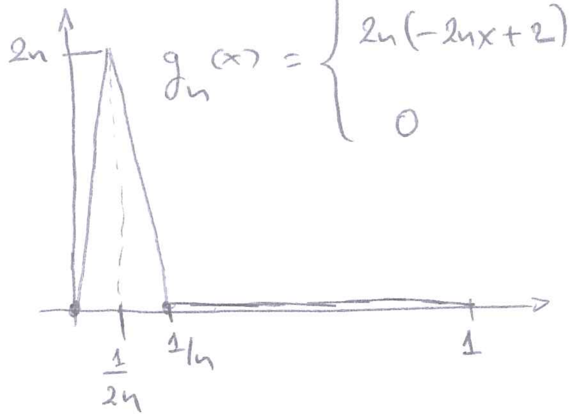
Μαθημα 3ο

Στην απλή σύγκλιση, δεν είναι απαραίτητο να ισχύει $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$ (1)

όταν $f_n \to f$: (2)

Παράδειγμα:



$$g_n(x) = \begin{cases} 4n^2 x & 0 \le x \le \frac{1}{2n} \quad (3) \\ 2n(-2nx+2) & \frac{1}{2n} \le x \le \frac{1}{n} \quad (4) \\ 0 & \frac{1}{n} \le x \le 1 \quad (5) \end{cases} \xrightarrow[n\to\infty]{} g(x) = 0 \quad (6)$$

Αλλα $\int_0^1 g_n(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\cdot 2n = 1 \not\to 0 = \int_0^1 g$ (7)

Ομοιόμορφη σύγκλιση & παραγώγιση (8)

Θεώρημα Αν $f_n : [ab] \to \mathbb{R}$ και (9)

(i) f_n διαφορίσιμη $\forall n$ (10)

(ii) f_n' συνεχής $\forall n$ (11)

(iii) $\exists\, x_0 \in [a b]$ ώστε η $(f_n(x_0))_{n=1}^{\infty}$ να συγκλίνει (12)

(iv) f_n' συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση g στο $[ab]$ (13)

Τότε η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια διαφορίσιμη (14)

συνάρτηση f στο $[ab]$ και ισχύει ____ = ____ (15)

Δηλαδή $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)' =$ ____ (16)

(χωρίς απόδειξη)

Το Θεώρημα Dini

Θεώρημα (Dini) Θεωρούμε ένα συμπαγή μετρικό χώρο X

μια ______ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $f_n : X \to \mathbb{R}$ η μία

συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι

(i) f_n συνεχής $\forall n$

(ii) $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ $\forall x \in X$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $f_n \to f$

(iv) f συνεχής

Τότε $f_n \rightrightarrows f$

Απόδειξη $\forall n \in \mathbb{N}$ αφού $f_n(x) \le$ ___ και $f_n \to$ ___

$\Rightarrow$ $f_n(x) \le$ ___ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in X$

Θέτουμε $g_n = f - f_n$ η οποία είναι ______ και $\ge$ ___

η $g_n \to$ ___ η $g_n \ge g_{n+1}$. Αρκεί να δείξουμε ότι

$g_n \rightrightarrows$ ___ . Έστω ότι $\varepsilon > 0$

Θέτουμε $K_n = \{x \in X : g_n(x) \ge \varepsilon\}$ $\Rightarrow$ K_n ___ $\subseteq X$

επειδή g_n ____ άρα K_n ____

Επίσης $g_n \ge g_{n+1}$ $\Rightarrow$ K_{n+1} ___ K_n διότι αν

$x \in K_{n+1}$ $\Rightarrow$ ____ $\Rightarrow$ $g_n(x) \ge$ ____ $\ge$ ___ $\Rightarrow$ $x \in K_n$

Ισχυρισμός 1 $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$ (1)

[$\forall x \in X$ $g_n(x) \longrightarrow$ ____ άρα $\exists n_0 : \forall n \ge n_0$ $g_n(x) <$ ____ (2)

οπότε $x \notin$ ____ $\forall n \ge n_0 \Rightarrow x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$] (3)

Ισχυρισμός 2 $\exists n_0$ ώστε $K_{n_0} = \emptyset$ (4)

[αν όχι, $\Rightarrow K_n \neq \emptyset$ $\forall n$ και οποιαδήποτε πεπερασμένη (5)

τομή τους είναι $\neq \emptyset$ γιατί φθίνουν. (6)

(αν $n_1 < n_2 < \dots < n_k \Rightarrow K_{n_1} \cap K_{n_2} \cap \dots \cap K_{n_k} =$ ____ $\neq \emptyset$) (7)

Από το Θ. 2.8.8 $\bigcap K_n \neq \emptyset$ άτοπο] (8)

Αφού $K_{n_0} = \emptyset$ κανένα $x \in X$ δεν ικανοποιεί την

$g_{n_0}(x) \ge \varepsilon$. Άρα $\forall$ ____ $g_{n_0}(x) < \varepsilon$

Οπότε $\forall n \ge n_0$ $0 \le g_n(x) \le$ ____ $< \varepsilon$ δηλαδή

g_n $\blacksquare$

Παρατήρηση Τ' ίδιο ισχύει αν υποθέσουμε ότι $f_n \downarrow$ (αντί για $\uparrow$)

Τότε θα θέσουμε $g_n = f_n - f \ge 0$

Άσκηση 4.7.3

$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ (1)

(i) Δείξτε ότι συγκλίνει στο $[0\ \infty)$ (2)

(ii) Εξετάστε αν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0\infty)$ (3)

(iii) Εξετάστε αν συγκλίνει ομοιόμορφα στο (4)

$[\delta\ \infty)$ για $\delta>0$. (5)

Λύση (i) Αν $x=0$ $f_n(0) = 0 \longrightarrow 0$ (6)

Αν $x \neq 0$ $\frac{nx}{1+n^2x^2} \longrightarrow$ ---- (7)

Άρα $f_n \longrightarrow$ --- $\forall x \in [0\ \infty)$ (8)

(ii) Υπολογίζουμε το $\alpha_n = \sup_{x\geq 0} \left| \quad \right| = \sup_{x \geq 0}$ ...... (9)

$$\left(\frac{nx}{1+n^2x^2}\right)' = \frac{\quad}{(1+n^2x^2)^2} =$$ (10)

$$= \frac{\quad}{(\quad)^2} = 0 \iff \text{------} = 0 \iff$$ (11)

$$\Rightarrow x = \text{----}$$ (12)

Άρα $\alpha_n = f_n(\frac{1}{n}) = \frac{\quad}{\quad} = \quad 0$ (13)

Οπότε $f_n \quad 0$ στο $[0\ \infty)$ (14)

(iii) Αν $\delta>0$ $\exists\, n_0 : \forall n \geq n_0$ $\frac{1}{n} < \delta$ άρα στο $[\delta\ \infty)$ (15)

f' --- $0 \Rightarrow f$ ---- άρα $\alpha_n = f(\delta)$ (16)

$= \frac{\quad}{\quad} \quad 0$ Άρα f_n στο $[\delta\infty)$ (17)

☒