big) = F(b^-) - F(a)$.

(iii) Αν $E \in \mathcal{L}$ και $m(E) > 0$, τότε για κάθε $0 < a < 1$ υπάρχει ανοιχτό διάστημα I ώστε $m(E \cap I) > am(I)$.

(iv) Αν $E \in \mathcal{L}$ και $m(E) > 0$, τότε το σύνολο $E - E = \{x - y \,:\, x, y \in E\}$ περιέχει ένα διάστημα της μορφής $(-\delta, \delta)$ για κατάλληλο $\delta > 0$.

Κεφάλαιο 3

Μετρήσιμες συναρτήσεις και ολοκλήρωμα

3.1 Μετρήσιμες συναρτήσεις

Αν $f : X \to Y$ και $\mathcal{N}$ σ-άλγεβρα στον Y, τότε το $\{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{N}\}$ είναι σ-άλγεβρα στον X. Η $f : (X, \mathcal{M}) \to (Y, \mathcal{N})$ λέγεται *μετρήσιμη συνάρτηση* αν $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$ $\forall E \in \mathcal{N}$.

Πρόταση 3.1.1. *Αν $\mathcal{N} = \mathcal{M}(\mathcal{E})$ τότε η f είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$ για κάθε $E \in \mathcal{E}$.*

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Αφού η f είναι μετρήσιμη, τότε $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$ για κάθε $E \in \mathcal{N}$, άρα και για κάθε $E \in \mathcal{E} \subseteq \mathcal{N}$.

($\Leftarrow$) Αρκεί να δείξουμε ότι $\{E \subseteq Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{M}\} \supseteq \mathcal{N}$. Όμως $\{E \subseteq Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{M}\} \supseteq \mathcal{E}$ και είναι σ-άλγεβρα, άρα $\{E \subseteq Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{M}\} \supseteq \mathcal{M}(\mathcal{E}) \supseteq \mathcal{N}$. $\square$

Πόρισμα 3.1.2. *Αν X, Y μετρικοί ή τοπολογικοί χώροι κάθε $f : X \to Y$ συνεχής, είναι $(\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y)$-μετρήσιμη.*

Ορισμός 3.1.3. *Η $f : (X, \mathcal{M}) \to \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ λέγεται μετρήσιμη αν είναι $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ ή $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$-μετρήσιμη. Ειδικά η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λέγεται Lebesgue μετρήσιμη αν είναι $(\mathcal{L}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$-μετρήσιμη. Φανερά η $f \circ g$ δεν είναι $\mathcal{L}$-μετρήσιμη γιατί θα πρέπει το $g^{-1}(E)$ να είναι στην $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ και όχι στην $\mathcal{L}$. Αν όμως περιοριστούμε σε Borel μετρήσιμες τότε η σύνθεση είναι μετρήσιμη.*

Πρόταση 3.1.4. *Η $f : X \to \mathbb{R}$ είναι $\mathcal{M}$-μετρήσιμη $\Leftrightarrow$ $f^{-1}((\alpha, \infty)) \in \mathcal{M}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, αν και μόνο αν $f^{-1}([\alpha, \infty)) \in \mathcal{M}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(-\infty, \alpha) \in \mathcal{M}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $f^{-1}((-\infty, \alpha]) \in \mathcal{M}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.*

Για $A \in \mathcal{M}$, η $f|_A$ λέγεται μετρήσιμη στο A αν $f^{-1}(E) \cap A \in \mathcal{M}$ για κάθε Borel E. Ισοδύναμα η $f|_A$ είναι $\mathcal{M}_A$ μετρήσιμη, όπου $\mathcal{M}_A = \{B \cap A : B \in \mathcal{M}\}$.

Αν X ένα σύνολο και $\{(Y_\alpha, \mathcal{N}_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ μια οικογένεια μετρήσιμων χώρων και $f_\alpha : X \to Y_\alpha$ είναι μια απεικόνιση $\forall \alpha \in A$, τότε υπάρχει ελάχιστη σ-άλγεβρα στον X ως προς την οποία όλες οι f_α είναι μετρήσιμες, δηλαδή η σ-άλγεβρα που παράγεται από όλα τα $f_\alpha^{-1}(E_\alpha)$ $\forall E_\alpha \in \mathcal{N}_\alpha$, $\forall \alpha \in A$. Αυτή η σ-άλγεβρα λέγεται η σ-άλγεβρα που παράγεται από τις f_α. Αν $X = \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$ τότε η σ-άλγεβρα γινόμενο όπως τη γνωρίζουμε είναι αυτή που παράγεται από τις προβολές $\pi_\alpha : X \to Y_\alpha$.

Πρόταση 3.1.5. *Έστω $(X, \mathcal{M})$ και $(Y_\alpha, \mathcal{N}_\alpha)$, $\alpha \in A$, μετρήσιμοι χώροι. $Y = \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$, $\mathcal{N} = \otimes_{\alpha\in A}\mathcal{N}_\alpha$, $\pi_\alpha : Y \to Y_\alpha$ οι προβολές. Τότε $f : X \to Y$ είναι $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-μετρήσιμη αν και μόνο αν η $f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$ είναι $(\mathcal{M}, \mathcal{N}_\alpha)$-μετρήσιμη $\forall\alpha$.*

Απόδειξη: Αν f μετρήσιμη τότε η f_α είναι μετρήσιμη ως σύνθεση μετρήσιμων. Αντίστροφα, αν κάθε f_α είναι μετρήσιμη τότε $\forall E_\alpha \in \mathcal{N}_\alpha$, έχουμε ότι $f^{-1}(\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha)) = f_\alpha^{-1}(E_\alpha) \in \mathcal{M}$. Οπότε η f είναι μετρήσιμη από την Πρόταση 3.1.1 □

Πόρισμα 3.1.6. *$f : X \to \mathbb{C}$ είναι $\mathcal{M}$-μετρήσιμη $\Leftrightarrow$ οι Ref και Imf είναι $\mathcal{M}$-μετρήσιμες.*

Απόδειξη: Αυτό προκύπτει από το $\mathcal{B}_\mathbb{C} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = \mathcal{B}_\mathbb{R} \otimes \mathcal{B}_\mathbb{R}$. □

Πρόταση 3.1.7. *Αν $f, g : X \to \mathbb{C}$ είναι $\mathcal{M}$-μετρήσιμες το ίδιο ισχύει και για τις $f + g$ και fg.*

Απόδειξη: Έστω $F : X \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, $\varphi : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ και $\psi : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με $F = (f, g)$, $\varphi(x, y) = x + y$, $\psi(x, y) = xy$. Αφού $\mathcal{B}_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}} = \mathcal{B}_\mathbb{C} \otimes \mathcal{B}_\mathbb{C}$ η F είναι $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}})$-μετρήσιμη, από την Πρόταση 3.1.5. Οι φ και ψ είναι $(\mathcal{B}_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}}, \mathcal{B}_\mathbb{C})$-μετρήσιμες, από το Πόρισμα 3.1.6. Επειδή $f + g = \varphi \circ F$ και $fg = \psi \circ F$ είναι $\mathcal{M}$-μετρήσιμες. □

Συχνά διευκολύνει να χρησιμοποιήσουμε το $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ όπου ορίζουμε $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \{E \subseteq \overline{\mathbb{R}} : E \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}_\mathbb{R}\}$. Είναι το ίδιο με το να ορίσουμε την Borel σ-άλγεβρα στο $\overline{\mathbb{R}}$ με μετρική $\rho(x, y) = |Ax - Ay|$ όπου $Ax = \arctan x$. Η $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ παράγεται από τις ημιευθείες $(\alpha, \infty]$ ή $[-\infty, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ και η $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι $\mathcal{M}$-μετρήσιμη αν είναι $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$-μετρήσιμη.

Πρόταση 3.1.8. *Αν f_j ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στον $(X, \mathcal{M})$ με τιμές στο $\overline{\mathbb{R}}$, τότε οι συναρτήσεις*

$$g_1(x) = \sup_j f_j(x), \qquad g_2(x) = \inf_j f_j(x),$$

$$g_3(x) = \limsup_{j\to\infty} f_j(x), \qquad g_4(x) = \liminf_{j\to\infty} f_j(x)$$

είναι όλες μετρήσιμες. Αν $\lim_{j\to\infty} f_j(x)$ υπάρχει $\forall x \in X$, τότε έχουμε ότι η $f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x)$ είναι μετρήσιμη.

Απόδειξη: Έχουμε ότι

$$g_1^{-1}((\alpha, \infty]) = \cup_1^\infty f_j^{-1}((\alpha, \infty]) \text{ και } g_2^{-1}([-\infty, \alpha)) = \cup_1^\infty f_j^{-1}([-\infty, \alpha)),$$

οπότε οι g_1 και g_2 είναι μετρήσιμες. Συνεπώς είναι μετρήσιμες και οι $h_k(x) = \sup_{j>k} f_j(x)$ άρα είναι μετρήσιμη και η $g_3 = \inf_{k\geqslant 1} h_k$. Ομοίως και η g_4. Τέλος αν η $f(x)$ υπάρχει $\forall x \in X$ τότε $f = g_3 = g_4$, οπότε η f είναι μετρήσιμη. □

Πόρισμα 3.1.9. *Αν $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μετρήσιμες τότε οι $\max\{f, g\}$ και $\min\{f, g\}$ είναι μετρήσιμες.*

Πόρισμα 3.1.10. *Αν* f_j *ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων με τιμές στο* $\mathbb{C}$ *και το* $f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x)$ *υπάρχει για κάθε* x *τότε η* f *είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη: Χωρίζουμε σε πραγματικό και φανταστικό μέρος και επανασυνθέτουμε. Από το Πόρισμα 3.1.6 το συμπέρασμα έπεται. □

Δυο χρήσιμες συναρτήσεις για την $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι οι

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \geqslant 0, \quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\} \geqslant 0.$$

Φανερά $f = f^+ - f^-$. Η f είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν οι f^+ και f^- είναι μετρήσιμες.

Αν $f : X \to \mathbb{C}$ η πολική αναπαράσταση είναι η σχέση

$$f = (\mathrm{sgn} f)\,|f| \text{ όπου } \mathrm{sgn}(z) = z/|z|, \forall z \neq 0 \text{ και } \mathrm{sgn}(0) = 0.$$

Η f είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν οι $|f|$ και $\mathrm{sgn} f$ είναι μετρήσιμες. (Η $z \to |z|$ είναι συνεχής οπότε η $z \to \mathrm{sgn}(z)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Άρα αν $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοιχτό, το $\mathrm{sgn}^{-1}(U)$ είναι είτε ανοιχτό είτε $V \cup \{0\}$ με V ανοιχτό. Σε κάθε περίπτωση είναι Borel μετρήσιμο.)

Αν $(X, \mathcal{M})$ μετρήσιμος χώρος και $E \subseteq X$, η χαρακτηριστική συνάρτηση χ_E του E (ή 1_E) ορίζεται ως εξής: $\chi_E(x) = 1$ αν $x \in E$, $\chi_E(x) = 0$ αν $x \in E^c$. Φανερά η χ_E είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν $E \in \mathcal{M}$. Μια *απλή* συνάρτηση στον X είναι ένας πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός με μιγαδικούς συντελέστες, χαρακτηριστικών συναρτήσεων συνόλων στην $\mathcal{M}$. Οι απλές συναρτήσεις δεν επιτρέπεται να έχουν τιμές $\pm\infty$. Ισοδύναμα $f : X \to \mathbb{C}$ απλή αν και μόνο αν f μετρήσιμη και $\mathrm{range}(f)$ πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Πράγματι αν $\mathrm{range}(f) = \{z_1, \ldots, z_n\}$, έστω $E_j = (f^{-1}(\{z_j\})$ οπότε $f = \sum_1^n z_j \chi_{E_j}$. Αυτή η αναπαράσταση καλείται συνήθης αναπαράσταση της f. Αναπαριστά την f ως γραμμικό συνδιασμό με διακεκριμμένους συντελεστές ξένων υποσυνόλων με ένωση τον X. Επίσης, αν f, g απλές τότε οι $f + g$, fg είναι απλές.

Θεώρημα 3.1.11. *Έστω* $(X, \mathcal{M})$ *μετρήσιμος χώρος.*

(i) *Αν* $f : X \to [0, \infty]$ *μετρήσιμη, υπάρχει ακολουθία* $\{\varphi_n\}$ *απλών συναρτήσεων, ώστε* $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant \cdots \leqslant f$, $\varphi_n \to f$ *κατά σημείο και* $\varphi_n \to f$ *ομοιόμορφα σε κάθε σύνολο στο οποίο η* f *είναι φραγμένη.*

(ii) *Αν* $f : X \to \mathbb{C}$ *μετρήσιμη, υπάρχουν* $\{\varphi_n\}$ *απλές, ώστε* $0 \leqslant |\varphi_1| \leqslant |\varphi_2| \leqslant \cdots \leqslant |f|$, $\varphi_n \to f$ *κατά σημείο, και* $\varphi_n \to f$ *ομοιόμορφα σε κάθε σύνολο στο οποίο η* f *είναι φραγμένη.*

Απόδειξη: (i) Αν $n \in \mathbb{N}$ και $0 \leqslant k \leqslant 2^{2n} - 1$, έστω

$$E_n^k = f^{-1}\big(\big(k2^{-n}, (k+1)2^{-n}\big]\big) \text{ και } F_n = f^{-1}((2^n, \infty]),$$

και ορίζουμε

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} k2^{-n}\chi_{E_n^k} + 2^n \chi_{F_n}.$$

Ελέγχουμε τώρα ότι $\varphi_n \leqslant \varphi_{n+1}$ για όλα τα n: παρατηρούμε ότι

$$\underbrace{f^{-1}\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]}_{A} = \underbrace{f^{-1}\left(\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right]}_{B} \bigcup \underbrace{f^{-1}\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right]}_{C}.$$

Όμως $\varphi_n|_A = k/2^n = \varphi_{n+1}|_B$ και $\varphi_{n+1}|_C = (2k+1)/2^{n+1} > k/2^n = \varphi_n|_C$. Οπότε $\varphi_n \leqslant \varphi_{n+1}$.

Έστω τώρα t ώστε $f(t) \leqslant 2^n$. Τότε υπάρχει k ώστε $f(t) \in (k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]$ για κάποιο $0 \leqslant k \leqslant 2^{2n} - 1$. Συνεπώς το t ανήκει στο $f^{-1}(k2^{-n}, (k+1)2^{-n}] = E_n^k$, οπότε $\varphi_n(t) = k2^{-n}$. Άρα $0 \leqslant f(t) - \varphi_n(t) \leqslant 2^{-n}$.

(ii) Αν $f = g + ih$ εφαρμόζουμε το (i) για τις g^+, g^-, h^+, h^-. □

Πρόταση 3.1.12. *Αν μ πλήρες, τότε*

(i) *αν f μετρήσιμη και $f = g$ σ.π. τότε η g είναι μετρήσιμη*

(ii) *αν f_n μετρήσιμη $\forall n$ και $f_n \to f$ σ.π. τότε η f είναι μετρήσιμη.*

Αν το μ δεν είναι πλήρες τα (i) και (ii) είναι εν γένει λάθος.

Όμως αν κανείς ξεχάσει να ελέγξει την πληρότητα του μ δε θα οδηγηθεί σε πολύ σοβαρά σφάλματα σύμφωνα με την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 3.1.13. *Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ χώρος μέτρου και $(X, \overline{\mathcal{M}}, \bar{\mu})$ η πλήρωση του. Αν f $\overline{\mathcal{M}}$-μετρήσιμη στον X υπάρχει $\mathcal{M}$-μετρήσιμη g ώστε $f = g$ $\bar{\mu}$-σχεδόν παντού.*

Απόδειξη: Αν $f = \chi_E$ με $E \in \overline{\mathcal{M}}$ είναι φανερό, οπότε προκύπτει και αν f $\overline{\mathcal{M}}$-μετρήσιμη απλή. Για τη γενική περίπτωση επιλέγουμε $\overline{\mathcal{M}}$-μετρήσιμες απλές $\varphi_n \to f$ κατά σημείο. Για κάθε n, έστω ψ_n $\mathcal{M}$-μετρήσιμη απλή με $\psi_n = \varphi_n$ σ.π. εκτός ενός συνόλου $E_n \in \overline{\mathcal{M}}$ με $\bar{\mu}(E_n) = 0$. Έστω $N \in \mathcal{M}$ ώστε $\mu(N) = 0$ και $N \supseteq \cup_1^\infty E_n$ και θέτουμε $g = \lim \psi_n \chi_{N^c}$. Τότε η g είναι $\mathcal{M}$-μετρήσιμη και $g = f$ στο N^c. □

Ασκήσεις

(i) Αν f_n ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στον $(X, \mathcal{M})$, τότε το σύνολο $\{x \in X :$ το $\lim f_n(x)$ υπάρχει$\}$, ανήκει στην $\mathcal{M}$.

(ii) Αν $f : X \mapsto \mathbb{R} \sup\{\pm\infty\} =: \overline{\mathbb{R}}$ και $f^{-1}\big((r, \infty]\big) \in \mathcal{M}$ για κάθε $r \in \mathbb{Q}$ τότε η f είναι μετρήσιμη.

(iii) Το supremum μιας υπεραριθμήσιμης οικογένειας μετρήσιμων συναρτήσεων με τιμές στο $\overline{\mathbb{R}}$ και πεδίο ορισμού τον $(X, \mathcal{M})$ δεν είναι απαραίτητα μετρήσιμη συνάρτηση.

(iv) Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ είναι μονότονη συνάρτηση τότε είναι Borel μετρήσιμη.

3.2 Ολοκλήρωση μη αρνητικών συναρτήσεων

Ο $(X, \mathcal{M}, \mu)$ θα είναι χώρος μέτρου και

$$L^+ = \{\text{μετρήσιμες συναρτήσεις } : X \to [0, \infty]\}.$$

Ορισμός 3.2.1. *Αν* φ *απλή συνάρτηση* $\in L^+$ *με συνήθη αναπαράσταση* $\varphi = \sum_1^n \alpha_j \chi_{E_j}$*, με τα* E_j *ξένα και* $\cup E_j = X$*. Ορίζουμε το ολοκλήρωμα της* φ *ως προς το μέτρο* μ *να είναι ο αριθμός*

$$\int \varphi d\mu = \sum_1^n \alpha_j \mu(E_j)$$

(με τη συνθήκη $0 \cdot \infty = 0$*). Παρατηρούμε ότι μπορεί να συμβεί* $\int \varphi d\mu = \infty$ *(π.χ.* $\varphi = \chi_{\mathbb{R}}$*). Αν πρέπει να φαίνεται η μεταβλητή της* φ*, γράφουμε* $\int \varphi(x) d\mu(x)$ *(κάποιοι προτιμούν να γράφουν* $\int \varphi(x)\mu(dx)$*).*

Ορισμός 3.2.2. *Αν* $A \in \mathcal{M}$ *επειδή* $\varphi\chi_A = \sum \alpha_j \chi_{E_j \cap A}$ *ορίζουμε*

$$\int_A \varphi d\mu = \int \varphi \chi_A d\mu.$$

Πρόταση 3.2.3. *Αν* φ, ψ *απλές στο* L^+ *τότε*

(i) *Αν* $c \geqslant 0$*,* $\int c\varphi = c \int \varphi$.

(ii) $\int (\varphi + \psi) = \int \varphi + \int \psi$.

(iii) *Αν* $\varphi \leqslant \psi$*, τότε* $\int \varphi \leqslant \int \psi$.

(iv) *Η απεικόνιση* $A \to \int_A \varphi$ *είναι μέτρο στην* $\mathcal{M}$.

Απόδειξη: (i) Είναι τετριμμένο.

(ii) Έστω $\varphi = \sum_1^n \alpha_j \chi_{E_j}$, $\psi = \sum_1^m b_k \chi_{F_k}$ οι συνήθεις αναπαραστάσεις των φ και ψ. Αφού $E_j = \cup_{k=1}^m (E_j \cap F_k)$, $F_k = \cup_{j=1}^n (E_j \cap F_k)$ και τα $(E_j \cap F_k)_k$ είναι ξένα, και τα $(E_j \cap F_k)_j$ είναι ξένα, η πεπερασμένη προσθετικότητα του μ δίνει

$$\int \varphi + \int \psi = \sum_{j,k} (\alpha_j + b_k)\mu(E_j \cap F_k) = \int (\varphi + \psi).$$

(iii) Αν $\varphi \leqslant \psi$, τότε $E_j \cap F_k \neq \emptyset \Rightarrow \alpha_j \leqslant b_k$. Οπότε

$$\int \varphi = \sum_{j,k} \alpha_j \mu(E_j \cap F_k) \leqslant \sum_{j,k} b_k \mu(E_j \cap F_k) = \int \psi.$$

(iv) Αν $(A_k)_1^\infty$ ξένα $\in \mathcal{M}$ και $A = \cup_1^\infty A_k$,

$$\int_A \varphi = \sum_j \alpha_j \mu(A \cap E_j) = \sum_{j,k} \alpha_j \mu(A_k \cap E_j) = \sum_k \int_{A_k} \varphi.$$

□

Ορισμός 3.2.4. *Αν* $f \in L^+$ *ορίζουμε*

$$\int f d\mu = \sup\left\{ \int \varphi d\mu : 0 \leqslant \varphi \leqslant f, \varphi \text{ απλή} \right\}.$$

Από το (iii) της Πρότασης 3.2.3 αυτός ο ορισμός δίνει την ίδια τιμή με τον ορισμό του ολοκληρώματος απλής συνάρτησης όταν η f είναι απλή. Επίσης, είναι φανερό ότι αν $f \leqslant g$ τότε $\int f \leqslant \int g$ και $\int cf = c\int f$ $\forall c \geqslant 0$. Το επόμενο θεώρημα μας επιτρέπει να υπολογίσουμε το $\int f$ χρησιμοποιώντας μια ακολουθία απλών που να αυξάνει στην f.

