<u>Θεώρημα</u> Αν η ακολουθία f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στον μ.χ. (X,d) (1)
και κάθε f_n είναι <u>συνεχής</u> στο x_0 τότε και η f (2)
είναι <u>συνεχής</u> στο x_0 (3)

<u>Απόδειξη</u> Προσεγγίζουμε πρώτα την f ομοιόμορφα από τις f_n: (4)
Έστω $\varepsilon > 0$ $\exists$ $\underline{n_0 = n_0(\varepsilon)}$ $\forall$ $\underline{n \geq n_0}$ ισχύει $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall x \in X$ (5)

Άρα και για $n = n_0$ ισχύει $|f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall x \in X$ (6)

Η f_{n_0} είναι <u>συνεχής</u> στο x_0 άρα (7)

$\exists\ \delta > 0$: $\forall y \in X$ με $d(x_0, y) < \delta$ ισχύει $\underline{|f_{n_0}(y) - f_{n_0}(x_0)|} < \frac{\varepsilon}{3}$ (8)

Βάζουμε τις γραμμές (6) & (8) μαζί, με τη βοήθεια της (9)
τριγωνικής ανισότητας: (10)

$\forall y \in X$ με $d(x_0, y) < \delta$ έχουμε (11)

$$|f(x_0) - f(y)| \leq |f(x_0) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f(y)| \quad (12)$$

$$< \underbrace{\frac{\varepsilon}{3}}_{\text{από (6)}} + \underbrace{\varepsilon/3}_{\text{από (8)}} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{3}}_{\text{από (6)}} = \varepsilon \quad (13)$$

∎

Το θεώρημα αυτό αποτελεί κριτήριο μη-ομοιόμορφης (14)
σύγκλισης: αν $f_n \to f$ (15)

$$\left.\begin{array}{l} f_n \to f \\ f_n \text{ συνεχής} \\ f \text{ ασυνεχής} \end{array}\right\} \Longrightarrow \underline{f_n \not\rightrightarrows f} \quad (16)$$

Πχ. $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) = \begin{cases} 0 & |x|<1 \\ 1/2 & x\in\{-1, 1\} \\ 1 & |x|>1 \end{cases}$$

Συνεπώς $f_n \not\rightrightarrows f$

Θεώρημα Αν f_n [redacted] $: [a\ b] \longrightarrow \mathbb{R}$ R-ολοκληρώσιμες
& $f_n \rightrightarrows f$ τότε η f είναι R-ολοκληρώσιμη
και $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$

Απόδειξη f_n ολοκληρώσιμη $\Rightarrow$ f_n φραγμένη συνάρτηση, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Βήμα πρώτο Και η f είναι φραγμένη διότι αφού $f_n \rightrightarrows f$

$\exists\ n_0\in\mathbb{N}: \ \forall\ n\geq n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| < 1 \quad \forall x\in[a\ b]$

$\Rightarrow \quad |f(x)| - |f_{n_0}(x)| \leq \big||f(x)| - |f_{n_0}(x)|\big| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| < 1 \quad \forall x$

(Τριγωνική: $\big||\alpha| - |\beta|\big| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$)

Άρα $|f(x)| < 1 + |f_{n_0}(x)|$ δηλ f φραγμένη αφού
f_{n_0} φραγμένη

Βήμα 2ο Πλησιάζουμε την f σε απόσταση $\varepsilon/3(b-a)$ ομοιόμορφα: $\forall \varepsilon>0$

$\exists\ n_0\in\mathbb{N}: \quad \forall\ n\geq n_0$ ισχύει $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3(b-a) \quad \forall x\in[a\ b]$

άρα και για $n = n_0$ δηλ $\left| f_{n_0}(x) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \ \forall x \in [a b]$ (1)

Χρησιμοποιούμε την ολοκληρωσιμότητα της f_{n_0}. Άρα $\exists$ διαμέριση P (2)

του $[a b]$ ώστε $U(f_{n_0}, P) - L(f_{n_0}, P) < \varepsilon/3$ (3)

Θα δείξουμε $U(f\ P) - L(f\ P) < \varepsilon$ οπότε η f (4)

θα είναι R-ολοκληρώσιμη. (5)

$$U(f\ P) - L(f\ P) \leq U(f\ P) - U(f_{n_0}\ P) + U(f_{n_0}\ P) - L(f_{n_0}\ P) + L(f_{n_0}\ P) - L(f\ P) \quad (6)$$

$$\leq U(f P) - U(f_{n_0} P) + \underbrace{\frac{\varepsilon}{3}}_{\text{από γραμμή (3)}} + L(f_{n_0} P) - L(f P) \quad (7)$$

αν $P = \{a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b\}$. Τότε (8)

$$U(f\ P) - U(f_{n_0}\ P) = \sum_{i=1}^{k} \left(\sup_{x \in [a_i\ a_{i+1}]} f(x) - \sup_{x \in [a_i\ a_{i+1}]} f_{n_0}(x) \right) (a_{i+1} - a_i) \quad (9)$$

Από την (1) $\quad -\frac{\varepsilon}{3(b-a)} < f_{n_0}(x) - f(x) < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \quad \forall x \in [a b]$ (10)

$$\Rightarrow f(x) - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} < f_{n_0}(x) < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} + f(x) \quad \forall x \in [a b] \quad (11)$$

$$\sup_{x \in [a_i\ a_{i+1}]} f(x) - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \leq \sup_{x \in [a_i\ a_{i+1}]} f_{n_0}(x) \leq \frac{\varepsilon}{3(b-a)} + \sup_{x \in [a_i\ a_{i+1}]} f(x) \quad (12)$$

$$\Rightarrow \left| \sup_{x \in [a_i\ a_{i+1}]} f_{n_0}(x) - \sup_{x \in [a_i\ a_{i+1}]} f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \quad (13)$$

$$\text{Η (9)} \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{\varepsilon}{3(b-a)} (a_{i+1} - a_i) = \frac{\varepsilon}{3} \quad (14)$$

$$= \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \sum_{i=1}^{k} (a_{i+1} - a_i) = \frac{\varepsilon}{3\cancel{(b-a)}} \cancel{(b-a)}$$

Ομοίως $L(f_{n_0}, P) - L(f, P) \leq \varepsilon/3$ (άσκηση)

Άρα $U(f, P) - L(f, P) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \Rightarrow f$ ολοκλ.

Τέλος αφού $f_n \rightrightarrows f$ $\underline{\exists\, n_0 \in \mathbb{N}}$ $\underline{\forall\, n \geq n_0}$ $\forall x \in [a, b]$ Άρα

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

$$\underbrace{\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right|}_{= \left| \int_a^b (f_n - f) \right| \leq} \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \blacksquare$$

$$\int_a^b f_n \longrightarrow \int_a^b f$$