Θεώρημα Αν η ακολουθία f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στον μ.χ. (X, d) (1)
και κάθε f_n είναι ________ στο x_0 τότε και η f (2)
είναι ________ στο x_0 (3)

Απόδειξη Προσεγγίζουμε πρώτα την f ομοιόμορφα από τις f_n: (4)

Έστω $\varepsilon > 0$ $\exists$ ____ $\forall$ __ $\geq$ ____ ισχύει $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall x \in X$ (5)

Άρα και για $n = n_0$ ισχύει $|$ ___ $- f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall x \in X$ (6)

Η f_{n_0} είναι ________ στο x_0 άρα (7)

$\exists$ __ > 0 : $\forall y \in X$ με $d(x_0, y) < \delta$ ισχύει $|$ ________ $| < \frac{\varepsilon}{3}$ (8)

Βάζουμε τις γραμμές (6) κ (8) μαζί, με τη βοήθεια της (9) (10)
Τριγωνικής ανισότητας:

$\forall y \in X$ με $d(x_0, y) < \delta$ έχουμε (11)

$$|f(x_0) - f(y)| \leq |\_\_\_\_\_\_\_\_| + |\_\_\_\_\_\_\_\_| + |\_\_\_\_\_\_\_\_| \quad (12)$$

$$< \underbrace{\frac{\varepsilon}{3}}_{\text{από (6)}} + \underbrace{\varepsilon/3}_{\text{από (8)}} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{3}}_{\text{από (6)}} = \varepsilon \quad (13)$$

∎

Το θεώρημα αυτό αποτελεί κριτήριο μη-ομοιόμορφης (14)
σύγκλισης: αν (15)

$$\left.\begin{array}{l} f_n \to f \\ f_n \text{ συνεχής} \\ f \text{ ασυνεχής} \end{array}\right\} \Longrightarrow \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \quad (16)$$

Π.χ. $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (1)

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) = \begin{cases} \text{------} & |x|<1 \quad (2) \\ \text{------} & x\in\{-1,\ 1\} \quad (3) \\ \text{------} & |x|>1 \quad (4) \end{cases}$$

(5)

Συνεχής $\not\rightrightarrows$ ------------

Θεώρημα Αν $f_n : [a\ b] \longrightarrow \mathbb{R}$ R-ολοκληρώσιμες (6)

& $f_n \rightrightarrows f$ τότε η f είναι R-ολοκληρώσιμη (7)

και $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$ (8)

Απόδειξη f_n ολοκληρώσιμη $\Rightarrow$ f_n φραγμένη συνάρτηση, $\forall n\in\mathbb{N}$. (9)

Βήμα πρώτο Και η f είναι ______ διότι αφού f_n f (10)

$\exists\ n_0\in\mathbb{N}:\ \forall$ ____ $|f_n(x)$ ____ $| < 1 \quad \forall x\in[a\ b]$ (11)

$\Rightarrow\ |f(x)| - |f_{n_0}(x)| \le \big||f(x)| - \text{\_\_\_}\big| \le |f(x)-f_n(x)| < 1 \quad \forall x$ (12)

(Τριγωνική: $\big||a|-|b|\big| \le |a\pm b| \le |a|+|b|$) (13)

Άρα $|f(x)| < 1 +$ ____ δηλ. f ______ αφού (14)

f_{n_0} φραγμένη (15)

Βήμα 2ο Πλησιάζουμε την f σε απόσταση $\varepsilon/3$ ομοιόμορφα: $\forall \varepsilon>0$ (16)

$\exists\ n_0\in\mathbb{N}:\ \forall$ ______ $|f_n$ ______ $| < \varepsilon/3(b-a)\ \forall x\in[a\ b]$ (17)

άρα και για $n =$ ____ δηλ $|f_{n_0}(x) - f(x)| <$ ____ $\forall$ ____ (1)

Χρησιμοποιούμε την ολοκληρωσιμότητα της f_{n_0}. Άρα $\exists$ P (2)

του $[a\,b]$ ώστε $U(f_{n_0}\, P) - L(f_{n_0}\, P) < \varepsilon/3$ (3)

Θα δείξουμε ότι $U(f\, P) - L(f\, P) < \varepsilon$ οπότε η f (4)

θα είναι R-ολοκληρώσιμη. (5)

$$U(f\,P) - L(f\,P) \leq U(f\,P) - U(f_{n_0}\,P) + U(f_{n_0}\,P) - L(f_{n_0}\,P) + L(f_{n_0}\,P) - L(f\,P) \quad (6)$$

$$\leq U(f\,P) - U(f_{n_0}\,P) + \underbrace{\frac{\varepsilon}{3}}_{\text{από σχέση (3)}} + L(f_{n_0}\,P) - L(f\,P) \quad (7)$$

αν $P = \{a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b\}$ Τότε (8)

$$U(f\,P) - U(f_{n_0}\,P) = \sum_{i=1}^{k} \left(\sup_{x \in [a_i\, a_{i+1}]} f(x) - \sup_{x \in [a_i\, a_{i+1}]} f_{n_0}(x) \right)(a_{i+1} - a_i) \quad (9)$$

Από την (1) $\quad -\dfrac{\varepsilon}{3(b-a)} < f_{n_0}(x) - f(x) < \dfrac{\varepsilon}{3(b-a)} \quad \forall x \in [a\,b]$ (10)

$$\Rightarrow \quad f(x) - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} < \text{\_\_\_\_} < \text{\_\_\_\_} + \text{\_\_\_\_} \quad \forall x \in [a\,b] \quad (11)$$

$$\sup_{x \in [a_i\, a_{i+1}]} \quad \leq \sup_{\text{\_\_\_\_}} \text{\_\_\_\_} < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} + \sup_{x \in [a_i\, a_{i+1}]} f(x) \quad (12)$$

$$\Rightarrow \quad \left| \sup_{\text{\_\_\_}} \text{\_\_\_\_} - \sup_{\text{\_\_\_\_}} \text{\_\_\_\_} \right| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \quad (13)$$

$$\text{Η } (9) \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{\varepsilon}{3(b-a)} (a_{i+1} - a_i) = \frac{\varepsilon}{3} \quad (14)$$

Ομοίως $L(f_{n_0}, P) - L(f(P)) \leq \varepsilon/3$

Άρα $U(f\,P) - L(f\,P) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \Rightarrow f$ ολοκλ.

Τέλος αφού $f_n \rightrightarrows f$ $\exists$ $\forall$

$|f_n(x) - \quad| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ $\forall x \in [a, b]$ Άρα

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leq \int_a^b | \qquad | dx \leq \int_a^b \text{----} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$\blacksquare$