Θεώρημα 3.2.5 (Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης.). *Αν $f_n \in L^+$ και $f_j \leqslant f_{j+1}$ $\forall j$ και $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ $(= \sup_n f_n)$, τότε $\int f = \lim_{n\to\infty}\int f_n$.*

Απόδειξη: Η ακολουθία $\{\int f_n\}_n$ είναι αύξουσα, άρα συγκλίνει στο $\mathbb{R}\cup\infty$. Επίσης $\int f_n \leqslant \int f$ οπότε $\lim_{n\to\infty}\int f_n \leqslant \int f$. Για την αντίστροφη ανισότητα, έστω $\alpha \in (0,1)$ και φ απλή συνάρτηση με $0 \leqslant \varphi \leqslant f$. Θέτουμε $E_n = \{x : f_n \geqslant \alpha\varphi(x)\}$. Τότε η E_n είναι μια αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων και $\cup_{n=1}^{\infty} E_n = X$, διότι $0 < \alpha < 1$, $\varphi \leqslant f$ και $f_n \to f$. Έχουμε $\int f_n \geqslant \int_{E_n} f_n \geqslant \alpha\int_{E_n}\varphi$ διότι $f_n \geqslant f_n\chi_{E_n}$ και $f_n \geqslant \alpha\varphi$ στο E_n. Όμως από την Πρόταση 3.2.3 το $\int_A \varphi$ είναι μέτρο και αφού E_n αύξουσα, έχουμε ότι $\int\varphi = \int_{\cup E_n}\varphi = \lim_{n\to\infty}\int_{E_n}\varphi$ $(\mu(\cup E_n) = \lim\mu(E_n)$, αφού η E_n είναι αύξουσα). Άρα $\lim_{n\to\infty}\int f_n \geqslant \alpha\int\varphi$. Για $\alpha\to 1$ έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty}\int f_n \geqslant \int\varphi$, $\forall\varphi$ απλή και $0 \leqslant \varphi \leqslant f$. Παίρνοντας το supremum πάνω από όλες τις απλές $\varphi \leqslant f$ έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty}\int f_n \geqslant \int f$. □

Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος.

Θεώρημα 3.2.6. *Αν $\{f_n\}$ είναι πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία στο L^+ και $f = \sum_n f_n$. Τότε $\int f = \sum_n \int f_n$.*

Απόδειξη: Για δυο συναρτήσεις f_1 και f_2, έστω ακολουθίες απλών $\{\varphi_j\}$ και$\{\psi_j\}$ με την $\{\varphi_j\}$ να αυξάνει στην f_1 και $\{\psi_j\}$ να αυξάνει στην f_2. Οπότε η $\{\varphi_j+\psi_j\}$ αυξάνει στην f_1+f_2. Συνεπώς από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης,

$$\int(f_1+f_2) = \lim\int(\varphi_j+\psi_j) = \int f_1 + \int f_2.$$

Τα όρια υπάρχουν, αφού οι $\{\int\varphi_j\}$ και $\{\int\psi_j\}$ είναι αύξουσες. Από επαγωγή $\int\sum_1^N f_n = \sum_1^N\int f_n$ και για $N\to\infty$ από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε ότι $\sum_1^\infty\int f_n = \lim_{N\to\infty}\int\sum_1^N f_n = \int\sum_1^\infty f_n$. □

Πρόταση 3.2.7. *Αν $f \in L^+$ τότε $\int f = 0$ αν και μόνο αν $f = 0$ σ.π.*

Απόδειξη: Αν f απλή είναι προφανές γιατί $\sum_1^n \alpha_j\mu(E_j) = 0$ άρα είτε $\alpha_j = 0$ ή $\mu(E_j) = 0$. Γενικά αν $0 \leqslant \varphi \leqslant f$ με φ απλή και $f = 0$ σ.π. τότε $\varphi = 0$ σ.π. και $\int f = \sup_{\varphi\leqslant f}\int\varphi = 0$. Αντίστροφα, έστω $\int f = 0$ τότε $\{x : f(x) > 0\} = \cup_1^\infty E_n$, όπου $E_n = \{x : f(x) \geqslant n^{-1}\}$. Οπότε αν η f δεν είναι μηδέν σχεδόν παντού, $\mu(\{x : f(x) > 0\}) > 0 \Rightarrow \mu(\cup_1^\infty E_n) > 0$. Άρα $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\mu(E_{n_0}) > 0$. Αλλά τότε $f > n_0^{-1}\chi_{E_{n_0}}$, άρα $\int f \geqslant n_0^{-1}\mu(E_{n_0}) > 0$, το οποίο είναι άτοπο. □

Πόρισμα 3.2.8. *Αν $f_n \in L^+$, $f \in L^+$ και f_n αυξάνει στην f σ.π., τότε $\int f = \lim\int f_n$.*

Απόδειξη: Αν f_n αυξάνει στην f $\forall x \in E$ με $\mu(E^c) = 0$ τότε $f = f\chi_E$ σ.π. και $f_n = f_n\chi_E$ σ.π., οπότε $\int f = \int f\chi_E = \lim\int f_n\chi_E = \lim\int f_n$. □

Λήμμα 3.2.9 (Fatou). *Αν $\{f_n\}$ είναι μια ακολουθία στο L^+, τότε*

$$\int(\liminf f_n) \leqslant \liminf\int f_n.$$

Απόδειξη: Για κάθε k έχουμε ότι $\inf_{n\geqslant k} f_n \leqslant f_j \ \forall j \geqslant k$. Άρα $\int \inf_{n\geqslant k} f_n \leqslant \int f_j \ \forall j \geqslant k$. Άρα $\int \inf_{n\geqslant k} f_n \leqslant \inf_{j\geqslant k} \int f_j$. Αφήνουμε το $k \to \infty$ και από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε ότι

$$\int (\liminf f_n) = \lim_{k\to\infty} \int (\inf_{n\geqslant k} f_n) \leqslant \liminf \int f_n.$$

□

Πόρισμα 3.2.10. *Αν $f_n \in L^+$, $f \in L^+$ και $f_n \to f$ σ.π., τότε*

$$\int f \leqslant \liminf \int f_n.$$

Απόδειξη: Αν $f_n \to f$ παντού τότε το λήμμα Fatou δίνει το αποτέλεσμα. Αν $f_n \to f$ σχεδόν παντού, τότε τις αλλάζουμε σε ένα μηδενικό σύνολο. □

Πρόταση 3.2.11. *Αν $f \in L^+$ και $\int f < \infty$ τότε το $\{x : f(x) = \infty\}$ είναι μηδενικό σύνολο και το $\{x : f(x) > 0\}$ είναι σ-πεπερασμένο.*

Ασκήσεις

(i) Έστω ότι $f_n \in L^+$ και $f_n \to f$ κατά σημείο και $\int f = \lim \int f_n < \infty$. Τότε για κάθε $E \in \mathcal{M}$ ισχύει $\int_E f = \lim \int_E f_n$. Αυτό δεν είναι απαραίτητα σωστό αν $\int f = \lim \int f_n = \infty$.

(ii) Αν $f \in L^+$ ορίζουμε το μέτρο $\lambda(E) = \int_E f \, d\mu$ για κάθε $E \in \mathcal{M}$. Τότε για κάθε $g \in L^+$ ισχύει $\int g \, d\lambda = \int fg \, d\mu$.

(iii) Αν $f_n \in L^+$ και η f_n είναι φθίνουσα ακολουθία και συγκλίνει στην f κατά σημείο, και αν υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε το $\int f_k$ να είναι πεπερασμένο, τότε $\int f = \lim \int f_n$.

(iv) Αν $f \in L^+$ και $\int f$ πεπερασμένο, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $E \in \mathcal{M}$ με $\mu(E) < \infty$ και $\int_E f > \int f - \varepsilon$.

(v) Βρείτε ακολουθία Borel μετρησίμων συναρτήσεων f_n στο $\mathbb{R}$ που να φθίνει ομοιόμορφα στο 0 αλλά να ισχύει $\int f_n \, dm = \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Βρείτε ακολουθία Borel μετρησίμων συναρτήσεων g_n στο $[0, 1]$ που να συγκλίνει στο 0 κατά σημείο αλλά να ισχύει $\int g_n \, dm = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

3.3 Ολοκλήρωση μιγαδικών συναρτήσεων

Για πραγματικές συναρτήσεις η επέκταση του ορισμού του ολοκληρώματος είναι προφανής

$$\int f = \int f^+ - \int f^-.$$

Εφόσον όμως $\int f^+$ και $\int f^- \in \mathbb{R}$. Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη, δηλαδή αν $\int f^\pm < \infty$. Επειδή $f^\pm \leqslant |f| \leqslant f^+ + f^-$, η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int |f| < \infty$.

Πρόταση 3.3.1. *Ο χώρος των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων είναι πραγματικός διανυσματικός χώρος και το ολοκλήρωμα είναι γραμμικό συναρτησοειδές.*

Απόδειξη: Ο πρώτος ισχυρισμός έπεται από το γεγονός ότι

$$|\alpha f + bg| \leqslant |\alpha|\,|f| + |b|\,|g|\,.$$

Εύκολα, $\int \alpha f = \alpha \int f \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$. Αν f, g ολοκληρώσιμες και $h = f + g$, τότε $h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$, οπότε $h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$. Από το Θεώρημα 3.2.6 έχουμε ότι

$$\int h^+ + \int f^- + \int g^- = \int h^- + \int f^+ + \int g^+,$$

οπότε $\int h = \int f + \int g$. □

Αν f μιγαδική μετρήσιμη συνάρτηση, λέμε ότι η f είναι *ολοκληρώσιμη* αν και μόνο αν $\int |f| < \infty$. Αφού $|f| \leqslant |\mathrm{Re} f| + |\mathrm{Im} f| \leqslant 2\,|f|$, η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν οι $\mathrm{Re} f$ και $\mathrm{Im} f$ είναι ολοκληρώσιμες και σε αυτήν την περίπτωση ορίζουμε

$$\int f = \int \mathrm{Re} f + i \int \mathrm{Im} f.$$

Πάλι ο χώρος αυτών των συναρτήσεων είναι διανυσματικός χώρος και το ολοκλήρωμα είναι γραμμικό συναρτησοειδές. Συμβολίζουμε αυτό το χώρο με $L^1(\mu)$ ή $L^1(X, \mu)$ ή $L^1(X)$ ή L^1.

Πρόταση 3.3.2. *Αν $f \in L^1$, τότε $\left|\int f\right| \leqslant \int |f|$.*

Απόδειξη: Αν $\int f = 0$ είναι προφανές. Αν $f : X \to \mathbb{R}$, τότε

$$\left|\int f\right| = \left|\int (f^+ - f^-)\right| \leqslant \int f^+ + \int f^- = \int |f|\,.$$

Αν $f : X \to \mathbb{C}$ και $\int f \neq 0$, έστω $\alpha = \overline{\mathrm{sgn} \int f}$, όπου $\overline{\mathrm{sgn} z} = \overline{z}/\,|z|$. Τότε

$$\begin{aligned} \left|\int f\right| &= \alpha \int f = \int \alpha f = \mathrm{Re} \int \alpha f = \int \mathrm{Re}(\alpha f) \leqslant \int |\mathrm{Re}(\alpha f)| \\ &\leqslant \int |\alpha f| = \int |f|\,. \end{aligned}$$

□

Πρόταση 3.3.3. (i) *Αν $f \in L^1$, τότε $\{x : f(x) \neq 0\}$ είναι σ-πεπερασμένο.*

(ii) *Αν $f, g \in L^1$, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) $\int |f - g| = 0$,

(β) $\int_E f = \int_E g \ \forall E \in \mathcal{M}$

(γ) $f = g$ *σ.π.*

Απόδειξη: Το (i) έπεται από την Πρόταση 3.2.11.
(α)⇒(β): Αν $\int |f - g| = 0$, τότε για κάθε $E \in \mathcal{M}$, ισχύει

$$\left|\int_E f - \int_E g\right| \leqslant \int \chi_E\,|f - g| \leqslant \int |f - g| = 0.$$

(β)⇒(γ): Θέτουμε $u = \mathrm{Re}(f-g)$, $v = \mathrm{Im}(f-g)$ και αν f δεν είναι ίση με την g σχεδόν παντού, τότε τουλάχιστον μία από τις $u^{\pm}$, $v^{\pm}$ πρέπει να είναι μη μηδενική σε σύνολο θετικού μέτρου. Αν για παράδειγμα $E = \{x : u^+(x) > 0\}$ και $m(E) > 0$, τότε $\mathrm{Re}\big(\int_E f - \int_E g\big) = \int_E u^+ > 0$, αφού $u^- = 0$ στο E, το οποίο είναι άτοπο.

Τέλος, η συνεπαγωγή (γ)⇒(α) είναι προφανής. □

Η προηγούμενη πρόταση λέει ότι μπορούμε να ολοκληρώνουμε συναρτήσεις χωρίς να δίνουμε σημασία σε σύνολα μέτρου μηδέν. Άρα μπορούμε να θεωρούμε τις συναρτήσεις με τιμές στο $\mathbb{R}$ αντί στο $\overline{\mathbb{R}}$. Επίσης είναι βολικό να επαναορίσουμε το $L^1(\mu)$ να αποτελείται από κλάσεις ισοδυναμίας όπου $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ σ.π.

Θεώρημα 3.3.4 (Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης)**.** *Έστω $f_n \in L^1$ ώστε*

(i) $f_n \to f$ *σ.π.*

(ii) *υπάρχει* $g \geqslant 0$, $g \in L^1$ *ώστε* $|f_n| \leqslant g$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Τότε $f \in L^1$ *και* $\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$.

Απόδειξη: Η f είναι μετρήσιμη (ίσως με επαναορισμό σε ένα μηδενικό σύνολο) αφού είναι κατά σημείο όριο μετρήσιμων, και αφού $|f| \leqslant g \Rightarrow f \in L^1$. Θεωρώντας τα Ref και Imf μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι f_n, f είναι πραγματικές. Οπότε $g + f_n \geqslant 0$ σ.π. και $g - f_n \geqslant 0$ σ.π. Από το λήμμα Fatou

$$\int g + \int f \leqslant \liminf \int (g + f_n) = \int g + \liminf \int f_n,$$

$$\int g - \int f \leqslant \liminf \int (g - f_n) = \int g - \limsup \int f_n.$$

Άρα $\liminf \int f_n \geqslant \int f \geqslant \limsup \int f_n$ και το αποτέλεσμα έπεται. □

Θεώρημα 3.3.5. *Έστω f_j ακολουθία στον L^1 ώστε $\sum_1^\infty \int |f_j| < \infty$. Τότε η $\sum_1^\infty f_j$ συγκλίνει σ.π. σε μια L^1 συνάρτηση και $\int \sum_1^\infty f_n = \sum_1^\infty \int f_n$.*

Απόδειξη: Από το Θεώρημα 3.2.6, $\int \sum_1^\infty |f_j| = \sum_1^\infty \int |f_j| < \infty$. Οπότε $\sum_1^\infty |f_j| \in L^1$. Άρα από την Πρόταση 3.2.11, $\sum_1^\infty |f_j(x)| < \infty$ σ.π. και άρα για κάθε τέτοιο x η σειρά $\sum_1^\infty f_j(x)$ συγκλίνει. Επίσης, $|\sum_1^n f_j| \leqslant \sum_1^\infty |f_j|$ $\forall n \in \mathbb{N}$, άρα εφαρμόζεται το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης στην ακολουθία μερικών αθροισμάτων, και προκύπτει $\int \sum_1^\infty f_n = \sum_1^\infty \int f_n$. □

Θεώρημα 3.3.6. *Αν $f \in L^1(\mu)$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχει ολοκληρώσιμη απλή $\varphi = \sum \alpha_j \chi_{E_j}$ ώστε $\int |f - \varphi|\, d\mu < \varepsilon$. Οπότε οι ολοκληρώσιμες απλές είναι πυκνές στον $L^1(\mu)$. Αν το μ είναι ένα Lebesgue-Stieltjes μέτρο στο $\mathbb{R}$, τα σύνολα E_j στον ορισμό της φ μπορούν να επιλεγούν να είναι πεπερασμένες ενώσεις ανοιχτών διαστημάτων. Επιπλέον, υπάρχει συνεχής g που μηδενίζεται έξω από ένα φραγμένο διάστημα ώστε $\int |f - g|\, d\mu < \varepsilon$.*

Απόδειξη: Έστω $\{\varphi_n\}$ απλές όπως στο Θεώρημα 3.2.11(ii). Τότε έχουμε ότι $\int |\varphi_n - f| < \varepsilon$ για μεγάλο n, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης. Αν $\varphi_n = \sum \alpha_j \chi_{E_j}$, E_j ξένα και τα $\alpha_j \neq 0$, παρατηρούμε ότι $\mu(E_j) = |\alpha_j|^{-1} \int_{E_j} |\varphi| \leqslant |\alpha_j|^{-1} \int |f| < \infty$. Επίσης, $\mu(E \triangle F) = \int |\chi_E - \chi_F|$, οπότε αν το μ είναι Lebesgue-Stieltjes μέτρο στο $\mathbb{R}$ μπορούμε να προσεγγίσουμε την χ_{E_j} όσο θέλουμε στην

L^1 μετρική με πεπερασμένα αθροίσματα χ_{I_k} όπου I_k ανοιχτά διαστήματα (Πρόταση 2.2.10). Τέλος, αν $I_k = (\alpha, b)$ μπορούμε να προσεγγίσουμε την χ_{I_k} στην L^1 μετρική από συνεχείς συναρτήσεις που μηδενίζονται εκτός του (α, b). Για παράδειγμα, θέτουμε $g_n(x) = 1$ για $x \in [a + 1/n, b - 1/n]$, $g_n(x) = 0$ για $x \notin (a, b)$ και g_n γραμμική στα διαστήματα $[a, a + 1/n]$ και $[b - 1/n, b]$, ώστε η g_n να είναι συνεχής. Έτσι θα ισχύει:

$$\left|\int (\chi_{(a,b)} - g_n)\right| \leqslant \mu\big((a, a+1/n)\big) + \mu\big((b-1/n, b)\big) \longrightarrow 0,$$

καθώς $n \to \infty$. □

Θεώρημα 3.3.7. *Έστω* $f : X \times [\alpha, b] \to \mathbb{C}$ $(-\infty < \alpha < b < \infty)$ *και* $f(\cdot, t) : X \to \mathbb{C}$ *ολοκληρώσιμη* $\forall t \in [\alpha, b]$. *Έστω* $F(t) = \int_X f(x, t) d\mu(x)$.

(i) *Έστω ότι υπάρχει* $g \in L^1(\mu)$ *τέτοια ώστε* $|f(x, t)| \leqslant g(x)$ $\forall x, t$. *Αν* $\lim_{t\to t_0} f(x, t) = f(x, t_0)$. *Τότε* $\lim_{t\to t_0} F(t) = F(t_0)$. *Συγκεκριμένα, αν* $f(x, \cdot)$ *είναι συνεχής για κάθε* x, *τότε η* f *είναι συνεχής.*

(ii) *Έστω ότι η* $\partial f/\partial t$ *υπάρχει και υπάρχει* $g \in L^1(\mu)$ *ώστε*

$$|(\partial f/\partial t)(x, t)| \leqslant g(x)$$

για όλα τα x, t. *Τότε η* F *είναι διαφορίσιμη και*

$$F'(t) = \int (\partial f/\partial t)(x, t)\, d\mu(x).$$

Απόδειξη: (i) Εφαρμόζουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης στην $f_n(x) = f(x, t_n)$ όπου $t_n \to t_0$.

(ii) Παρατηρούμε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) = \lim_{n\to\infty} h_n(x) \text{ όπου } h_n(x) = \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0},$$

για $t_n \to t_0$. Έτσι η $\partial f/\partial t$ είναι μετρήσιμη και από το θεώρημα μέσης τιμής,

$$|h_n(x)| \leqslant \sup_{t\in[\alpha,b]} \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\right| \leqslant g(x),$$

οπότε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης μπορεί να χρησιμοποιηθεί ξανά

$$F'(t_0) = \lim \frac{f(t_n) - f(t_0)}{t_n - t_0} = \lim \int h_n(x)\, d\mu(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x).$$

□

Θα χρησιμοποιήσουμε τον χαρακτηρισμό Darboux για το ολοκλήρωμα Riemann.

Θεώρημα 3.3.8. *Έστω* f *φραγμένη πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το* $[\alpha, b]$.

(i) *Αν f ολοκληρώσιμη κατά Riemann, τότε είναι Lebesgue μετρήσιμη και άρα ολοκληρώσιμη αφού f φραγμένη. Επίσης*

$$\int_\alpha^b f(x)dx = \int_{[\alpha,b]} f(x)\, dm(x).$$

(ii) *Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν*

$$m(\{x \in [\alpha,b] : f \text{ ασυνεχής στο } x\}) = 0.$$

Απόδειξη: (i) Έστω f Riemann ολοκληρώσιμη, για κάθε διαμέριση P έστω

$$G_p = \sum_1^n M_j \chi_{\left(t_{j-1},t_j\right]} \quad \text{και} \quad g_p = \sum_1^n m_j \chi_{\left(t_{j-1},t_j\right]},$$

και έστω $S_p f = \int G_p dm$ και $s_p f = \int g_p dm$ τα άνω και κάτω αθροίσματα αντίστοιχα. Υπάρχει ακολουθία διαμερίσεων P_k με νόρμα διαμέρισης που τείνει στο 0, όπου κάθε μια είναι εκλέπτυνση της άλλης (οπότε η g_{p_k} είναι αύξουσα και η G_{p_k} είναι φθίνουσα) ώστε $S_{p_k} f \to \int_\alpha^b f(x)dx$ και $s_{p_k} f \to \int_\alpha^b f(x)dx$. Έστω $G = \lim G_{p_k}$ και $g = \lim g_{p_k}$. Φανερά $g \leqslant f \leqslant G$ και από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης $\int G dm = \int g dm = \int_\alpha^b f(x)dx$ (αφού $\int G dm = \int \lim G_{p_k} dm = \lim \int G_{p_k} dm = \lim S_{p_k} f = \int_\alpha^b f$). Άρα $\int (G-g)dm = 0 \Rightarrow G = g$ σ.π. $\Rightarrow G = f$ σ.π. Άρα η f είναι μετρήσιμη αφού είναι μετρήσιμη η G ως όριο μετρήσιμων και το m είναι πλήρες μέτρο. Φανερά, $\int_{[\alpha,b]} f dm = \int G dm = \int_\alpha^b f(x)dx$.

(ii) Έστω $H(x) = \limsup_{y\to x} f(y)$, $h(x) = \liminf_{y\to x} f(y)$, δηλαδή

$$\limsup_{y\to x} f(y) = \inf_{\delta>0}\Big(\sup\{f(y) \,:\, |y-x| < \delta\}\Big)$$

και

$$\liminf_{y\to x} f(y) = \sup_{\delta>0}\Big(\inf\{f(y) \,:\, |y-x| < \delta\}\Big).$$

Η $H = G$ σ.π. και $h = g$ σ.π., οπότε οι H, h είναι Lebesgue μετρήσιμες και

$$\int_{[\alpha,b]} H dm = \overline{\int_\alpha^b} f(x)dx, \qquad \int_{[\alpha,b]} h dm = \underline{\int_\alpha^b} f(x)dx.$$

Ισχύει ότι $\{x \in [\alpha,b] \,:\, f \text{ ασυνεχής στο } x\} = \{x \in [\alpha,b] \,:\, H(x) \neq h(x)\}$ (άσκηση). Άρα αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε

$$\int_{[\alpha,b]} H dm = \overline{\int_\alpha^b} f(x)dx = \underline{\int_\alpha^b} f(x)dx = \int_{[\alpha,b]} h\, dm.$$

Οπότε $\int_{[\alpha,b]}(H-h)dm = 0 \Rightarrow H = h$ σ.π. Άρα $m(\{x \in [\alpha,b] : f \text{ ασυνεχής στο } x\}) = 0$. Αντίστροφα, αν

$$m(\{x \in [\alpha,b] : f \text{ ασυνεχής στο } x\}) = 0,$$

τότε $\int H = \int h$, άρα η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. □

Ασκήσεις

(i) Έστω ότι ο $(X, \mathcal{M}, \mu)$ είναι χώρος πεπερασμένου μέτρου. Έστω ότι $f_n \in L^1(\mu)$ και $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$. Δείξτε ότι αναγκαστικά θα ισχύει $f \in L^1(\mu)$ και $\lim \int f_n = \int f$.

(ii) Για τον χώρο μέτρου $(X, \mathcal{M}, \mu)$ δίνονται οι συναρτήσεις f_n, f, g_n, $g \in L^1(\mu)$ ώστε $f_n \longrightarrow f$ σ.π., $g_n \longrightarrow g$ σ.π., $|f_n| \leqslant g_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lim \int g_n = \int g$. Δείξτε ότι $\lim \int f_n = \int f$.

(iii) Αν $f \in L^1(m)$ και $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$ τότε η F είναι συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

(iv) Αν $f_n(x) = ae^{-nax} - be^{-nbx}$ όπου $0 < a < b$, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n(x)|\, dx = \infty$$

και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n(x)\, dx \neq \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx.$$

(v) Υπολογίστε τα όρια αιτιολογώντας τις πράξεις σας:

(α) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} \sin \frac{x}{n}\, dx.$

(β) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_0^{1} (1 + nx^2)(1 + x^2)^{-n}\, dx.$

(γ) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} n \sin \frac{x}{n} \big(x(1 + x^2)\big)^{-1}\, dx.$

(δ) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_a^{\infty} n(1 + n^2x^2)^{-1}\, dx.$
(Η απάντηση εξαρτάται από το αν $a < 0$ ή $a = 0$ ή $a > 0$.)

Κεφάλαιο 4

Διάφοροι ορισμοί σύγκλισης

Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα, τότε $f_n \to f$ κατά σημείο και $f_n \to f$ σ.π., αλλά δε συνεπάγεται ότι συγκλίνει και στον L^1.

(i) $f_n = n^{-1}\chi_{(0,n)}$.

(ii) $f_n = \chi_{(n,n+1)}$.

(iii) $f_n = n\chi_{[0,1/n]}$.

(iv) $f_n = \chi_{[j2^{-k},(j+1)2^{-k}]}$ όπου $0 \leqslant j < 2^k$ και $n = j + 2^k$.

Στα (i), (ii) και (iii) η $f_n \to 0$ ομοιόμορφα, αλλά $f_n \not\to 0$ στον L^1, αφού $\int |f_n| = 1$ $\forall n$. Στο (iv) $f_n \to 0$ στον L^1, αφού $\int |f_n| = 2^{-k}$ για $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$, αλλά η $f_n(x)$ δε συγκλίνει $\forall x \in [0,1]$, αφού είναι μηδέν για άπειρα n και 1 για άπειρα n. Από την άλλη μεριά, αν $f_n \to f$ σ.π. και $|f_n| \leqslant g$, με $g \in L^1$, τότε $f_n \to f$ στον L^1. Αυτό ισχύει λόγω του ότι $|f_n - f| \leqslant 2j$ και του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης.

Ορισμός 4.0.9. *Έστω ότι οι f_n είναι μετρήσιμες μιγαδικές συναρτήσεις στον $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Λέμε ότι η ακολουθία f_n είναι Cauchy ως προς το μέτρο, αν $\forall \varepsilon > 0$,*

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geqslant \varepsilon\}) \to 0 \text{ καθώς } n, m \to \infty,$$

και συγκλίνει στην f ως προς το μέτρο αν $\forall \varepsilon > 0$,

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}) \to 0 \text{ καθώς } n \to \infty.$$

Για παράδειγμα οι ακολουθίες των (i), (iii) και (iv) παραπάνω συγκλίνουν στο μηδέν ως προς το μέτρο, αλλά η (ii) δεν είναι Cauchy ως προς το μέτρο.

Πρόταση 4.0.10. *Αν $f_n \to f$ στον L^1, τότε $f_n \to f$ ως προς το μέτρο.*

Απόδειξη: Έστω $E_{n,\varepsilon} = \{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}$. Τότε

$$\int |f_n - f| \geqslant \int_{E_{n,\varepsilon}} |f_n - f| \geqslant \varepsilon\mu(E_{n,\varepsilon}),$$

οπότε $\mu(E_{n,\varepsilon}) \leqslant \varepsilon^{-1} \int |f_n - f| \to 0$. □

Το αντίστροφο είναι λάθος, για παράδειγμα το (i) και (iii).

Θεώρημα 4.0.11. *Έστω $\{f_n\}$ Cauchy ως προς το μέτρο. Τότε υπάρχει μετρήσιμη f ώστε $f_n \to f$ ως προς το μέτρο και υπακολουθία $\{f_{n_j}\}$ της $\{f_n\}$ που συγκλίνει στην f σ.π. Επίσης, αν $f_n \to g$ ως προς το μέτρο, τότε $g = f$ σ.π.*

Απόδειξη: Μπορούμε να επιλέξουμε μια υπακολουθία $\{g_j\} = \{f_{n_j}\}$ της f_n ώστε αν $E_j = \{x : |g_j(x) - g_{j+1}(x)| \geqslant 2^{-j}\}$ τότε $\mu(E_j) \leqslant 2^{-j}$, αφού η $\{f_n\}$ είναι Cauchy ως προς το μέτρο. Θέτουμε $F_k = \cup_{j=k}^{n} E_j$. Τότε $\mu(F_k) \leqslant \sum_k^\infty 2^{-j} = 2^{1-k}$, και αν $x \notin F_k$, για $i \geqslant j \geqslant k$ έχουμε

$$|g_j(x) - g_i(x)| \leqslant \sum_{l=j}^{i-1} |g_{l+1}(x) - g_l(x)| \leqslant \sum_{l=j}^{i-1} 2^{-l} = 2^{1-j}. \tag{4.1}$$

Οπότε η $\{g_j\}$ είναι κατά σημείο Cauchy στο F_k^c. Έστω $F = \cap_1^\infty F_k = \limsup E_j$. Τότε $\mu(F) = 0$, και αν θέσουμε $f(x) = \lim g_j(x)$ για $x \notin F$ και $f(x) = 0$ για $x \in F$, τότε η f είναι μετρήσιμη και $g_j \to f$ σ.π. Επίσης η (4.1) συνεπάγεται ότι $|g_j(x) - f(x)| \leqslant 2^{2-j}$ για $j \geqslant k$, $x \notin F_k$. Αφού $\mu(F_k) \to 0$ καθώς $k \to \infty$, έπεται ότι $g_j \to f$ ως προς το μέτρο. Αλλά $f_n \to f$ ως προς το μέτρο διότι

$$\begin{aligned} \{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\} \quad \subseteq \quad & \{x : |f_n(x) - g_j(x)| \geqslant \varepsilon/2\} \\ & \bigcup \{x : |g_j(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon/2\}, \end{aligned}$$

και τα σύνολα δεξιά έχουν μικρό μέτρο όταν n, j μεγάλα. Ομοίως, αν $f_n \to g$ ως προς το μέτρο διότι

$$\begin{aligned} \{x : |f(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon\} \quad \subseteq \quad & \{x : |f(x) - f_n(x)| \geqslant \varepsilon/2\} \\ & \bigcup \{x : |f_n(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon/2\}, \end{aligned}$$

$\forall n$, οπότε $\mu(\{x : |f(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon\}) = 0$ για κάθε ε. Αφήνοντας το $\varepsilon \to 0$ βάσει μιας μηδενικής ακολουθίας παίρνουμε $f = g$ σ.π. □

Πόρισμα 4.0.12. *Αν $f_n \to f$ στον L^1, τότε υπάρχει υπακολουθία $\{f_{n_j}\}$ ώστε $f_{n_j} \to f$ σ.π.*

Απόδειξη: Από την Πρόταση 4.0.10 και το Θεώρημα 4.0.11 το συμπέρασμα έπεται. □

Αν $f_n \to f$ σ.π. δεν συνεπάγεται ότι $f_n \to f$ ως προς το μέτρο, όπως στο παράδειγμα (ii).

Θεώρημα 4.0.13 (Egoroff)**.** *Έστω $\mu(X) < \infty$ και f_n, f μετρήσιμες μιγαδικές συναρτήσεις στον X ώστε $f_n \to f$ σ.π. Τότε $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει $E \subseteq X$ ώστε $\mu(E) < \varepsilon$ και $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο E^c.*

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ παντού στον X. Για $k, n \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$E_n(k) = \bigcup_{m=n}^{\infty} \{x : |f_m(x) - f(x)| \geqslant k^{-1}\}.$$

Τότε για σταθερό k, τα $E_n(k)$ φθίνουν καθώς το n αυξάνει, και $\cap_{n=1}^{\infty} E_n(k) = \emptyset$, αφού $f_n \to f$. Έτσι αφού $\mu(X) < \infty$ συμπεραίνουμε ότι $\mu(E_n(k)) \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Έστω $\varepsilon > 0$ και $k \in \mathbb{N}$. Διαλέγουμε n_k μεγάλο ώστε $\mu(E_n(k)) < \varepsilon 2^{-k}$ και έστω $E = \cup_{k=1}^{\infty} E_{n_k}$. Τότε $\mu(E) < \varepsilon$ και $|f_n(x) - f(x)| < k^{-1}$ για $n > n_k$ και $x \notin E$. Άρα $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο E^c. $\square$

Κεφάλαιο 5

Μέτρα γινόμενα

Αν $(X, \mathcal{M}, \mu)$, $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ χώροι μέτρου, έχουμε ήδη ορίσει την σ-άλγεβρα $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Τώρα θα κατασκευάσουμε το μέτρο γινόμενο των μ και ν.

Ένα ορθογώνιο είναι ένα σύνολο της μορφής $A \times E$ όπου $A \in \mathcal{M}$ και $E \in \mathcal{N}$. Φανερά $(A \times E) \cap (B \times F) = (A \cap B) \times (E \cap F)$ και $(A \times E)^c = (X \times E^c) \cup (A^c \times E)$. Αν $\mathcal{A}$ η συλλογή πεπερασμένων ξένων ενώσεων ορθογωνίων, τότε η $\mathcal{A}$ είναι μια άλγεβρα και βέβαια $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$.

Ορίζουμε $\pi(A \times E) = \mu(A)\nu(E)$ και ο ορισμός είναι καλός αν το $A \times E$ είναι πεπερασμένη ένωση ξένων ορθογωνίων $A_j \times E_j$. Τότε για $x \in X$ και $y \in Y$,

$$\chi_A(x)\chi_E(y) = \chi_{A \times E}(y) = \sum \chi_{A_j \times E_j}(x, y) = \sum \chi_{A_j}(x)\chi_{E_j}(y).$$

Ολοκληρώνοντας ως προς x και μετά ως προς y, παίρνουμε ότι

$$\pi(A \times E) = \sum \pi(A_j \times E_j),$$

$(0 \cdot \infty = 0)$. Το π είναι προμέτρο στην $\mathcal{A}$, οπότε από το Θεώρημα 2.1.7 το π ορίζει ένα εξωτερικό μέτρο στο $X \times Y$ που ο περιορισμός του στην $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ είναι μέτρο που επεκτείνει το π. Αυτό το μέτρο ονομάζεται μέτρο γινόμενο και συμβολίζεται με $\mu \times \nu$.

Αν τα μ και ν είναι σ-πεπερασμένα μέτρα τότε το $\mu \times \nu$ είναι σ-πεπερασμένο και από το Θεώρημα 2.1.7 είναι το μοναδικό μέτρο στην $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, όπου $(\mu \times \nu)(A \times E) = \mu(A)\nu(E)$ $\forall A \times E$. Ομοίως, ορίζεται το

$$\mu_1 \times \ldots \mu_n(A_1 \times \ldots \times A_n) = \prod_1^n \mu(A_j).$$

Αν $E \subseteq X \times Y$ ορίζουμε για $x \in X$, $y \in Y$ την x-τομή E_x και y-τομή E^y του E:

$$E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}, \qquad E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}.$$

Ομοίως, αν $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ ορίζουμε την x-τομή f_x και y-τομή f^y της f:

$$f_x(y) = f^y(x) = f(x, y).$$

Πρόταση 5.0.14. (i) *Αν* $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$*, τότε* $E_x \in \mathcal{N}$ $\forall x \in X$ *και* $E^y \in \mathcal{M}$ $\forall y \in Y$.

(ii) *Αν η f είναι $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$-μετρήσιμη, τότε η f_x είναι $\mathcal{N}$-μετρήσιμη και η f^y είναι $\mathcal{M}$-μετρήσιμη.*

Απόδειξη: (i) Έστω $\mathcal{R} = \{E \subseteq X \times Y : E_x \in \mathcal{N}\ \forall x$ και $E^y \in \mathcal{M}\ \forall y\}$. Η $\mathcal{R}$ περιέχει τα ορθογώνια $[(A \times B)_x = B$ αν $x \in A$ και $(A \times B)_x = \emptyset$ αν $x \notin A]$. Αφού $(\cup_1^\infty E_j)_x = \cup_1^\infty (E_j)_x$ και $(E_x)^c = (E^c)_x$ η $\mathcal{R}$ είναι σ-άλγεβρα. Άρα $\mathcal{R} \supseteq \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$.

(ii) Προκύπτει άμεσα από το (i), διότι $(f_x)^{-1}(B) = (f^{-1}(B))_x$ και $(f^y)^{-1}(B) = (f^{-1}(B))^y$. □

Παρατήρηση 5.0.15. Ακόμα και αν τα μ, ν είναι πλήρη το $\mu \times \nu$ δεν είναι σχεδόν ποτέ πλήρες. Πράγματι, έστω $A \in \mathcal{M}$, $A \neq \emptyset$, $\mu(A) = 0$ και έστω $\mathcal{N} \neq \mathcal{P}(Y)$ (για παράδειγμα, μ,ν Lebesgue μέτρα στο $\mathbb{R}$). Αν $E \in \mathcal{P}(Y) \backslash \mathcal{N}$, τότε $A \times E \notin \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ λόγω της προηγούμενης πρότασης, αλλά $A \times E \subseteq A \times Y$ και $\mu \times \nu(A \times Y) = 0$ $(0 \cdot \infty = 0)$.

Ορισμός 5.0.16. *Η οικογένεια $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ λέγεται μονότονη κλάση αν είναι κλειστή ως προς αύξουσες ενώσεις και φθίνουσες τομές.*

Λήμμα 5.0.17. *Αν $\mathcal{A}$ άλγεβρα, τότε η μονότονη κλάση που παράγεται από την $\mathcal{A}$ (δηλαδή η τομή όλων των μονότονων κλάσεων που την περιέχουν) είναι η $\mathcal{M}(\mathcal{A}) =: \mathcal{M}$.*

Απόδειξη: $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Θέλουμε να δείξουμε ότι η $\mathcal{C}$ είναι σ-άλγεβρα, οπότε αφού $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ η ελάχιστη που περιέχει την $\mathcal{A}$, θα συμπεράνουμε ότι $\mathcal{C} = \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Επειδή $\cup_1^\infty A_n = \cup_{n=1}^\infty (\cup_{k=1}^n A_k)$ αύξουσα ένωση, αν δείξουμε ότι $\cup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{C}$, θα έχουμε ότι $\cup_1^\infty A_n \in \mathcal{C}$. Άρα για να έχουμε ότι η $\mathcal{C}$ είναι σ-άλγεβρα, θέλουμε να δείξουμε ότι

- $\cup_1^n A_k \in \mathcal{C}\ \forall A_k \in \mathcal{C}$
- $E \backslash F \in \mathcal{C}\ \forall E \in \mathcal{C}, \forall F \in \mathcal{C}$
- $X \in \mathcal{C}$

Δηλαδή, αρκεί να δείξουμε ότι η $\mathcal{C}$ είναι άλγεβρα. Αν $X \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$, τότε $X \in \mathcal{C}$. Αρκεί $\forall E, F \in \mathcal{C}$ $E \backslash F$, $F \backslash E$ και $F \cap E \in \mathcal{C}$. Αν $F \in \mathcal{C}$ θέτουμε

$$\mathcal{C}(F) = \{E \in \mathcal{C} : E \backslash F, F \backslash E, F \cap E \in \mathcal{C}\} \subseteq \mathcal{C}.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\mathcal{C}(F) \supseteq \mathcal{C}$, γιατί τότε $\mathcal{C} = \mathcal{C}(F)\ \forall F \in \mathcal{C}$, οπότε αν $E \in \mathcal{C}$, $F \in \mathcal{C}$, $E \in \mathcal{C} = \mathcal{C}(F)$. Άρα $E \in \mathcal{C}(F)$, οπότε $E \backslash F, F \backslash E, F \cap E \in \mathcal{C}$. Αν δείξουμε ότι $\mathcal{C}(F)$ μονότονη κλάση με $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(F)$, τότε η $\mathcal{C}$ ως ελάχιστη μονότονη κλάση με $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ θα ικανοποιεί $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}(F)$. Είναι εύκολο να δούμε ότι η $\mathcal{C}(F)$ είναι μονότονη κλάση. Μένει να δειχθεί ότι $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(F)$, $\forall F \in \mathcal{C}$ ή κατευθείαν $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}(F)\ \forall F \in \mathcal{C}$. Αν $F \in \mathcal{A}$ τότε $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(F)$, διότι αν $E \in \mathcal{A}$ τότε $E \backslash F, F \backslash E, F \cap E \in \mathcal{A}$ αφού η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα. Άρα $E \backslash F, F \backslash E, F \cap E \in \mathcal{C}$, αφού $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$, οπότε από τον ορισμό της $\mathcal{C}(F)$ έχουμε ότι $E \in \mathcal{C}(F)$. Άρα για $F \in \mathcal{A}$ έχουμε και ότι $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}(F)$. Έστω ότι $F \in \mathcal{C}$, θα δείξουμε άμεσα ότι $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}(F)$. Θα δείξουμε ότι $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(F)\ \forall F \in \mathcal{C}$. Έστω $F \in \mathcal{C}$ και $E \in \mathcal{A}$. Άρα $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}(E)$, και επειδή $F \in \mathcal{C}$, $F \in \mathcal{C}(E)$. Εξαιτίας της συμμετρίας στον ορισμο του $\mathcal{C}$ τότε $E \in \mathcal{C}(F)$. Άρα $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(F)$. □

Θεώρημα 5.0.18. *Έστω* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *και* $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ *σ-πεπερασμένοι χώροι μέτρου. Αν* $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$*, οι συναρτήσεις* $x \to \nu(E_x)$*,* $y \to \mu(E^y)$ *είναι μετρήσιμες στον* X *και* Y *αντίστοιχα, και*

$$(\mu \times \nu)(E) = \int \nu(E_x) d\mu(x) = \int \mu(E^y) d\nu(y).$$

Απόδειξη: Υποθέτουμε πρώτα ότι τα μ και ν είναι πεπερασμένα και έστω $\mathcal{C}$ το σύνολο όλων των $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ για τα οποία ισχύει το συμπέρασμα. Αν $E = A \times B$ τότε $\nu(E_x) = \chi_A(x)\nu(B)$ και $\mu(E^y) = \mu(A)\chi_B(y)$, οπότε φανερά $E \in \mathcal{C}$. Από την προσθετικότητα των μ, ν η $\mathcal{C}$ περιέχει και πεπερασμένες ξένες ενώσεις παραλληλογράμμων. Οπότε σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα, αρκεί να δείξουμε ότι η $\mathcal{C}$ είναι μονότονη κλάση. Έστω $E_n \in \mathcal{C}$ αύξουσα και $E = \cup_1^\infty E_n$. Οι συναρτήσεις $f_n(y) = \mu((E_n)^y)$ είναι μετρήσιμες και αυξάνουν κατά σημείο στην $f(y) = \mu(E^y)$. Άρα f μετρήσιμη και από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης

$$\int \mu(E^y) d\nu(y) = \lim \int \mu((E_n)^y) d\nu(y) = \lim \mu \times \nu(E_n) = \mu \times \nu(E).$$

Ομοίως, $\mu \times \nu(E) = \int \nu(E_x) d\mu(x)$, οπότε $E \in \mathcal{C}$. Αφού $\mu(X), \mu(Y) < \infty$ ισχύει και για φθίνουσες ακολουθίες $\{E_n\}$ με την ίδια απόδειξη, αλλά με χρήση του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης με $\{E_n\}$ φθίνουσα, $E = \cap E_n$ και $y \to \mu(E_1^y)$ ανήκει στον $L^1(\nu)$ αφού $\mu((E_1)^y) \leqslant \mu(X) < \infty$ και $\nu(Y) < \infty$, άρα το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης μπορεί να εφαρμοστεί για να δείξουμε ότι $E \in \mathcal{C}$.

Αν τα μ και ν είναι σ-πεπερασμένα γράφουμε $X \times Y = \cup_1^\infty X_j \times Y_j$ με $\{X_j \times Y_j\}$ αύξουσα και $\mu(X_j), \nu(Y_j) < \infty$. Άρα αν $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, εφαρμόζεται το προηγούμενο στο σύνολο $E \cap (X_j \times Y_j)$ $\forall j$, οπότε

$$\begin{aligned} \mu \times \nu(E \cap (X_j \times Y_j)) &= \int \chi_{X_j}(x) \nu(E_x \cap Y_j) d\mu(x) \\ &= \int \chi_{Y_j}(y) \mu(E^y \cap X_j) d\nu(y). \end{aligned}$$

Πάλι από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης για $j \to \infty$

$$\begin{aligned} \mu \times \nu(E) &= \int \chi_X(x) \nu(E_x) d\mu(x) = \int \nu(E_x) d\mu(x) \\ &= \int \chi_Y(y) \mu(E^y) d\nu(y) = \int \mu(E^y) d\nu(y). \end{aligned}$$

□

Θεώρημα 5.0.19 (Fubini-Toneli)**.** *Έστω* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *και* $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ *σ-πεπερασμένοι χώροι μέτρου. Τότε,*

(i) (*Toneli*) *Αν* $f \in L^+(X \times Y)$*, τότε οι συναρτήσεις* $g(x) = \int f_x d\nu$ *και* $h(y) = \int f^y d\mu$ *είναι στον* $L^+(X)$ *και* $L^+(Y)$ *αντίστοιχα και*

$$\text{(5.1)} \qquad \int f d(\mu \times \nu) = \int \left[\int f(x,y) d\nu(y) \right] d\mu(x)$$
$$= \int \left[\int f(x,y) d\mu(x) \right] d\nu(y).$$

(ii) (*Fubini*) *Αν* $f \in L^1(\mu \times \nu)$, *τότε* $f_x \in L^1(\nu)$ *σχεδόν για κάθε* $x \in X$ *και* $f^y \in L^1(\mu)$ *σχεδόν για κάθε* $y \in Y$ *και οι σχεδόν παντού ορισμένες* $g(x) = \int f_x d\nu$ *και* $h(y) = \int f^y d\mu$ *είναι στον* $L^1(\mu)$ *και* $L^1(\nu)$ *αντίστοιχα και ισχύει η (5.1).*

Απόδειξη: Το θεώρημα Toneli για f χαρακτηριστική συνάρτηση, προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 5.0.18 και άρα ισχύει και για απλές λόγω γραμμικότητας. Αν $f \in L^+(X \times Y)$ και $\{f_n\}$ απλές που αυξάνουν στην f, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, οι αντίστοιχες g_n και h_n αυξάνουν στις g και h ($g_n(x) = \int (f_n)_x d\nu$, $h_n(y) = \int (f_n)^y d\mu$), οπότε g, h μετρήσιμες και

$$\int g d\mu = \lim \int g_n d\mu = \lim \int f_n d(\mu \times \nu) = \int f d(\mu \times \nu),$$

$$\int h d\nu = \lim \int h_n d\nu = \lim \int h_n d(\mu \times \nu) = \int f d(\mu \times \nu).$$

Αυτά αποδεικνύουν το θεώρημα Toneli και δείχνουν ότι αν $f \in L^+(X \times Y)$ και $\int f d(\mu \times \nu) < \infty$, τότε $g < \infty$ σ.π. και $h < \infty$ σ.π., δηλαδή $f_x \in L^1(\nu)$ σ.π. και $f^y \in L^1(\mu)$ σ.π. Έτσι, αν $f \in L^1(\mu \times \nu)$ το θεώρημα Fubini έπεται από εφαρμογή των προηγούμενων στο θετικό και αρνητικό μέρος των $\mathrm{Re} f$ και $\mathrm{Im} f$. □

Παρατήρηση 5.0.20. (i) Συνήθως θα παραλείπουμε τις παρενθέσεις και θα γράφουμε

$$\int \left[\int f(x,y) d\mu(x) \right] d\nu(y) = \int \int f(x,y) d\mu(x) d\nu(y)$$
$$= \int \int f(x,y) d\mu d\nu.$$

(ii) Η υπόθεση του σ-πεπερασμένου είναι απαραίτητη.

(iii) Η υπόθεση $f \in L^+(X \times Y)$ ή $f \in L^1(\mu \times \nu)$ είναι απαραίτητη για δύο λόγους. Πρώτα, μπορεί οι f_x και f^y να είναι μετρήσιμες για όλα τα x, y, και τα διαδοχικά ολοκληρώματα $\int \int f d\nu d\mu$, $\int \int f d\mu d\nu$ υπάρχουν και η f να μην είναι $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$-μετρήσιμη και τα διαδοχικά ολοκληρώματα μπορεί να μην είναι ίσα. Επίσης, αν $f \geqslant 0$ μπορεί οι f_x και f^y να είναι μετρήσιμες $\forall x, y$ και τα ολοκληρώματα $\int \int f d\nu d\mu$, $\int \int f d\mu d\nu$ να υπάρχουν, ίσως και διαφορετικά, και $\int |f| \, d(\mu \times \nu) = \infty$.

(iv) Τα θεωρήματα Fubini και Toneli χρησιμοποιούνται συχνά διαδοχικά. Πρώτα κανείς χρησιμοποιεί το Toneli για να βεβαιωθεί ότι $\int |f| \, d(\mu \times \nu) < \infty$ και μετά εφαρμόζει το Fubini για να πάρει ότι $\int \int f d\nu d\mu = \int \int f d\mu d\nu$.

Έστω $X = Y$ το σύνολο των αριθμήσιμων διατακτικών αριθμών. Οπότε $\forall x \in X$ το σύνολο $\{y : y < x\}$ είναι αριθμήσιμο. Έστω $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ η σ-άλγεβρα των αριθμήσιμων ή συναριθμήσιμων συνόλων και $\mu = \nu$ με $\mu(A) = 0$, αν A αριθμήσιμο, και $\mu(A) = 1$, αν A υπεραριθμήσιμο. Έστω $E = \{(x, y) : y < x\}$. Τότε $E_x = \{y : (x, y) \in E\} = \{y : y < x\}$ είναι αριθμήσιμο, άρα μετρήσιμο. Επίσης, $E^y = \{x : (x, y) \in E\} = \{x : y < x\}$ είναι συναριθμήσιμο, άρα μετρήσιμο.

$$\int\int \chi_E \, d\mu d\nu = \int_Y \left[\int_X \chi_E(x) d\mu(x)\right] d\nu(y) = \int_Y 1 d\nu(y) = 1$$

και

$$\int\int \chi_E \, d\nu d\mu = \int_X \left[\int_Y \chi_E(y) d\nu(y)\right] d\mu(x) = \int_X 0 d\mu(x) = 0,$$

άρα $E \notin \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Αν δεχόμαστε την υπόθεση του συνεχούς, μπορούμε να πάρουμε ότι $X = [0, 1]$ (όχι με τη συνήθη διάταξη), οπότε θα έχουμε ότι E_x, E^y μετρήσιμα (αριθμήσιμα και συναριθμήσιμα άρα Borel), αλλά $E \subseteq X \times X$ άρα δεν είναι $\mathcal{L}$-μετρήσιμο. Έστω $X = Y = \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mu = \nu$ το αριθμητικό μέτρο. Ορίζουμε $f(m, n) = 1$ αν $m = n$ και $f(m, n) = -1$ αν $m = n + 1$ και $f(m, n) = 0$ αλλιώς. $\int |f| \, d(\mu \times \nu) = \infty$ και $\int\int f d\nu d\mu \neq \int\int f d\mu d\nu$.

5.1 Το ολοκλήρωμα Lebesgue στον $\mathbb{R}^n$

Το Lebesgue μέτρο m στον $\mathbb{R}^n$ είναι η πλήρωση του γινομένου $m \times \ldots \times m$ n φορές στην $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \ldots \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ή ισοδύναμα η πλήρωση του $m \times \ldots \times m$ στην $\mathcal{L} \otimes \ldots \otimes \mathcal{L} = \mathcal{L}^n$. Όταν δεν υπάρχει περίπτωση σύγχυσης θα γράφουμε απλά m.

Θεώρημα 5.1.1. *Έστω* $E \in \mathcal{L}^n$.

(i) *Ισχύει* $m(E) = \inf\{m(U) : U \supseteq E,\ U$ *ανοιχτό*$\} = \sup\{m(K) : K \subseteq E,\ K$ *συμπαγές*$\}$.

(ii) $E = A_1 \cup N_1 = A_2 \setminus N_2$ *όπου το* A_1 *είναι* F_σ*-σύνολο, το* A_2 *είναι* G_δ*-σύνολο και* $m(N_1) = m(N_2) = 0$.

(iii) *Αν* $m(E) < \infty$ $\forall \varepsilon > 0$ *υπάρχει πεπερασμένη συλλογή* $\{R_j\}_1^N$ *ξένων ορθογωνίων που οι πλευρές τους είναι διαστήματα ώστε* $m(E \triangle \cup_1^N R_j) < \varepsilon$.

Απόδειξη: Από τον ορισμό του μέτρου γινομένου (που γίνεται μέσω εξωτερικού μέτρου όπου η αρχική άλγεβρα είναι τα ορθογώνια), αν $E \in \mathcal{L}^n$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχουν ξένα ορθογώνια R_j ώστε $E \subseteq \cup_1^\infty R_j$ και $\sum_1^\infty m(R_j) \leqslant m(E) + \varepsilon$. Εφαρμόζοντας την εξωτερική κανονικότητα στο $\mathbb{R}$, υπάρχει ορθογώνιο με ανοιχτές πλευρές S_j, ώστε $S_j \supseteq R_j$ και $m(S_j) \leqslant m(R_j) + \varepsilon 2^{-j}$. Αν $U = \cup_1^\infty S_j$, το U είναι ανοιχτό και $m(U) \leqslant \sum_1^\infty m(S_j) \leqslant m(E) + 2\varepsilon$. Αυτό αποδεικνύει την πρώτη ισότητα του (i). Ομοίως και η δεύτερη. Αν $m(E) < \infty$, τότε $m(S_j) < \infty$ $\forall j$. Οι πλευρές του S_j είναι αριθμήσιμες ενώσεις ανοιχτών διαστημάτων, οπότε παίρνοντας κατάλληλες πεπερασμένες υποενώσεις βρίσκουμε ορθογώνια $T_j \subseteq S_j$, που είναι πεπερασμένες ενώσεις διαστημάτων ώστε $m(T_j) \geqslant m(S_j) - 2^{-j}$. Αν το N είναι αρκετά μεγάλο, έχουμε

$$\begin{aligned} m\left(E\triangle\bigcup_1^N T_j\right) &= m\left(E\setminus\bigcup_1^N T_j\right)+m\left(\bigcup_1^N T_j\setminus E\right)\\ &\leqslant m\left(\bigcup_1^N (S_j\setminus T_j)\right)+m\left(\bigcup_{N+1}^{\infty} S_j\right)+m\left(\bigcup_1^{\infty} S_j\setminus E\right)\\ &\leqslant 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Το $\cup_1^N T_j$ γράφεται ως πεπερασμένη ξένη ένωση ορθογωνίων με πλευρές διαστήματα. □

Θεώρημα 5.1.2. *Αν $f \in L^1(m)$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\varphi = \sum_1^N \alpha_j \chi_{R_j}$ όπου κάθε R_j είναι γινόμενο διαστημάτων ώστε $\int |f-\varphi| < \varepsilon$ και υπάρχει συνεχής συνάρτηση g που μηδενίζεται έξω από ένα συμπαγές ώστε $\int |f-g| < \varepsilon$.*

Απόδειξη: Είναι προφανής. □

Θεώρημα 5.1.3. *Το μέτρο Lebesgue είναι αναλλοίωτο στις μεταφορές, δηλαδή αν $E \in \mathcal{L}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ και $E+x = \{y+x : y \in E\}$ τότε $E+x \in \mathcal{L}^n$ και $m(E+x) = m(E)$. Επίσης, αν f Lebesgue μετρήσιμη και είτε $f \geqslant 0$ ή $f \in L^1(m)$, τότε $\int f(x+y)dy = \int f(y)dy$.*

Απόδειξη: Προφανές για παραλληλόγραμμο άρα και για Borel σύνολα. Τα μηδενικά διατηρούν το μέτρο μηδέν με μεταφορά, άρα ισχύει και για $\mathcal{L}^n$ σύνολα. Για τις συναρτήσεις χρησιμοποιούμε χαρακτηριστικές. Τέλος, για την τυχαία συνάρτηση χρησιμοποιούμε την ανάλυση σε θετικό και αρνητικό μέρος του πραγματικού και του φανταστικού μέρους. □

Ταυτίζουμε μια γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με τον πίνακα $(T_{ij}) = \langle Te_j, e_j\rangle$ όπου e_j η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^n$. Τότε $\det(T\circ S) = \det T \cdot \det S$. Συμβολίζουμε με $GL(n,\mathbb{R})$ την ομάδα των αντιστρέψιμων γραμμικών απεικονίσεων στον $\mathbb{R}^n$.

Λήμμα 5.1.4. *Κάθε $T \in GL(n,\mathbb{R})$ μπορεί να γραφτεί ως σύνθεση πεπερασμένου πλήθους από τους παρακάτω μετασχηματισμούς:*

$$T_1(x_1,\dots,x_j,\dots,x_n) = (x_1,\dots,cx_j,\dots,x_n)$$

για $1 \leqslant j \leqslant n$, $c \neq 0$,

$$T_2(x_1,\dots,x_j,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_j+cx_k,\dots,x_n)$$

για $1 \leqslant j \leqslant n, k \neq j$, $c \neq 0$,

$$T_3(x_1,\dots,x_j,\dots,x_k,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_k,\dots,x_j,\dots,x_n)$$

για $1 \leqslant j < k \leqslant n$. (Δηλαδή κάθε πίνακας με μη μηδενική ορίζουσα μπορεί να αναχθεί με πράξεις γραμμών στον ταυτοτικό.)

Θεώρημα 5.1.5. *Έστω $T \in GL(n,\mathbb{R})$*

(i) *Αν f Lebesgue μετρήσιμη στο $\mathbb{R}^n$, είναι μετρήσιμη και η $f\circ T$. Αν $f \geqslant 0$ ή $f \in L^1(m)$, τότε*

$$\int f(x)dx = |\det T| \int \big(f\circ T(x)\big)\,dx. \tag{5.2}$$

(ii) *Αν* $E \in \mathcal{L}^n$, *τότε* $T(E) \in \mathcal{L}^n$ *και* $m(T(E)) = |\det T|\, m(E)$.

Απόδειξη: Αν f Borel μετρήσιμη, το ίδιο είναι και η $f \circ T$ αφού T συνεχής. Αν η (5.2) ισχύει για T και $S \in GL(n, \mathbb{R})$ το ίδιο ισχύει και για την $T \circ S$, αφού

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= |\det T| \int \big(f \circ T(x)\big)\, dx = |\det T|\, |\det S| \int \big(f \circ T \circ S(x)\big)\, dx \\ &= |\det T \circ S| \int \big(f \circ (T \circ S)(x)\big)\, dx.\end{aligned}$$

Άρα αρκεί να δειχθεί η (5.2) για τους στοιχειώδης T_1, T_2, T_3 του παραπάνω λήμματος. Για τον T_3 είναι αλλαγή σειράς ολοκλήρωσης, άρα από το θεώρημα Fubini-Toneli $\det T_3 = -1$. Για τους T_1 και T_2 ολοκληρώνουμε πρώτα ως προς x_j και χρησιμοποιούμε τις

$$\int f(t)dt = |c| \int f(ct)dt, \qquad \int f(t+\alpha) = \int f(t)dt,$$

στη μία διάσταση που προέρχονται από το $m(rE) = |r|\, m(E)$ και $m(E + \alpha) = m(E)$ και έχουμε ότι $\det T_2 = 1$ και $\det T_1 = c$. Για το (ii), $T(E) \in \mathcal{L}^n$ γιατί T^{-1} συνεχής και $m(T(E)) = |\det T|\, m(E)$ με χρήση της $f = \chi_{T(E)}$. □

Πόρισμα 5.1.6. *Το μέτρο Lebesgue είναι αναλλοίωτο στις στροφές.*

Απόδειξη: Αν T στροφή, τότε $TT^* = I$, αλλά $\det T = \det T^*$. Άρα $|\det T| = 1$. □

Αποδεικνύεται και το ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα 5.1.7. *Έστω Ω ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $G : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ένας C^1 διαφορομορφισμός.*

(i) *Αν f Lebesgue μετρήσιμη στο $G(\Omega)$, τότε η $f \circ G$ είναι Lebesgue μετρήσιμη στο Ω. Αν $f \geqslant 0$ ή $f \in L^1(G(\Omega), m)$, τότε*

$$\int_{G(\Omega)} f(x)dx = \int_{\Omega} (f \circ G)(x)\, |\det D_x G|\, dx,$$

όπου $D_x G := D_x(g_1, \ldots, g_n) = (\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x))$.

(ii) *Αν* $E \subseteq \Omega$ *και* $E \in \mathcal{L}^n$, *τότε* $G(E) \in \mathcal{L}^n$ *και* $m(G(E)) = \int_E |\det D_x G|\, dx$.

Οι σημαντικότεροι μετασχηματισμοί στον $\mathbb{R}^2$ και στον $\mathbb{R}^3$ είναι οι πολικές συντεταγμένες ($x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, dxdy = rdrd\theta$) και οι σφαιρικές συντεταγμένες ($x = r\sin\varphi\cos\theta, y = r\sin\varphi\sin\theta, z = r\cos\varphi, dxdydz = r^2\sin\varphi drd\theta d\varphi$). Αντίστοιχοι τύποι υπάρχουν και σε υψηλότερες διαστάσεις αλλά είναι υπερβολικά περίπλοκοι. Συνήθως αρκεί να ξέρουμε ότι μέτρο Lebesgue είναι το γινόμενο ενός μέτρου ενός κομματιού της μοναδιαίας σφαίρας επί $r^{n-1}dr$ στο $(0, \infty)$. Θα κατασκευάσουμε αυτό το μέτρο στη σφαίρα: $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$. Αν $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ θα γράφουμε $r = |x|$ και $x' = x/|x|$. Η απεικόνιση $\Phi(x) = (r, x')$ είναι συνεχής, $1-1$ και επί από το $\mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to (0, \infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$ με συνεχή αντίστροφο την $\Phi^{-1}(r, x') = rx'$. Έστω m_* το μέτρο Borel στο $(0, \infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$ που επάγει η Φ από το μέτρο Lebesgue, δηλαδή $m_*(E) = m(\Phi^{-1}(E))$.

Θεώρημα 5.1.8. *Υπάρχει μοναδικό μέτρο Borel $\sigma = \sigma_{n-1}$ στην $\mathbb{S}^{n-1}$ ώστε $m_* = \rho \times \sigma$. Αν f Borel μετρήσιμη στον $\mathbb{R}^n$ και $f \geqslant 0$ ή $f \in L^1(m)$, τότε*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(r, x')r^{n-1}d\sigma(x')dr. \tag{5.3}$$

Απόδειξη: Η (5.3) για $f = \chi_E$ είναι ίδια με την $m_* = \rho \times \sigma$. Άρα για τη γενική f θα προκύψει από τη γραμμικότητα και όρια απλών. Αρκεί λοιπόν να δειχθεί η $m_* = \rho \times \sigma$. Έστω E Borel στο $\mathbb{S}^{n-1}$ και $\alpha > 0$. Έστω

$$E_\alpha = \Phi^{-1}((0, \alpha] \times E) = \{rx' : 0 < r \leqslant \alpha,\ x \in E\}.$$

Αν η (5.3) ισχύει όταν $f = \chi_{E_1}$ θα πρέπει

$$m(E_1) = \int_1^0 \int_E r^{n-1}d\sigma(x')dr = n^{-1}\sigma(E).$$

Ορίζουμε λοιπόν $\sigma(E) = nm(E_1)$. Επειδή η απεικόνιση $E \to E_1$ πηγαίνει σύνολα Borel σε σύνολα Borel, αντιμετατίθεται με ενώσεις, τομές και συμπληρώματα, είναι φανερό ότι το σ είναι μέτρο Borel στην $\mathbb{S}^{n-1}$. Επίσης, αφού E_α είναι η εικόνα του E_1 υπό την απεικόνιση $x \to \alpha x$, έπεται από το θεώρημα αλλαγής μεταβλητών, ότι $mE_\alpha = \alpha^n m(E_1)$, άρα αν $0 < \alpha < b$,

$$\begin{aligned} m_*((\alpha, b] \times E) &= m(E_b \backslash E_\alpha) = n^{-1}(b^n - \alpha^n)\sigma(E) = \sigma(E)\int_\alpha^b r^{n-1}dr \\ &= \rho \times \sigma((\alpha, b] \times E). \end{aligned}$$

Έστω $E = \mathcal{B}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ και $\mathcal{A}_E$ η συλλογή πεπερασμένων ξένων ενώσεων της μορφής $(\alpha, b] \times E$. Η $\mathcal{A}_E$ είναι άλγεβρα στο $(0, \infty) \times E$ που παράγει την σ-άλγεβρα $\mathcal{M}_E = \{A \times E : A \in \mathcal{B}_{(0,\infty)}\}$. Από προηγούμενο υπολογισμό έχουμε ότι $m_* = \rho \times \sigma$ στην $\mathcal{A}_E$ και από τη μοναδικότητα επέκτασης $m_* = \rho \times \sigma$ στην $\mathcal{M}_E$. Αλλά $\cup\{\mathcal{M}_E : E \in \mathcal{B}_{\mathbb{S}^{n-1}}\}$ είναι τα Borel ορθογώνια του $(0, \infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$, οπότε πάλι από τη μοναδικότητα της επέκτασης έχουμε ότι $m_* = \rho \times \sigma$ σε όλα τα σύνολα Borel. □

Πόρισμα 5.1.9. *Αν η f είναι μετρήσιμη στο $\mathbb{R}^n$ και $f \geqslant 0$ ή $f \in L^1(m)$ ώστε $f(x) = g(|x|)$ για κάποια g στο $(0, \infty)$, τότε*

$$\int f(x)dx = \sigma(\mathbb{S}^{n-1})\int_0^\infty g(r)r^{n-1}dr.$$

Πόρισμα 5.1.10. *Αν $\alpha > 0$ έστω $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \alpha\}$ και f μετρήσιμη στον $\mathbb{R}^n$.*

(i) *Αν $|f(x)| \leqslant C\,|x|^{-\alpha}$ στο B για κάποιο $C > 0$ και $\alpha < n$, τότε $f \in L^1(B)$. Αν $|f(x)| \geqslant C\,|x|^{-n}$ στο B, τότε $f \notin L^1(B)$.*

(ii) *Αν $|f(x)| \leqslant C\,|x|^{-\alpha}$ στο B^c για κάποιο $C > 0$ και $\alpha > n$, τότε $f \in L^1(B^c)$. Αν $|f(x)| \geqslant C\,|x|^{-n}$ στο B^c, τότε $f \notin L^1(B^c)$.*

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε το Πόρισμα 5.1.9 στην $|x|^{-\alpha}\chi_B$ και στην $|x|^{-\alpha}\chi_{B^c}$.
□

Πρόταση 5.1.11. *Αν* $\alpha > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\alpha|x|^2)dx = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{n/2}.$$

Απόδειξη: Έστω $I_n = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\alpha|x|^2)dx$. Για $n = 2$, από το Πόρισμα 5.1.9 έχουμε

$$I_2 = 2\pi \int_0^\infty re^{-\alpha r^2} dr = -\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)e^{-\alpha r^2}\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{\alpha}.$$

Αφού $\exp(-\alpha|x|^2)dx = \prod_1^\infty \exp(-\alpha x_j^2)$, από το θεώρημα Tonelli έχουμε ότι $I_n = (I_1)^n$. $I_1 = (I_2)^{1/2}$ οπότε $I_n = (\pi/\alpha)^{n/2}$. □

Ορίζουμε

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt (x > 0).$$

Έχουμε ότι $\Gamma(1) = 1$ και $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ [με την αντικατάσταση $t = s^2$ και χρήση της Πρότασης 5.1.11]. Επιπλέον, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Έπεται ότι για $n \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma(n) = (n-1)! \qquad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right)\dots\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}.$$

Πρόταση 5.1.12. $\sigma(\mathbb{S}^{n-1}) = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$.

Απόδειξη: Από το Πόρισμα 5.1.9 και την Πρόταση 5.1.11, και για $t = s^2$,

$$\begin{aligned}\pi^{n/2} &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}dx = \sigma(\mathbb{S}^{n-1})\int_0^\infty r^{n-1}e^{-r^2}dr \\ &= \frac{\sigma(\mathbb{S}^{n-1})}{2}\int_0^\infty s^{(n-2)/2}e^{-s}ds = \frac{\sigma(\mathbb{S}^{n-1})}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right).\end{aligned}$$

□

Πόρισμα 5.1.13. *Αν* $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$*, τότε*

$$m(B^n) = \pi^{n/2}/\Gamma((n/2)+1).$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}m(B^n) &= \sigma(\mathbb{S}^{n-1})\int_0^1 r^{n-1}dr = \sigma(\mathbb{S}^{n-1})/n \\ &= 2\pi^{n/2}/n\Gamma(n/2) = \pi^{n/2}/\Gamma((n/2)+1).\end{aligned}$$

□

Άσκηση: Ομοίως υπολογίζεται ο όγκος του $B_p^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p \leqslant 1\}(0 < p < \infty)$: Θέτουμε $I_p = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\|x\|_p^p)dx$. Από τη μια μεριά θα έχουμε

$$I_p = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp(-|t|^p)dt\right)^n.$$

Από την άλλη μεριά όμως

$$I_p = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\|x\|_p}^\infty \frac{d}{dt}(-\exp(-t^p))dt\right)dx.$$

Παρατήρηση 5.1.14. *Από τον τύπο Stirling για τη συνάρτηση* Γ *προκύπτει εύκολα ότι* $c_1(p)n^{-1/p} \leqslant \mathrm{vol}(B_p^n)^{1/n} \leqslant c_2(p)n^{-1/p}$*, όπου* c_1, c_2 *σταθερές ως προς* n*. Για παράδειγμα,* $\mathrm{vol}(B_2^n)^{1/n} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Κεφάλαιο 6

Προσημασμένα μέτρα, θεώρημα Radon-Nikodym

6.1 Προσημασμένα μέτρα

Ορισμός 6.1.1. *Ένα προσημασμένο μέτρο στον* $(X, \mathcal{M})$ *είναι μια συνάρτηση* $\nu : \mathcal{M} \to [-\infty, \infty]$ *ώστε* (i) $\nu(\emptyset) = 0$, (ii) *το* ν *δεν πετυχαίνει και τις δύο τιμές* $\{\pm\infty\}$, *και* (iii) *αν* $\{E_j\} \in \mathcal{M}$ *ακολουθία ξένων συνόλων, τότε* $\nu(\cup_1^\infty E_j) = \sum_1^\infty \nu(E_j)$ *όπου η τελευταία σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα αν* $\nu(\cup_1^\infty E_j) < \infty$.

Κάθε μέτρο είναι προσημασμένο μέτρο. Πολλές φορές αναφερόμαστε στα μέτρα ως «θετικά μέτρα». Για παράδειγμα, αν μ_1, μ_2 είναι μέτρα και ένα από αυτά είναι πεπερασμένο, τότε το $\nu = \mu_1 - \mu_2$ είναι προσημασμένο. Αν $f : X \to [-\infty, \infty]$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση και τουλάχιστον ένα από τα $\int f^+$, $\int f^-$ είναι πεπερασμένο, τότε το $\nu(E) = \int_E f d\mu$ είναι προσημασμένο.

Πρόταση 6.1.2. *Έστω* ν *ένα προσημασμένο μέτρο στον* $(X, \mathcal{M})$. *Αν* $\{E_j\}$ *είναι μια αύξουσα ακολουθία στην* $\mathcal{M}$, *τότε*

$$\nu(\cup_1^\infty E_j) = \lim_{j\to\infty} \nu(E_j).$$

Αν $\{E_j\}$ *είναι μια φθίνουσα ακολουθία στην* $\mathcal{M}$ *και* $\nu(E_1) < \infty$, *τότε* $\nu(\cap_1^\infty E_j) = \lim_{j\to\infty} \nu(E_j)$.

Ορισμός 6.1.3. *Έστω* ν *ένα προσημασμένο μέτρο στον* $(X, \mathcal{M})$, *ένα σύνολο* $E \in \mathcal{M}$ *λέγεται θετικό (αρνητικό, μηδενικό) αν και μόνο αν* $\nu(F) \geqslant 0$ *[*$\nu(F) \leqslant 0$, $\nu(F) = 0$*] για κάθε* $F \in \mathcal{M}$ *ώστε* $F \subset E$.

Στο παράδειγμα $\nu(E) = \int_E f d\mu$, το E είναι θετικό, αρνητικό, ή μηδέν αν και μόνο αν $f \geqslant 0$, $f \leqslant 0$, $f = 0$ μ-σ.π. στο E.

Λήμμα 6.1.4. *Αν* P_j *είναι ένα θετικό σύνολο για* ν *για κάθε* $j \in \mathbb{N}$, *τότε το σύνολο* $\cup_1^\infty P_j$ *είναι θετικό για* ν.

Απόδειξη: Έστω $Q_n = P_n \setminus \cup_1^{n-1} P_j$. Τότε $Q_n \subset P_n$, άρα το Q_n είναι θετικό. Αν $E \subset \cup_1^\infty P_j$, τότε $\nu(E) = \sum_1^\infty \nu(E \cap Q_n) \geqslant 0$. □

Θεώρημα 6.1.5 (Ανάλυση του Hahn). *Έστω ν ένα προσημασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{M})$, τότε υπάρχει θετικό σύνολο P και αρνητικό σύνολο N ώστε $P \cup N = X$ και $P \cap N = \emptyset$. Αν P', N' ένα άλλο τέτοιο ζευγάρι, τότε το $P \triangle P' (= N \triangle N')$ είναι μηδενικό για το ν.*

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας το ν δε δίνει ποτέ $+\infty$ (αλλιώς θεωρούμε το $-\nu$). Πρώτα ισχυριζόμαστε ότι αν $\nu(A) > -\infty$, τότε $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει $B \subset A$ ώστε $\nu(B) \geqslant \nu(A)$ και $\nu(E) > -\varepsilon$ $\forall E \subset B$. Αν όχι, υπάρχει $E_1 \subset A$ με $\nu(E_1) \leqslant -\varepsilon$. Αφού $\nu(A \backslash E_1) = \nu(A) - \nu(E_1) \geqslant \nu(A)$ υπάρχει $E_2 \subset A \backslash E_1$ ώστε $\nu(E_2) \leqslant -\varepsilon$. Συνεχίζοντας μ' αυτόν τον τρόπο φτιάχνουμε μια ακολουθία $\{E_j\}$ ξένων υποσυνόλων του A ώστε $\nu(E_j) \leqslant -\varepsilon$. Αν $E = \cup_1^\infty E_j$, τότε $\nu(A \backslash E) = \nu(A) - \sum_1^\infty \nu(E) = +\infty$, το οποίο είναι άτοπο.

Τώρα ισχυριζόμαστε ότι αν $\nu(A) > -\infty$ υπάρχει θετικό σύνολο $P \subset A$ με $\nu(P) \geqslant \nu(A)$. Θέτουμε $A_1 = A$ και ορίζουμε τα A_n επαγωγικά ως εξής: αν έχουν οριστεί τα $A_1, \ldots, A_{n-1}$, βρίσκουμε $A_n \subset A_{n-1}$ ώστε $\nu(A_n) \geqslant \nu(A_{n-1})$ και $\nu(E) \geqslant -1/n$ $\forall E \subset A_n$, από τον προηγούμενο ισχυρισμό. Έστω $P = \cap_1^\infty A_n$, τότε το P είναι θετικό από την κατασκευή και από την Πρόταση 6.1.2 έχουμε ότι $\nu(P) = \lim \nu(A_n) \geqslant \nu(A)$.

Έστω τώρα $s = \sup\{\nu(A) : A \in \mathcal{M}\}$. Υπάρχει ακολουθία $\{P_n\}$ ώστε $\nu(P_n) \to s$ και από τον δεύτερο ισχυρισμό, χωρίς βλάβη της γενικότητας, το P_n είναι θετικό για κάθε n. Έστω $P = \cup_1^\infty P_n$. Τότε $\nu(P) = s$ και το P είναι θετικό, από την Πρόταση 6.1.2 και από το Λήμμα 6.1.4. Επιπλέον, το $N = P^c$ είναι αρνητικό, γιατί αν $E \subset N$ και $\nu(E) > 0$ θα είχαμε ότι $\nu(P \cup E) = \nu(P) + \nu(E) > s$, το οποίο είναι άτοπο.

Τέλος, αν P', N' άλλο ένα τέτοιο ζευγάρι έχουμε ότι $P \backslash P' \subset P$ και $P \backslash P' \subset N'$, άρα έχουμε ότι το $P \backslash P'$ είναι και θετικό και αρνητικό, άρα είναι μηδενικό. Ομοίως για το $P' \backslash P$. □

Ορισμός 6.1.6. *Δυο μέτρα μ, ν λέγονται ορθογώνια αν υπάρχουν $E, F \in \mathcal{M}$ ώστε $E \cap F = \emptyset$, $E \cup F = X$, το E είναι μηδενικό για το μ και το F είναι μηδενικό για το ν. Γράφουμε $\mu \perp \nu$.*

Θεώρημα 6.1.7. *Αν ν προσημασμένο μέτρο, υπάρχουν μοναδικά θετικά μέτρα ν^+ και ν^- ώστε $\nu = \nu^+ - \nu^-$ και $\nu^+ \perp \nu^-$.*

Απόδειξη: Αν $X = P \cup N$ η ανάλυση Hahn για το ν, θέτουμε $\nu^+(E) = \nu(E \cap P)$ και $\nu^-(E) = -\nu(E \cap N)$. Φανερά, $\nu = \nu^+ - \nu^-$ και $\nu^+ \perp \nu^-$. Αν $\nu = \mu^+ - \mu^-$ με $\mu^+ \perp \mu^-$, έστω $E \cap F = \emptyset$, $E \cup F = X$ και $\mu^+(F) = \mu^-(E) = 0$. Τότε η $X = E \cup F$ είναι ανάλυση Hahn για το ν, οπότε το $P \triangle E$ είναι μηδενικό. Άρα $\forall A \in \mathcal{M}$, $\mu^+(A) = \mu^+(A \cap E) = \nu(A \cap E) = \nu(A \cap P) = \nu^+(A)$. Ομοίως $\nu^- = \mu^-$. □

Τα μέτρα ν^+ και ν^- λέγονται θετικό και αρνητικό μέρος του ν, και το $\nu = \nu^+ - \nu^-$ λέγεται ανάλυση Jordan του ν. Ορίζουμε την ολική κύμανση του ν να είναι το μέτρο $|\nu|$ με

$$|\nu| = \nu^+ + \nu^-.$$

Ορίζουμε το ολοκλήρωμα ως προς το προσημασμένο μέτρο ν: θέτουμε

$$L^1(\nu) = L^1(\nu^+) \cap L^1(\nu^-),$$

$$\int f d\nu = \int f d\nu^+ - \int f d\nu^- \text{ για } f \in L^1(\nu).$$

6.2 Το θεώρημα Lebesgue-Radon-Nikodym

Ορισμός 6.2.1. *Το προσημασμένο μέτρο* ν *είναι απόλυτα συνεχές ως προς το θετικό μέτρο* μ *αν* $\forall E \in \mathcal{M}$ *με* $\mu(E) = 0$ *συνεπάγεται* $\nu(E) = 0$. *Γράφουμε* $\nu \ll \mu$. *Εύκολα* $|\nu| \ll \mu$ *αν και μόνο αν* $\nu^+ \ll \mu$ *και* $\nu^- \ll \mu$.

Η απόλυτη συνέχεια είναι το «αντίθετο» της ορθογωνιότητας. Αν $\nu \ll \mu$ και $\nu \perp \mu$, τότε $\nu = 0$ (διότι αν $E \cap F = \emptyset$ και $X = E \cup F$) και $\mu(E) = |\nu|(F) = 0$. Επειδή $\nu \ll \mu$ έχουμε ότι $|\nu|(E) = 0$, άρα $|\nu| = 0$ και $\nu = 0$. Επίσης, $\nu \ll \mu$ αν και μόνο αν $\nu \ll |\mu|$.

Θεώρημα 6.2.2. *Έστω* ν *πεπερασμένο προσημασμένο μέτρο και* μ *θετικό μέτρο στον* $(X, \mathcal{M})$. *Τότε* $\nu \ll \mu$ *αν και μόνο αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta > 0$ *ώστε* $|\nu(E)| < \varepsilon$ *όταν* $\mu(E) < \delta$.

Απόδειξη: Αφού $\nu \ll \mu$ έχουμε ότι $|\nu| \ll \mu$ και $|\nu(E)| \leqslant |\nu|(E)$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\nu = |\nu|$, δηλαδή το ν είναι θετικό. Φανερά, από την $\varepsilon - \delta$ συνθήκη έχουμε ότι $\nu \ll \mu$. Αντίστροφα, έστω ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να μπορούμε να βρούμε $E_n \in \mathcal{M}$ με $\mu(E_n) < 2^{-n}$ και $\nu(E_n) \geqslant \varepsilon$. Θέτουμε $F_k = \cup_k^\infty E_n$ και $F = \cap_1^\infty F_k$. Τότε $\mu(F_k) < 2^{1-k}$, οπότε $\mu(F) = 0$, αλλά $\nu(F_k) \geqslant \varepsilon$ και αφού το ν είναι πεπερασμένο έχουμε ότι $\nu(F) = \lim \nu(F_n) \geqslant \varepsilon$. Έτσι έχουμε οδηγηθεί σε αντίφαση. $\square$

Το βασικό παράδειγμα απολύτως συνεχούς μέτρου είναι το $\nu(E) = \int_E f d\mu$, όπου η f είναι μ-ολοκληρώσιμη. Το ν είναι πεπερασμένο αν και μόνο αν $f \in L^1(\mu)$. Για μια μιγαδική συνάρτηση $f \in L^1(\mu)$ το προηγούμενο θεώρημα εφαρμόζεται στα Ref και Imf.

Πόρισμα 6.2.3. *Αν* $f \in L^1(\mu)$, *για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta > 0$ *ώστε* $\left|\int_E f d\mu\right| < \varepsilon$ *όταν* $\mu(E) < \delta$.

Παρατήρηση 6.2.4. *Αντί για* $\nu(E) = \int_E f d\mu$ *γράφουμε απλούστερα*

$$d\nu = f d\mu.$$

Λήμμα 6.2.5. *Έστω* ν *και* μ *πεπερασμένα στον* $(X, \mathcal{M})$. *Είτε* $\nu \perp \mu$ *ή υπάρχει* $\varepsilon > 0$ *και* $E \in \mathcal{M}$ *ώστε* $\mu(E) > 0$ *και* $\nu \geqslant \varepsilon\mu$ *στο* E *(δηλαδή το* E *είναι θετικό για το* $\nu - \varepsilon\mu$*).*

Απόδειξη: Έστω $X = P_n \cup N_n$ η ανάλυση Hahn για το $\nu - n^{-1}\mu$. Έστω $P = \cup_1^\infty P_n$ και $N = \cap_1^\infty N_n = P^c$. Τότε το N είναι αρνητικό για όλα τα $\nu - n^{-1}\mu$ για κάθε n, άρα $0 \leqslant \nu(N) \leqslant n^{-1}\mu(N)$ για κάθε n, οπότε $\nu(N) = 0$. Αν $\mu(P) = 0$, τότε $\nu \perp \mu$. Αν $\mu(P) > 0$ υπάρχει n ώστε $\mu(P_n) > 0$ και το P_n είναι θετικό σύνολο για το $\nu - n^{-1}\mu$. $\square$

Θεώρημα 6.2.6 (Lebesgue-Radon-Nikodym)**.** *Έστω ότι το* ν *είναι ένα σ-πεπερασμένο προσημασμένο μέτρο και το* μ *ένα σ-πεπερασμένο θετικό μέτρο στον* $(X, \mathcal{M})$. *Υπάρχουν μοναδικά σ-πεπερασμένα προσημασμένα μέτρα* λ, ρ *στον* $(X, \mathcal{M})$ *ώστε* $\lambda \perp \mu$, $\rho \ll \mu$ *και* $\nu = \lambda + \rho$. *Επίσης, υπάρχει* μ*-ολοκληρώσιμη* $f : X \to \mathbb{R}$, *μοναδική εκτός από μεταβολές σε μηδενικά σύνολα, ώστε* $d\rho = f d\mu$.

Απόδειξη: Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις. Στην πρώτη υποθέτουμε ότι τα ν και μ είναι θετικά και πεπερασμένα. Έστω

$$\mathcal{F} = \left\{ f : X \to [0, \infty] : \int_E f d\mu \leqslant \nu(E) \ \forall E \in \mathcal{M} \right\}.$$

Αφού $\nu \geqslant 0$, $0 \in \mathcal{F}$, άρα $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Αν $f, g \in \mathcal{F}$, τότε $h = \max\{f, g\} \in \mathcal{F}$, διότι αν $A = \{x : f(x) > g(x)\}$, $\forall E \in \mathcal{M}$ έχουμε

$$\int_E h d\mu = \int_{E\cap A} f d\mu + \int_{E\setminus A} g d\mu \leqslant \nu(E \cap A) + \nu(E\setminus A) = \nu(E).$$

Έστω $\alpha = \sup\{\int_X f d\mu : f \in \mathcal{F}\}$. Παρατηρούμε ότι $\alpha \leqslant \nu(X) < \infty$, και επιλέγουμε μια ακολουθία $\{f_n\} \in \mathcal{F}$ ώστε $\int_X f_n d\mu \to \alpha$. Θέτουμε $g_n = \max\{f_1, \ldots, f_n\}$ και $f = \sup_n f_n$. Τότε $g_n \in \mathcal{F}$ και αυξάνει μονότονα στην f. Επίσης, $\int g_n d\mu \geqslant \int f_n d\mu$. Έπεται ότι $\lim \int g_n d\mu = \alpha$ και από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε ότι $\int_E f d\mu = \lim \int_E g_n d\mu \leqslant \nu(E)$, άρα $f \in \mathcal{F}$ και $\int_X f d\mu = \lim \int_X g_n d\mu = \alpha$. Παρατηρούμε ότι αφού $f \in \mathcal{F}$, $f \geqslant 0$ και $\int f \leqslant \nu(E) < \infty$ έχουμε ότι $f < \infty$ σ.π., άρα χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $f : X \to [0, \infty)$. Ισχυριζόμαστε ότι το μέτρο $d\lambda = d\nu - f d\mu$, το οποίο είναι θετικό αφού $f \in \mathcal{F}$, είναι ορθογώνιο στο μ $[\lambda(E) = \nu(E) - \int_E f d\mu \geqslant 0]$. Αν όχι, από το Λήμμα 6.2.5 υπάρχει $E \in \mathcal{M}$ και $\varepsilon > 0$ ώστε $\mu(E) > 0$ και $\nu \geqslant \varepsilon\mu$ στο E. Αλλά τότε $\varepsilon\chi_E d\mu \leqslant d\lambda = d\nu - f d\mu$, άρα $(f + \varepsilon\chi_E) d\mu \leqslant d\nu$. Οπότε $f + \varepsilon\chi_E \in \mathcal{F}$, αλλά $\int (f + \varepsilon\chi_E) d\mu = \alpha + \varepsilon\mu(E) > \alpha$, το οποίο είναι άτοπο. Για τη μοναδικότητα, αν $d\nu = d\lambda' + f' d\mu$ έχουμε ότι $d\lambda - d\lambda' = (f - f') d\mu$. Αλλά $\lambda - \lambda' \perp \mu$, ενώ $(f - f') d\mu \ll \mu$. Συνεπώς, $d\lambda - d\lambda' = (f - f') d\mu = 0$ άρα $\lambda = \lambda'$ και $f = f'$ σ.π.

Στην δεύτερη περίπτωση υποθέτουμε ότι τα μ, ν είναι σ-πεπερασμένα. Υπάρχει ακολουθία ξένων συνόλων $A_j \in \mathcal{M}$ ώστε $\mu(A_j) < \infty$, $\nu(A_j) < \infty$ για κάθε j και $X = \cup_1^\infty A_j$ (γράφουμε το X ως ένωση ξένων σύνολων με πεπερασμένα μ-μέτρα και ως ένωση ξένων σύνολων με πεπερασμένα ν-μέτρα και παίρνουμε τομές). Ορίζουμε $\mu_j(E) = \mu(E \cap A_j)$ και $\nu_j(E) = \nu(E \cap A_j)$. Τότε $d\nu_j = d\lambda_j + f_j d\mu_j$ όπου $\lambda_j(A_j^c) = 0$ και $f_j|_{A_j^c} = 0$. Θέτω $\lambda = \sum_1^\infty \lambda_j$ και $f = \sum_1^\infty f_j$. Τότε $\lambda \perp \mu$ και $d\nu = d\lambda + f d\mu$. Η μοναδικότητα αποδεικνύεται όπως πριν.

Τέλος, στην τρίτη περίπτωση υποθέτουμε ότι το ν είναι προσημασμένο και εφαρμόζουμε το προηγούμενο στα ν^+ και ν^-. □

Η ανάλυση $\nu = \lambda + \rho$ με $\lambda \perp \mu$ και $\rho \ll \mu$ λέγεται ανάλυση Lebesgue του ν ως προς μ. Το ότι αν $\nu \ll \mu \Rightarrow \exists f : d\nu = f d\mu$ λέγεται θεώρημα Radon-Nikodym και η f λέγεται παράγωγος Radon-Nikodym του ν ως προς μ. Γράφουμε $f = d\nu/d\mu$. Οι τύποι που ξέρουμε από τα διαφορικά είναι σωστοί, για παράδειγμα $d(\nu_1 + \nu_2)/d\mu = d(\nu_1)/d\mu + d(\nu_2)/d\mu$. Ακολουθεί ο κανόνας αλυσίδας:

Πρόταση 6.2.7. *Υποθέτουμε ότι το ν είναι σ-πεπερασμένο προσημασμένο μέτρο και μ, λ σ-πεπερασμένα στον $(X, \mathcal{M})$ ώστε $\nu \ll \mu$ και $\mu \ll \lambda$.*

(i) *Αν $g \in L^1(\nu)$, τότε $g(d\nu/d\mu) \in L^1(\mu)$ και $\int g d\nu = \int g(d\nu/d\mu) d\mu$.*

(ii) *$\nu \ll \lambda$, και $(d\nu/d\lambda) = (d\nu/d\mu)(d\mu/d\lambda)$ σ.π.*

Απόδειξη: Θεωρώντας τα ν^+ και ν^- ξεχωριστά, υποθέτουμε ότι $\nu \geqslant 0$. Η εξίσωση $\int g d\nu = \int g(d\nu/d\mu) d\mu$ αληθεύει για την $g - \chi_E$ από τον ορισμό του $d\nu/d\mu$. Οπότε αληθεύει για απλές συναρτήσεις εξαιτίας της γραμμικότητας, για μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, και για συναρτήσεις που ανήκουν στον $L^1(\nu)$ πάλι εξαιτίας της γραμμικότητας. Αντικαθιστώντας τα ν, μ με μ, λ και θέτοντας $g = \chi_E d\nu/d\mu$ έχουμε

$$\nu(E) = \int_E \frac{d\nu}{d\mu} d\mu = \int_E \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda} d\lambda$$

για κάθε $E \in \mathcal{M}$, άρα $(d\nu/d\lambda) = (d\nu/d\mu)(d\mu/d\lambda)$ λ-σ.π. □

Πόρισμα 6.2.8. *Αν* $\mu \ll \lambda$ *και* $\lambda \ll \mu$, *τότε* $d\lambda/d\mu = (d\mu/d\lambda)^{-1}$ *σ.π.*

Παρατήρηση 6.2.9. Έστω μ μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$ και ν σημειακό μέτρο στο 0. Ξεκάθαρα $\mu \perp \nu$. Η παράγωγος Radon-Nikodym $d\nu/d\mu$ (που δεν υπάρχει) είναι γνωστή ως δ-συνάρτηση Dirac.

Κεφάλαιο 7

Διαφόριση στον $\mathbb{R}^n$

Το θεώρημα Radon-Nikodym μας δίνει τη δυνατότητα να ορίσουμε μια αφηρημένη έννοια αυτή της «παραγώγου ενός προσημασμένου μέτρου» ν ως προς ένα μέτρο μ. Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την ειδική περίπτωση όπου $(X, \mathcal{M}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ και $\mu = m$ το μέτρο Lebesgue. Εδώ μπορούμε να ορίσουμε μια *κατά σημείο* παράγωγο του ν ως προς το m με τον ακόλουθο τρόπο. Έστω ότι $B(x,r)$ η μπάλα ακτίνας r γύρω από το $x \in \mathbb{R}^n$. Θεωρούμε την ποσότητα

$$F(x) = \lim_{r \to 0} \frac{\nu\big((B(x,r)\big)}{m\big((B(x,r)\big)},$$

όταν αυτό υπάρχει. (Μάλιστα κάποιος θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει άλλα σύνολα αντί για τα $B(x,r)$, τα οποία να συρρικνώνονται στο x με έναν φυσιολογικό τρόπο. Θα εξετάσουμε αυτό το θέμα αργότερα.)

Αν $\nu \ll m$, ώστε $d\nu = f dm$, τότε η ποσότητα

$$\frac{\nu\big((B(x,r)\big)}{m\big((B(x,r)\big)}$$

είναι απλά η μέση τιμή της f στο $B(x,r)$, οπότε μπορεί κανείς να ελπίζει ότι $F = f$ σ.π. Θα δούμε ότι αυτό είναι σωστό υπό την προϋπόθεση ότι το $\nu(B(x,r))$ είναι πεπερασμένο για όλα τα x και όλα τα r. Βλέποντας με αυτό τον τρόπο την f, θα μπορούσε κανείς να θεωρήσει τα παραπάνω ως γενίκευση του θεμελιώδους θεωρήματος του απειροστικού λογισμού: η παράγωγος του αόριστου ολοκληρώματος της f (δηλαδή του ν) είναι η f.

Για το υπόλοιπο του κεφαλαίου, οι όροι «ολοκληρώσιμος» και «σχεδόν παντού» αναφέρονται στο μέτρο Lebesgue εκτός αν η διατύπωση μιλάει καθαρά για κάποιο άλλο μέτρο. Ξεκινάμε με ένα τεχνικό λήμμα που έχει ανεξάρτητο ενδιαφέρον.

Λήμμα 7.0.10. *Έστω ότι η $\mathcal{C}$ είναι οποιαδήποτε συλλογή ανοιχτών μπαλών στο $\mathbb{R}^n$, και έστω ότι $U = \cup_{B \in \mathcal{C}} B$. Αν $c < m(U)$, τότε υπάρχουν $B_1, B_2, \dots, B_k \in \mathcal{C}$ ώστε $\sum_1^k m(B_j) > 3^{-n} c$.*

Απόδειξη: Αν $c < m(U)$, από το Θεώρημα 5.1.1 υπάρχει ένα συμπαγές σύνολο $K \subseteq U$ με $m(K) > c$, και ένα πεπερασμένο πλήθος μπαλών στη $\mathcal{C}$— έστω ότι αυτές είναι οι $A_1, A_2, \dots, A_m$—καλύπτουν το K. Έστω ότι η B_1 είναι η μεγαλύτερη από τις A_j (δηλαδή ότι έχει τη μεγαλύτερη ακτίνα), έστω ότι η B_2 είναι η μεγαλύτερη από τις A_j που είναι ξένες με την B_1, κ.λπ. μέχρι να εξαντληθεί η οικογένεια A_j. Αν η A_i δεν είναι μια από τις B_j, υπάρχει ένα j ώστε $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ και η ακτίνα του A_i είναι το πολύ εκείνη του B_j. Οπότε $A_i \subseteq B_j^*$, όπου με B_j^* συμβολίζουμε την μπάλα που είναι ομόκεντρη με την B_j και με τριπλάσια ακτίνα. Αλλά τότε $K \subseteq \cup_j B_j^*$, οπότε

$$c < m(K) \leqslant \sum_j m(B_j^*) = 3^n \sum_j m(B_j).$$

□

Μια μετρίσημη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ λέγεται τοπικά ολοκληρώσιμη (ως προς το μέτρο Lebesgue) αν $\int_K |f|\, dx < \infty$ για κάθε συμπαγές $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Συμβολίζουμε τον χώρο τον τοπικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με L^1_{loc}. Αν $f \in L^1_{\text{loc}}$, $x \in \mathbb{R}^n$ και $r > 0$, ορίζουμε το $A_r f(x)$ να είναι η μέση τιμή της f στο $B(x, r)$:

$$A_r f(x) = \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} f(y)\, dy.$$

Λήμμα 7.0.11. *Αν $f \in L^1_{\text{loc}}$, η $A_r f(x)$ είναι συνεχής ως προς r για κάθε x και μετρήσιμη ως προς x για κάθε r.*

Απόδειξη: Από τα αποτελέσματα της Ενότητας 5.1 γνωρίζουμε ότι $m\big(B(x,r)\big) = cr^n$ όπου $c = m\big(B(0,1)\big)$ και $m\big(S(x,r)\big) = 0$ όπου $S(x,r) = \{y : |y - x| = r\}$. Από αυτό έπεται ότι $\chi_{B(x,r)} \to \chi_{B(x,R)}$ σ.π. καθώς $r \to R$, οπότε η συνάρτηση $\int_{B(x,r)} f(y)\, dy$ είναι συνεχής ως προς r από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης. Έτσι η $A_r f(y) = c^{-1} r^{-n} \int_{B(x,r)} f(y)\, dy$ είναι συνεχής ως προς το r. Επιπλέον,

$$A_r f(y) = c^{-1} r^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} g_r(x,y) f(y)\, dy \text{ όπου } g_r = \chi_{\{(x,y)\,:\,|x-y|<r\}}.$$

Η g_r είναι φανερά μετρήσιμη, οπότε η μετρησιμότητα της $A_r f$ έπεται από το θεώρημα Fubini. □

Στη συνέχεια, αν $f \in L^1_{\text{loc}}$ ορίζουμε τη *μεγιστική συνάρτηση Hardy-Littlewood* Hf με τη σχέση

$$Hf(x) = \sup_{r>0} A_r|f|(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy.$$

Λόγω του λήμματος 7.0.11, η HF είναι μετρήσιμη αφού ο ορισμός της θα έμενε ο ίδιος αν παίρναμε το supremum μόνο πάνω στο αριθμήσιμο $\mathbb{Q} \cap (0, \infty)$.

Θεώρημα 7.0.12 (Το Μεγιστικό Θεώρημα)**.** *Υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε για όλες τις $f \in L^1_{\text{loc}}$ και όλα τα $\alpha > 0$ να ισχύει*

$$m\big(\{x : Hf(x) > \alpha\}\big) \leqslant \frac{C}{\alpha} \int |f(x)|\, dx.$$

Απόδειξη: Θέτουμε $E_\alpha = \{x : Hf(x) > \alpha\}$. Για κάθε $x \in E_\alpha$ μπορούμε να επιλέξουμε $r_x > 0$ ώστε $A_{r_x}|f|(x) > \alpha$. Οι μπάλες $B(x, r_x)$ καλύπτουν το E_α, οπότε από το Λήμμα 7.0.10, αν $c < m(E_\alpha)$ υπάρχουν $x_1, x_2, \dots, x_k \in E_\alpha$ ώστε οι μπάλες $B_j = B(x, r_{x_j}$ να είναι ξένες και $\sum_1^k m(B_j) > 3^{-n}c$. Αλλά τότε,

$$c < 3^n \sum_1^k m(B_j) \leqslant \frac{3^n}{\alpha} \sum_1^k \int_{B_j} |f(y)|\, dy \leqslant \frac{3^n}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, dy.$$

Αφήνοντας το $c \to m(E_\alpha)$ φτάνουμε στο αποτέλεσμα. □

Με αυτό το εργαλείο στα χέρια μας, μπορούμε να αποδείξουμε τρεις εκδόσεις του θεμελιώδους θεωρήματος του απειροστικού λογισμού, η μία ισχυρότερη από την άλλη.

Θεώρημα 7.0.13. *Αν $f \in L^1_{loc}$, τότε $\lim_{r\to 0} A_r f(x) = f(x)$ σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι για $N \in \mathbb{N}$, $A_r f(x) \to f(x)$ σχεδόν για κάθε x με $|x| \leqslant N$. Αλλά για $|x| \leqslant N$ και $r \leqslant 1$ οι τιμές της $A_r f(x)$ εξαρτώνται μόνο από τις τιμές της $f(y)$ για $|y| \leqslant N + 1$, οπότε αντικαθιστώντας την f με $f\chi_{B(N+1,0)}$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f \in L^1$.Αν $\epsilon > 0$, από το Θεώρημα 5.1.2 μπορούμε να βρούμε μια συνεχή συνάρτηση g ώστε $\int |g(y)-f(y)|\, dy < \epsilon$. Η συνέχεια της g συνεπάγεται ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και $\delta > 0$ υπάρχει $r > 0$ ώστε $|g(y) - g(x)| < \delta$ όποτε $|y - x| < r$, και άρα

$$\big|A_r g(x) - g(x)\big| = \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \left| \int_{B(x,r)} \big(g(y) - g(x)\big)\, dy \right| < \delta.$$

Οπότε, $A_r g(x) \to g(x)$ καθώς $r \to 0$ για κάθε x, οπότε

$$\begin{aligned} &\limsup_{r\to 0} \big|A_r f(x) - f(x)\big| \\ &\qquad = \limsup_{r\to 0} \big|A_r(f-g)(x) + (A_r g - g)(x) + (g-f)(x)\big| \\ &\qquad \leqslant H(f-g)(x) + |f-g|(x). \end{aligned}$$

Έτσι αν

$$E_\alpha = \left\{ x : \limsup_{r\to 0} \big|A_r f(x) - f(x)\big| > \alpha \right\}$$

και

$$F_\alpha = \big\{ x : |f-g|(x) > \alpha \big\},$$

έχουμε

$$E_\alpha \subseteq F_{\alpha/2} \cup \big\{ x : H(f-g)(x) > \alpha/2 \big\}.$$

Αλλά $\alpha m(F_\alpha) \leqslant \int_{F_\alpha} |f(x) - g(x)|\, dx < \epsilon$, οπότε από το μεγιστικό θεώρημα,

$$m(E_\alpha) \leqslant \frac{2\epsilon}{\alpha} + \frac{2C\epsilon}{\alpha}.$$

Επειδή το ϵ ήταν τυχαίο, $m(E_\alpha) = 0$ για όλα τα $\alpha > 0$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Αυτό το θεώρημα μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής: αν $f \in L^1_{loc}$, τότε

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} \big(f(x) - f(y)\big)\, dy = 0,$$

σχεδόν για όλα τα x. Μάλιστα είναι αληθές κάτι ισχυρότερο: κανείς μπορεί να βάλει απόλυτες τιμές μέσα στο παραπάνω ολοκλήρωμα και πάλι να παρει σχεδόν παντού σύγκλιση στο μηδέν. Δηλαδή, αν ορίσουμε το *σύνολο Lebesgue* L_f της f να είναι το

$$L_f = \left\{ x : \lim_{r\to 0} \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} \big|f(x) - f(y)\big|\, dy = 0 \right\},$$

τότε έχουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα 7.0.14. *Αν* $f \in L^1_{loc}$, *τότε* $m\big((L_f)^c\big) = 0$.

Απόδειξη: Για κάθε $c \in \mathbb{C}$ μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 7.0.13 στη συνάρτηση $g_c(x) = |f(x) - c|$ οπότε θα έχουμε ότι, εκτός από ένα μηδενικό σύνολο E_c,

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} |f(y) - c|\, dy = |f(x) - c|.$$

Έστω ότι το R είναι ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, και θέτουμε $E = \cup_{c\in R} E_c$. Τότε $m(E) = 0$, και αν $x \notin E$, για κάθε $\epsilon > 0$ μπορούμε να διαλέξουμε $c \in R$ με $|f(x) - c| < \epsilon$, ώστε $|f(y) - f(x)| < |f(y) - c| + \epsilon$, και άρα

$$\limsup_{r\to 0} \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} \big|f(y) - f(x)\big|\, dy \leqslant |f(x) - c| + \epsilon < 2\epsilon.$$

Αφού το ϵ ήταν τυχαίο, ολοκληρώσαμε την απόδειξη. □

Τέλος, θεωρούμε οικογένειες συνόλων γενικότερες από τις μπάλες. Για μια οικογένεια $\{E_r\}_{r>0}$ Borel συνόλων στον $\mathbb{R}^n$ λέμε ότι *συρρικνώνεται ομαλά* στο $x \in \mathbb{R}^n$ αν (α) $E_r \subseteq B(x,r)$ για κάθε r, και (β) υπάρχει σταθερά $\alpha > 0$, ανεξάρτητη του r, ώστε $\mu(E_r) \geqslant \alpha m\big(B(x,r)\big)$. Τα σύνολα E_r δεν περιέχουν απαραίτητα το ίδιο το x. Για παράδειγμα, αν U είναι οποιοδήποτε σύνολο Borel υποσύνολο του $B(0,1)$ ώστε $m(U) > 0$, και $E_r = \{x + ry : y \in U\}$, τότε η E_r συρρικνώνεται ομαλά στο x. Η τελευταία μορφή του θεωρήματος διαφόρισης είναι η ακόλουθη.

Θεώρημα 7.0.15 (Διαφόρισης του Lebesgue)**.** *Έστω ότι* $f \in L^1_{loc}$. *Για κάθε* x *στο σύνολο Lebesgue της* f*—συγκεκριμμένα, σχεδόν για κάθε* x*—έχουμε*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{m(E_r)} \int_{E_r} \big|f(y) - f(x)\big|\, dy = 0$$

και

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{m(E_r)} \int_{E_r} f(y)\, dy = f(x)$$

για κάθε οικογένεια $\{E_r\}_{r>0}$ *που συρρικνώνεται ομαλά στο* x.

Απόδειξη:
Για κάθε $\alpha > 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m(E_r)} \int_{E_r} \big|f(y) - f(x)\big|\, dy &\leqslant \frac{1}{m(E_r)} \int_{B(x,r)} \big|f(y) - f(x)\big|\, dy \\
&\leqslant \frac{1}{\alpha m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} \big|f(y) - f(x)\big|\, dy.
\end{aligned}$$

Άρα η πρώτη εξίσωση έπεται από το Θεώρημα 7.0.14, και η δεύτερη έπεται άμεσα από την πρώτη. □

Επιστρέφουμε στην μελέτη των μέτρων στον $\mathbb{R}^n$. Ένα μέτρο Borel ν στον $\mathbb{R}^n$ θα λέγεται *κανονικό* αν (α) $\nu(K) < \infty$ για κάθε συμπαγές K, και (β) $\nu(E) = \inf\{\nu(U) : U$ ανοιχτό, $E \subseteq U\}$ για κάθε σύνολο Borel E. (Στην πραγματικότητα η συνθήκη (β) μπορεί να αποδειχθεί από την (α), αλλά προς το παρόν την διατυπώνουμε ως υπόθεση). Παρατηρούμε ότι από την (α), κάθε κανονικό μέτρο είναι σ-πεπερασμένο. Ένα προσημασμένο μέτρο Borel ν θα λέγεται κανονικό αν ν^+ και ν^- είναι κανονικά.

Θεώρημα 7.0.16. *Έστω ότι το ν είναι ένα κανονικό προσημασμένο μέτρο Borel στον $\mathbb{R}^n$, και έστω ότι $d\nu = d\lambda + f d\mu$ η αναπαράσταση Lebesgue-Radon-Nikodym. (Οπότε $\lambda \perp \mu$ και $f \in L^1_{\lambda o\varsigma}$.) Τότε για σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ (ως προς το μέτρο μ), ισχύει*

$$\lim_{r\to 0} \frac{\nu(E_r)}{\mu(E_r)} = f(x)$$

για κάθε οικογένεια $\{E_r\}$ που συρρικνώνεται ομαλά στο x.

Απόδειξη: Δεν είναι δύσκολο να επιβεβαιώσει κανείς ότι το μέτρο $f d\mu$ είναι κανονικό και έτσι είναι και το λ. Λόγω του Θεωρήματος 7.0.15 αρκεί να δείξουμε ότι αν το λ είναι κανονικό και $\lambda \perp \mu$, τότε μ-σχεδόν για κάθε x, $\lambda(E_r)/\mu(E_r) \to 0$ καθώς $r \to 0$ όταν τα E_r συρρικνώνονται ομαλά στο x. Επίσης αρκεί να πάρουμε $E_r = B(x,r)$ και να υποθέσουμε ότι το λ είναι θετικό, αφού για κατάλληλο $\alpha > 0$ έχουμε

$$\left|\frac{\lambda(E_r)}{\mu(E_r)}\right| \leqslant \frac{|\lambda|(E_r)}{\mu(E_r)} \leqslant \frac{|\lambda|(B(x,r))}{\mu(E_r)} \leqslant \frac{|\lambda|(B(x,r))}{\alpha\mu(B(x,r))}.$$

Υποθέτωντας ότι $\lambda \geqslant 0$, έστω ότι το A είναι ένα σύνολο Borel που ικανοποιεί την $\lambda(A) = \mu(A^c) = 0$, και έστω ότι

$$F_k = \left\{x \in A : \limsup_{r\to 0} \frac{\lambda(B(x,r))}{\mu(B(x,r))} > \frac{1}{k}\right\}.$$

Θα δείξουμε ότι $\mu(F_k) = 0$ για κάθε k, και αυτό θα ολοκληρώσει την απόδειξη.

Το επιχείρημα είναι παρόμοιο με την απόδειξη του μεγιστικού θεωρήματος. Από την κανονικότητα του λ, δοθέντος $\epsilon > 0$ υπάρχει ανοιχτό σύνολο $U_\epsilon \supseteq A$ ώστε $\lambda(U_\epsilon) < \epsilon$. Κάθε $x \in F_k$ είναι κέντρο μιας μπάλας $B_x \subseteq U_\epsilon$ ώστε $\lambda(B_x) > k^{-1}\mu(B_x)$. Από το Λήμμα 7.0.11 αν $V_\epsilon = \cup_{x\in F_k} B_x$ και $c < \mu(V_\epsilon)$ υπάρχει $x_1, \ldots, x_N$ ώστε τα $B_{x_1}, \ldots, B_{x_N}$ να είναι ξένα και

$$c < 3^n \sum_{j=1}^{N} \mu(B_{x_j}) \leqslant 3^n k \sum_{j=1}^{N} \lambda(B_{x_j}) \leqslant 3^n k\lambda(V_\epsilon) \leqslant 3^n k\lambda(U_\epsilon) \leqslant 3^n k\epsilon.$$

Συμπεραίνουμε ότι $\mu(V_\epsilon) \leqslant 3^n k\epsilon$, και αφού $F_k \subseteq V_\epsilon$ και το ϵ ήταν τυχαίο, $\mu(F_k) = 0$. □

Παράρτημα Α

Λύσεις Ασκήσεων

A.1 Ασκήσεις της ενότητας 1.2

(i) Αποδείξτε ότι μια άλγεβρα $\mathcal{A}$ που είναι κλειστή στις αριθμήσιμες αύξουσες ενώσεις (δηλαδή, αν $E_j \in \mathcal{A}$ με $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$, τότε $\cup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{A}$) είναι απαραίτητα και σ-άλγεβρα.

(ii) Έστω ότι η $\mathcal{M}$ είναι μια σ-άλγεβρα με άπειρο πλήθος στοιχείων. Δείξτε ότι

(α) η $\mathcal{M}$ περιέχει μια άπειρη ακολουθία μη κενών ξένων συνόλων.

(β) η $\mathcal{M}$ είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο ($\text{card}(\mathcal{M}) \geqslant \mathfrak{c} := \text{card}(\mathbb{R})$).

Λύση:

Ισχυρισμός 1 Αν $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα στο σύνολο X και $B \in \mathcal{A}$ τότε η οικογένεια $\mathcal{A}_B = \{A \cap B : A \subseteq \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{A}$ είναι μια σ-άλγεβρα στο σύνολο B.

Ισχυρισμός 2 Για κάθε άπειρη σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ στο σύνολο X υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ μη κενό, ώστε το $X \setminus A$ να περιέχει άπειρο πλήθος στοιχείων της $\mathcal{A}$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού 2: Αν όχι, τότε αν $A \neq \emptyset$ στοιχείο της $\mathcal{A}$ τα σύνολα $X \setminus A$ και $X \setminus A^c = A$ περιέχουν ως υποσύνολα πεπερασμένο πλήθος στοιχείων της $\mathcal{A}$. Όμως κάθε $F \in \mathcal{A}$ γράφεται ως εξής:

$$F = (A \cap F) \bigcup \big((X \setminus A) \cap F\big),$$

όπου βεβαίως τα $A \cap F$ και $(X \setminus A) \cap F$ είναι στοιχεία της $\mathcal{A}$. Αλλά είπαμε παραπάνω ότι μέσα στο A και στο $X \setminus A$ η $\mathcal{A}$ έχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Συνεπώς το τυχαίο $F \in \mathcal{A}$ φτιάχνεται από ενώσεις δύο συνόλων που επιλέγονται από δύο πεπερασμένες οικογένειες (τα στοιχεία της $\mathcal{A}$ που είναι υποσύνολα του A και τα στοιχεία της $\mathcal{A}$ που είναι υποσύνολα του $X \setminus A$. Άρα η $\mathcal{A}$ είναι πεπερασμένη, το οποίο είναι άτοπο.

Απόδειξη του (iiα) : Από τον ισχυρισμό 2, υπάρχει ένα μη κενό σύνολο $A_1 \in \mathcal{A}$ ώστε τα $A_1, B_1 := X \setminus A_1$ είναι ξένα και το B_1 περιέχει ένα άπειρο πλήθος στοιχείων της $\mathcal{A}$· δηλαδή (δες ισχυρισμό 1), η $\mathcal{A}_{B_1}$

είναι μια άπειρη σ-άλγεβρα στο σύνολο B_1. Στον μετρήσιμο χώρο $(B_1, \mathcal{A}_{B_1})$ εφαρμόζουμε ξανά τον ισχυρισμό 2, και συνεπώς υπάρχει ένα μη κενό $A_2 \in \mathcal{A}_{B_1} \subseteq \mathcal{A}$ ώστε το $B_2 := B_1 \setminus A_2$ να περιέχει ως υποσύνολα, ένα άπειρο πλήθος στοιχείων της $\mathcal{A}_{B_1}$ και άρα της $\mathcal{A}$. Έτσι, τα A_1, A_2, B_2 είναι ξένα σύνολα μη κενά και το B_2 περιέχει ως υποσύνολα, ένα άπειρο πλήθος στοιχείων της $\mathcal{A}$. Συνεχίζοντας με επαγωγή, αν έχουν οριστεί τα $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, B_{n-1}$ και είναι ξένα και μη κενά, με το B_{n-1} να περιέχει ως υποσύνολα, ένα άπειρο πλήθος στοιχείων της $\mathcal{A}$, εφαρμόζοντας τον ισχυρισμό 2 στον μετρήσιμο χώρο $(B_{n-1}, \mathcal{A}_{B_{n-1}})$ βρίσκουμε ένα μη κενό $A_n \subseteq B_{n-1}$ ώστε το $B_n := B_{n-1} \setminus A_n$ να περιέχει ως υποσύνολα ένα άπειρο πλήθος στοιχείων της $\mathcal{A}$, και προφανώς τα $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_n$ είναι ξένα.

Η ακολουθία A_n που προκύπτει από την επαγωγική διαδικασία μας δίνει τη λύση.

Απόδειξη του (iiβ) : Έστω A_n η ακολουθία που βρήκαμε προηγουμένως. Γράφουμε το διάστημα $(0, 1)$ στο δυαδικό σύστημα και συμφωνούμε ότι στις δυαδικές αναπαραστάσεις δεν χρησιμοποιούμε τη γραφή που τελειώνει σε διαδοχικά άπειρα 1.

Το $(0, 1)$ είναι υπεραριθμήσιμο και η συνάρτηση $F : (0, 1) \to \mathcal{A}$ με

$$F\big((s_n)_{n=1}^{\infty}\big) = \bigcup_{s_n=1} A_n$$

είναι 1-1.

A.2 Ασκήσεις της ενότητας 2.1

(i) Στοιχειώδες.

(ii)

$$\begin{aligned}\mu\big(\liminf_{j\to\infty} E_j\big) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}\bigcap_{j\geqslant n} E_j\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcap_{j\geqslant n} E_j\right).\end{aligned}$$

Αλλά για κάθε $j \geqslant n$ ισχύει $\mu\big(\cap_{j\geqslant n} E_j\big) \leqslant \mu(E_j)$ οπότε $\mu\big(\cap_{j\geqslant n} E_j\big) \leqslant \inf_{j\geqslant n} \mu(E_j)$. Συνεπώς,

$$\mu\big(\liminf_{j\to\infty} E_j\big) \leqslant \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{j\geqslant n} \mu(E_j)\right) = \liminf_{j\to\infty} \mu(E_j).$$

(iii) Τα σύνολα $E \cap F$, $E \setminus (E \cap F)$ και $F \setminus (E \cap F)$ είναι ξένα με ένωση το $E \cup F$.

(iv) Στοιχειώδες.

(v) Φανερά,

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(B_n) : B_n \in \mathcal{M}, E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right\}\\ &\leqslant \inf\big\{\mu(B) : B \in \mathcal{M}, E \subseteq B\big\},\end{aligned}$$

αφού στο δεύτερο infimum χρησιμοποιούμε συγκεκριμμένου τύπου κάλυμματα (καλύμματα ενός συνόλου) αντί για οποιαδήποτε. Για το αντίστροφο, αν $\epsilon > 0$, αρκεί να βρούμε ένα $B \in \mathcal{M}$ ώστε $E \subseteq B$ και $\mu(B) \leqslant \mu^*(E) + \epsilon$. Βρίσκουμε μια ακολουθία συνόλων $B_n \in \mathcal{M}$ ώστε $E \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} B_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(B_n) \leqslant \mu^*(E) + \epsilon$ Αλλά τότε, λόγω υποπροσθετικότητας του εξωτερικού μέτρου το σύνολο $B = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$ ικανοποιεί το ζητούμενο.

(vi) Αν το E είναι μετρήσιμο τότε ισχύει $\mu^*(X) = \mu^*(E)+\mu^*(E^c)$ οπότε $\mu^*(E) = \mu^*(X) - \mu^*(E^c) = \mu_*(E)$. Αντιστρόφως, λόγω της προηγούμενης άσκησης και του ότι $\mu_*(E) = \mu^*(X) - \mu^*(E^c)$ συμπεραίνουμε ότι

$$\mu_*(E) = \sup\big\{\mu(B) : B \in \mathcal{M}(\mathcal{A}), B \subseteq E\big\}.$$

Άρα αν $\mu_*(A) = \mu^*(A)$ τότε υπάρχουν ακολουθίες E_n και $F_n \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ ώστε $E_n \subseteq A \subseteq F_n$ με $\mu(F_n) - \mu(E_n) < 1/n$. Θέτουμε $E = \sup_{n=1}^{\infty} E_n$ και $F_n = \cap_{n=1}^{\infty} F_n$. Φανερά, $E, F \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ και $E \subseteq A \subseteq F$. Επίσης $\mu(F \setminus E) \leqslant \mu(F_n \setminus E_n) < 1/n$, οπότε $\mu(F \setminus E) = 0$. Παρατηρούμε ότι $A = E \cup (A \setminus E)$. Άρα, αφού $E \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ αρκεί να αποδείξουμε ότι το $A \setminus E$ είναι στην $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. Αλλά $A \setminus E \subseteq F \setminus E$ το οποίο είναι μηδενικό σύνολο και το $\mu^* \big|_{\mathcal{M}(\mathcal{A})}$ είναι πλήρες μέτρο, οπότε το $A \setminus E$ είναι μετρήσιμο.

(vii) Το (α) είναι στοιχειώδες. Για το (β) παρατηρούμε ότι τα μονοσύνολα ανήκουν στην $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ διότι $\{r\} = \cap_{n=1}^{\infty}(r - 1/n, r] \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Και οποιοδήποτε υποσύνολο του $\mathbb{Q}$ είναι αριθμίσημο, οπότε είναι αριθμίσημη ένωση μονοσυνόλων.

(γ) Αν $\emptyset \neq A_n \in \mathcal{A}$ και $\cup_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$ τότε

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \infty = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n).$$

Αν μ_1 το μέτρο που προκύπτει από το μ και μ_2 το αριθμητικό μέτρο, τότε αυτά είναι διαφορετικά μέτρα αφού διαφέρουν στα πεπερασμένα μη κενά σύνολα και οι περιορισμοί τους στην $\mathcal{A}$ ταυτίζονται.

A.3 Ασκήσεις της ενότητας 2.3

(i) Αν $\mu(E) < \infty$ τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει σύνολο A που είναι πεπερασμένη ένωση ανοιχτών διαστημάτων ώστε $\mu(E \bigtriangleup A) < \epsilon$.

(ii) Έστω ότι η συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα και δεξιά συνεχής, και έστω μ_E το επαγόμενο μέτρο. Τότε

(α) $\mu_F\big(\{a\}\big) = F(a) - F(a^-)$

(β) $\mu_F\big([a,b)\big) = F(b^-) - F(a^-)$

(γ) $\mu_F\big([a,b]\big) = F(b) - F(a^-)$

(δ) $\mu_F\big((a,b)\big) = F(b^-) - F(a)$.

(iii) Αν $E \in \mathcal{L}$ και $m(E) > 0$, τότε για κάθε $0 < a < 1$ υπάρχει ανοιχτό διάστημα I ώστε $m(E \cap I) > am(I)$.

Λύση:

Με απαγωγή στο άτοπο: αν υπάρχει $a \in (0,1)$ ώστε για κάθε ανοιχτό διάστημα I να ισχύει $m(E \cap I) < am(I)$ τότε για κάθε κάλυψη του E από ανοιχτά διαστήματα $I_1, I_2, \ldots, I_N$, λόγω του ότι $E \subseteq \cup_{k=1}^N (I_k \cap E)$, ισχύει

$$m(E) \leqslant \sum_{k=1}^{N} m(I_k \cap E) < \sum_{k=1}^{N} am(I_k) = a\sum_{k=1}^{N} m(I_k).$$

Παίρνοντας infimum ως προς όλες τις καλύψεις του E οδηγούμαστε σε άτοπο.

(iv) Αν $E \in \mathcal{L}$ και $m(E) > 0$, τότε το σύνολο $E - E = \{x - y \,:\, x, y \in E\}$ περιέχει ένα διάστημα της μορφής $(-\delta, \delta)$ για κατάλληλο $\delta > 0$.

Λύση:

Πρώτα αναγόμαστε σε συμπαγές E: αφού $m(E) > 0$ υπάρχει συμπαγές $K \subseteq E$ ώστε $m(K) > 0$. Φανερά $K - K \subseteq E - E$ οπότε αρκεί να βρούμε $\delta > 0$ ώστε $(-\delta, \delta) \subseteq K - K$.

Από την εξωτερική κανονικότητα του m υπάρχει ανοιχτό σύνολο $U \supseteq K$ ώστε $m(U) < 2m(K)$. Τα $\mathbb{R} \setminus U$ και K είναι κλειστά και ξένα με το K συμπαγές, οπότε η απόστασή τους $\delta = d(\mathbb{R} \setminus U, K)$ είναι θετικός αριθμός. Θα δείξουμε ότι $(-\delta, \delta) \subseteq K - K$. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να δείξουμε ότι για κάθε $|x| < \delta$ ισχύει $x \in K - K$ που είναι ισοδύναμο με το $K \cap (x_K) \neq \emptyset$.

Έστω λοιπόν ότι $|x| < \delta$.

Ισχυρισμός 1 $x + K \subseteq U$.

Αν όχι, τότε υπάρχει $y \in K$ ώστε $x + y \notin U$, οπότε $x + y \in \mathbb{R} \setminus U$, άρα

$$\delta \leqslant |y - (x + y)| = |x| < \delta,$$

το οποίο είναι άτοπο.

Ισχυρισμός 2 $(x + K) \cap K \neq \emptyset$.

Αν όχι, τότε λόγω του Ισχυρισμού 1, τα σύνολα K και $x + K$ είναι ξένα υποσύνολα του U. Όμως τότε

$$2m(K) > m(U) \geqslant m(K) + m(x + K) = 2m(K),$$

το οποίο είναι άτοπο.

Ασκήσεις της ενότητας 3.1

(i) Αν f_n ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στον $(X, \mathcal{M})$, τότε το σύνολο $\{x \in X : \text{το } \lim f_n(x) \text{ υπάρχει}\}$, ανήκει στην $\mathcal{M}$.

Λύση:

Αν θέσουμε $g_1(x) = \limsup f_n(x)$ και $g_2(x) = \liminf f_n(x)$, τότε

$$\{x \in X : \text{το } \lim f_n(x) \text{ υπάρχει}\} = (g_1 - g_2)^{-1}\{0\}$$

και το ζητούμενο έπεται.

(ii) Αν $f : X \mapsto \mathbb{R} \sup\{\pm\infty\} =: \overline{\mathbb{R}}$ και $f^{-1}\big((r, \infty]\big) \in \mathcal{M}$ για κάθε $r \in \mathbb{Q}$ τότε η f είναι μετρήσιμη.

Λύση:

Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ για την ακολουθία ρητών $r_n = ([na]+1)/n$ ισχύει $r_n \to a^+$, και

$$f^{-1}\big((a, \infty]\big) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (r_n, \infty]\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\big((r_n, \infty]\big) \in \mathcal{M}.$$

(iii) Το supremum μιας υπεραριθμήσιμης οικογένειας μετρήσιμων συναρτήσεων με τιμές στο $\overline{\mathbb{R}}$ και πεδίο ορισμού τον $(X, \mathcal{M})$ δεν είναι απαραίτητα μετρήσιμη συνάρτηση.

Λύση:

Αν E ένα μη μετρήσιμο σύνολο, τότε επειδή $E = \chi_E^{-1}\{1\}$ η συνάρτηση χ_E δεν είναι μετρήσιμη. Όμως $\chi_E = \sup\{\chi_{\{a\}} : a \in E\}$, και το ζητούμενο έπεται.

(iv) Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ είναι μονότονη συνάρτηση τότε είναι Borel μετρήσιμη.

Λύση:

Μια μονότονη συνάρτηση έχει αριθμίσιμο πλήθος ασυνεχειών πρώτου βαθμού. Άρα αν A το σύνολο των σημείων ασυνέχειας, τα $\mathbb{R} \setminus A$ και A είναι μετρήσιμα και οι $f|_{\mathbb{R}\setminus A}$ και $f|_A$ είναι μετρήσιμες (η πρώτη είναι συνεχής), οπότε εύκολα είναι μετρήσιμη και η f.

Ασκήσεις της ενότητας 3.2

(i) Έστω ότι $f_n \in L^+$ και $f_n \to f$ κατά σημείο και $\int f = \lim \int f_n < \infty$. Τότε για κάθε $E \in \mathcal{M}$ ισχύει $\int_E f = \lim \int_E f_n$. Αυτό δεν είναι απαραίτητα σωστό αν $\int f = \lim \int f_n = \infty$.

Λύση:

Εφαρμόζουμε το λήμμα Fatou στην ακολουθία $f_n\chi_E$ και παίρνουμε $\int_E f \leqslant \liminf \int_E f_n$. Για την αντίστροφη ανισότητα, θέτουμε $g_n = (f - g_n)\chi_E \to 0$, οπότε πάλι από το λήμμα Fatou

$$0 = \int \liminf g_n \leqslant \liminf \int g_n = \liminf \left(\int_E f - \int_E f_n \right)$$

συνεπώς

$$0 \leqslant \int_E f - \limsup \int_E f_n.$$

Επειδή τώρα

$$\limsup \int_E f_n \leqslant \limsup \int f_n = \lim \int f_n < \infty,$$

καταλήγουμε στην

$$\limsup \int_E f_n \leqslant \int_E f \leqslant \liminf \int_E f_n,$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

Η συνθήκη $\int f = \lim \int f_n < \infty$ είναι απαραίτητη. Για παράδειγμα, θεωρήστε την ακολουθία

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x > 1/n \\ n^2, & 0 < x \leqslant 1/n, \end{cases}$$

η οποία συγκλίνει κατά σημείο στην $\chi_{(0,+\infty)}$. Εύκολα ελέγχουμε ότι $\int_{(0,1)} f_n \geqslant n \to \infty$ και $\int_{(0,1)} \chi_{(0,+\infty)} = 1$· αλλά βέβαια $\int f = \lim \int f_n = \infty$.

(ii) Αν $f \in L^+$ ορίζουμε το μέτρο $\lambda(E) = \int_E f\, d\mu$ για κάθε $E \in \mathcal{M}$. Τότε για κάθε $g \in L^+$ ισχύει $\int g\, d\lambda = \int gf\, d\mu$.

Λύση:

Αν g απλή, έστω ότι είναι η $\sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}$ είναι η *κανονική της* αναπαράσταση. Τότε ισχύει,

$$\int g\, d\lambda = \sum_{j=1}^n a_j \lambda(E_j) = \sum_{j=1}^n a_j \int_{E_j} f\, d\mu = \int \left(\sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j} f \right) d\mu = \int gf\, d\mu.$$

Για τη γενική περίπτωση, χρησιμοποιούμε μια μη αρνητική, αύξουσα ακολουθία απλών συναρτήσεων ϕ_n που συγκλίνουν κατά σημείο στην g, οπότε η $\phi_n f$ ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος μονότονης σύγκλισης και συγκλίνει στην gf. Οπότε

$$\int g\, d\lambda = \lim \int \phi_n\, d\lambda = \lim \int \phi_n f\, d\mu = \lim \int gf\, d\mu.$$

(iii) Αν $f_n \in L^+$ και η f_n είναι φθίνουσα ακολουθία και συγκλίνει στην f κατά σημείο, και αν υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε το $\int f_k$ να είναι πεπερασμένο, τότε $\int f = \lim \int f_n$.

Λύση:

Θέτουμε $g_n = f_k - f_n$ για κάθε $n \geqslant k$. Φανερά, η g_n είναι αύξουσα, μη αρνητική ακολουθία με κατά σημείο όριο την $f_k - f_n$. Οπότε από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης

$$\begin{aligned}\lim \int g_n = \int f_k - \int f \quad &\Rightarrow \quad \lim \int g_n - \int f_k = -\int f\\ &\Rightarrow \quad \lim \int (-f_n) = -\int f\\ &\Rightarrow \quad \lim \int f_n = \int f.\end{aligned}$$

Παρατήρηση: Ο περιορισμός για την f_k είναι απαραίτητος. Για παράδειγμα, η $f_n(x) = 1/n$ φθίνει κατά σημείο στο 0 αλλά το ολοκλήρωμά της είναι πάντα άπειρο. Και βεβαίως δεν ισχύει $\lim \int f_n = \int \lim f_n$.

(iv) Αν $f \in L^+$ και $\int f$ πεπερασμένο, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $E \in \mathcal{M}$ με $\mu(E) < \infty$ και $\int_E f > \int f - \varepsilon$.

Λύση:

Αφού $\int f < \infty$, η ποσότητα $\nu(E) = \int_E f$ ορίζει ένα πεπερασμένο μέτρο. Θέτουμε $E_n = \{x \in X : f(x) \geqslant 1/n\}$. Αν $\mu(E_n) = \infty$ για κάποιο n, τότε

$$\int f \geqslant \int_{E_n} f \geqslant \frac{1}{n}\mu(E_n) = \infty,$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα $\mu(E_n) < \infty$ για κάθε n. Παρατηρούμε όμως ότι $E_n \subseteq E_{n+1}$ για κάθε n, και αφού το ν είναι μέτρο θα ισχύει $\nu(\cup E_n) = \lim \nu(E_n)$. Έχουμε όμως,

$$\nu(\cup E_n) = \int_{\cup E_n} f = \int_{\{x : f(x) > 0\}} f = \int f,$$

αφού προφανώς $\int_{\{x : f(x) - 0\}} f = 0$. Άρα

$$\int f = \lim \nu(E_n) = \lim \int_{E_n} f.$$

Οπότε υπάρχει n_0 ώστε

$$\left| \int f - \int_{E_{n_0}} f \right| < \varepsilon,$$

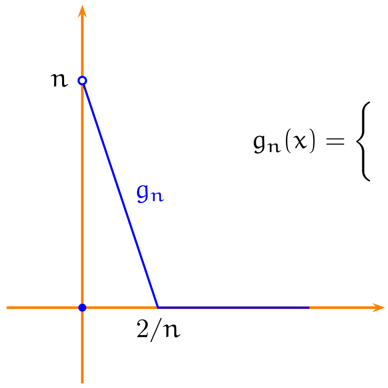
από όπου συμπεραίνουμε ότι $\int_{E_{n_0}} f \geqslant \int f - \varepsilon$, και βέβαια $\mu(E_{n_0}) < \infty$.

(v) Βρείτε ακολουθία Borel μετρησίμων συναρτήσεων f_n στο $\mathbb{R}$ που να φθίνει ομοιόμορφα στο 0 αλλά να ισχύει $\int f_n \, dm = \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Βρείτε ακολουθία Borel μετρησίμων συναρτήσεων g_n στο $[0,1]$ που να συγκλίνει στο 0 κατά σημείο αλλά να ισχύει $\int g_n \, dm = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Λύση:

Για το πρώτο θεωρήστε την ακολουθία των σταθερών συναρτήσεων $f_n = 1/n$ και για το δεύτερο την



$$g_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \text{ ή } x \geqslant 2/n \\ -\frac{1}{2}n^2 x + n, & 0 < x < \frac{2}{n}, \end{cases}$$

ή την απλή

$$h_n = \begin{cases} 0, & x = 0 \text{ ή } x \geqslant 1/n \\ n, & 0 < x < \frac{1}{n}. \end{cases}$$

A.4 Ασκήσεις της ενότητας 3.3

(i) Έστω ότι ο $(X, \mathcal{M}, \mu)$ είναι χώρος πεπερασμένου μέτρου. Έστω ότι $f_n \in L^1(\mu)$ και $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$. Δείξτε ότι αναγκαστικά θα ισχύει $f \in L^1(\mu)$ και $\lim \int f_n = \int f$.

Λύση: Η f είναι φανερά μετρήσιμη ως όριο μετρησίμων. Αφού $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$ συνεπάγεται ότι υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ να ισχύει $\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leqslant 1$. Οπότε $f - f_{n_0} \in L^1(\mu)$, αφού $\int |f - f_{n_0}| \leqslant \sup |f - f_{n_0}| \mu(X) < \infty$. Έτσι η f είναι στοιχείο του $L^1(\mu)$ ως άθροισμα δυο στοιχείων του (της f_{n_0} και της $f - f_{n_0}$).

Τώρα για να δείξουμε ότι τα ολοκληρώματα των f_n συγκλίνουν στο ολοκλήρωμα της f αρκεί να επιβεβαιώσουμε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του θερωήματος κυριαρχημένης σύγκλισης. Για κάθε $n \geqslant n_0$ ισχύει $|f_n| \leqslant |f_n - f| + |f| \leqslant 1 + |f|$ που ανήκει στον $L_1(\mu)$ διότι το μέτρο είναι πεπερασμένο: $\int (1 + |f|) = \mu(X) + \int |f|$. Δηλαδή πράγματι εφαρμόζεται το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

(ii) Για τον χώρο μέτρου $(X, \mathcal{M}, \mu)$ δίνονται οι συναρτήσεις f_n, f, g_n, $g \in L^1(\mu)$ ώστε $f_n \longrightarrow f$ σ.π., $g_n \longrightarrow g$ σ.π., $|f_n| \leqslant g_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lim \int g_n = \int g$. Δείξτε ότι $\lim \int f_n = \int f$.

Λύση: Αφού $|f_n| \leqslant g_n$ οι συναρτήσεις $g_n - f_n$ και $g_n + f_n$ είναι μη αρνητικές, έχουν όρια τις $g - f$ και $g + f$ αντίστοιχα, και εφαρμόζουμε σε αυτές το λήμμα Fatou:

$$\int \liminf (g_n - f_n) \leqslant \liminf \int (g_n - f_n)$$

οπότε

$$\int (g - f) \leqslant \int g - \limsup \int f_n.$$

Τώρα $g \in L^1(\mu)$ οπότε μπορούμε να προσθέσουμε και στα δύο μέρη το $\int(-g)$ και να χρησιμοποιήσουμε τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος για να καταλήξουμε στην

$$\int f \geqslant \limsup \int f_n. \tag{A.1}$$

Εργαζόμενοι ομοίως με την $g_n + f_n$ οδηγούμαστε στην

$$\int f \leqslant \liminf \int f_n. \tag{A.2}$$

Οι (A.1) και (A.2) δίνουν το αποτέλεσμα.

(iii) Αν $f \in L^1(m)$ και $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ τότε η F είναι συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

Λύση: Από την αρχή της μεταφοράς, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε ακολουθία x_n που συγκλίνει στο x ισχύει $\lim F(x_n) = F(x)$. Όμως

$$F(x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} f(t)\,dt = \int f(t)\chi_{(-\infty, x_n)}(t)\,dt$$

και

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int f(t)\chi_{(-\infty, x)}(t)\,dt.$$

Συνεπώς αρκεί να επιβεβαιώσουμε ότι εφαρμόζεται το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης. Παρατηρούμε ότι

$$f(t)\chi_{(-\infty, x_n)}(t) \to f(t)\chi_{(-\infty, x)}(t)$$

σχεδόν για κάθε t (εκτός ίσως από το ίδιο το x), και ότι

$$|f(t)\chi_{(-\infty, x_n)}(t)| \leqslant |f(t)| \in L^1(\mu).$$

Το συμπέρασμα έπεται από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

(iv) Αν $f_n(x) = ae^{-nax} - be^{-nbx}$ όπου $0 < a < b$, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n(x)\,dx \neq \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx,$$

και άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n(x)|\,dx = \infty.$$

Λύση: Προφανώς από το θεώρημα 3.3.5 δεν θα ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n(x)|\,dx < \infty$$

αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n(x)\,dx \neq \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx.$$

Συνεπώς αρκεί να αποδείξουμε το τελευταίο.

Με απλή ολοκλήρωση βλέπουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n(x)\,dx = 0$.

Τώρα υπολογίζουμε το $\int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx &= \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (ae^{-nax} - be^{-nbx}) \right) dx \\
&= \int_0^{\infty} \left(a\sum_{n=1}^{\infty} (e^{-ax})^n - b\sum_{n=1}^{\infty} (e^{-bx})^n \right) dx \\
&= \int_0^{\infty} \left(\frac{ae^{-ax}}{1-e^{-ax}} - \frac{be^{-bx}}{1-e^{-bx}} \right) dx
\end{aligned}$$

Επειδή για οποιαδήποτε συνάρτηση $f \in L^1(0,\infty)$ λόγω του ότι $|f\chi_{(1/n,\infty)}| \leqslant |f|$ και του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης ισχύει $\int_{1/n}^{\infty} f \to \int f$ το τελευταίο ολοκλήρωμα θα υπολογιστεί ως όριο του ολοκληρώματος στο $(1/n, \infty)$ καθώς το n τείνει στο άπειρο. Έτσι το ολοκλήρωμά μας είναι ίσο με

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_{1/n}^{\infty} \left(\frac{ae^{-ax}}{1-e^{-ax}} - \frac{be^{-bx}}{1-e^{-bx}} \right) dx &= \lim_{n\to\infty} \Big(\ln(1-e^{-ax}) - \ln(1-e^{-bx}) \Big) \Big|_{1/n}^{\infty} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \ln \frac{1-e^{-ax}}{1-e^{-bx}} \\
&= \ln\left(\frac{a}{b}\right) \neq 0.
\end{aligned}$$

(v) Υπολογίστε τα όρια αιτιολογώντας τις πράξεις σας:

(α) $\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}\sin\frac{x}{n}\,dx$.

Λύση: Η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}\sin\frac{x}{n}$ συγκλίνει στο 0 για κάθε x καθώς το n τείνει στο άπειρο. Άρα το όριο του ολοκληρώματος θα είναι μηδέν αν δείξουμε ότι μπορεί να εφαρμοστεί το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Bernoulli βλέπουμε ότι

$$\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}\sin\frac{x}{n}\right| \leqslant \left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}\right| \leqslant \frac{1}{1+x},$$

αλλά φανερά $\int_0^\infty 1/(1+x) = \infty$. Συνεπώς θα πρέπει να αναζητήσουμε καλύτερο φράγμα. Για παράδειγμα, $\int_0^\infty 1/(1+x^2) = \arctan(x)|_0^\infty = \pi/2$ αλλά *δεν είναι σωστό* ότι για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και για κάθε $x\in(0,\infty)$ ισχύει $1+x^2 \leqslant (1+x/n)^n$.

Βρίσκουμε $x_0\in(0,\infty)$ ώστε για κάθε $x\geqslant x_0$ να ισχύει

$$\left(1+\frac{x}{3}\right)^3 \geqslant 1+x^2.$$

Αυτό είναι εφικτό αφού το ένα είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού και το άλλο δευτέρου. Οπότε, επειδή η ακολουθία $(1+x/n)^n$ είναι αύξουσα για κάθε $x\in(0,\infty)$, για κάθε $x\geqslant x_0$ θα ισχύει

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geqslant \left(1+\frac{x}{3}\right)^3 \geqslant 1+x^2.$$

Αν τώρα θέσουμε

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & \text{αν } x\geqslant x_0 \\ \frac{1}{1+x} & \text{αν } 0<x\leqslant x_0 \end{cases}$$

ισχύει $|f_n(x)|\leqslant g(x)$ για κάθε $x\in(0,\infty)$ και βεβαίως $\int_{(0,\infty)} g(x)\,dx < \infty$. Οπότε εφαρμόζεται το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

(β) $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 (1+nx^2)(1+x^2)^{-n}\,dx$.

Λύση: Η ακολουθία συναρτήσεων $(1+nx^2)(1+x^2)^{-n}$ συγκλίνει στο μηδέν σχεδόν παντού (εκτός από το $x=0$). Από την ανισότητα Bernoulli ισχύει

$$\left|\frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n}\right| \leqslant \frac{1+nx^2}{1+nx^2} = 1 \in L^1[0,1],$$

οπότε εφαρμόζεται το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης και το ζητούμενο όριο είναι μηδέν.

(γ) $\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty n\sin\frac{x}{n}\left(x(1+x^2)\right)^{-1}\,dx$.

Λύση: Ισχύει

$$\left|\frac{n\sin(x/n)}{x(1+x^2)}\right| \leqslant \frac{n(|x|/n)}{x(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2} \in L^1(0,\infty).$$

Άρα εφαρμόζεται το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης και το ζητούμενο όριο είναι $\pi/2$.

(δ) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_a^\infty n(1+n^2x^2)^{-1}\,dx.$
(Η απάντηση εξαρτάται από το αν $a<0$ ή $a=0$ ή $a>0$.)

Λύση: Αν $a>0$ τότε $x>0$ και η ακολουθία συναρτήσεων συγκλίνει στο μηδέν. Έτσι το ζητούμενο όριο θα είναι μηδέν αν εφαρμόζεται το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης. Παρατηρούμε ότι

$$\left|\frac{n}{1+n^2x^2}\right| = \frac{n}{1+n^2x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2}$$

αν και μόνο αν $(n^2-n)x^2-n+1 \geqslant 0$. Το τελευταίο θα ισχύει αν $(n^2-n)a^2-n+1 \geqslant 0$, αφού $x \geqslant a$, και αυτό με τη σειρά του ισχύει αν $n \geqslant n_0 = n_0(a)$. Συνεπώς εφαρμόζεται το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης για την δοθείσα ακολουθία συναρτήσεων, για $n \geqslant n_0$, και το ζητούμενο όριο είναι μηδέν.
Αν $a=0$, τότε γράφουμε $\int_0^\infty$ ως άθροισμα δύο ολοκληρωμάτων από το μηδέν μέχρι το ένα και από το ένα μέχρι το άπειρο. Το δεύτερο ολοκλήρωμα συγκλίνει στο μηδέν λόγω της προηγούμενης περίπτωσης ($a=1>0$). Συνεπώς το όριο που ζητάμε ισούται με το

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n}{1+n^2x^2}\,dx = \lim_{n\to\infty} \arctan(nx)\,\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Τέλος, αν $a<0$ τότε, λόγω του ότι οι συναρτήσεις είναι άρτιες, το όριο είναι δύο φορές το όριο $\lim_{n\to\infty}\int_0^{-a}\frac{n}{1+n^2x^2}\,dx$, δηλαδή ίσο με π.