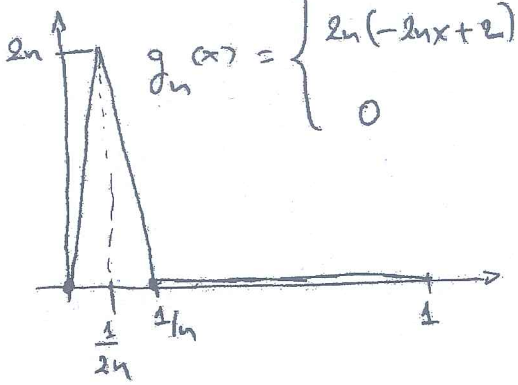
Μαθημα 3ο

Στην απλή σύγκλιση, δεν είναι απαραίτητο να ισχύει $\int_a^b f_n \longrightarrow \int_a^b f$ (1) (2)

όταν $f_n \longrightarrow f$:

Παράδειγμα:

$$g_n(x) = \begin{cases} 4n^2x & 0 \le x \le \frac{1}{2n} \quad (3) \\ 2n(-2nx+2) & \frac{1}{2n} \le x \le \frac{1}{n} \quad (4) \\ 0 & \frac{1}{n} \le x \le 1 \quad (5) \end{cases} \xrightarrow[n\to\infty]{} g(x) = 0 \quad (6)$$



Αλλα $\int_0^1 g_n(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\cdot 2n = 1 \not\to 0 = \int_0^1 g$ (7)

Ομοιόμορφη σύγκλιση & παραγώγιση (8)

Θεώρημα Αν $f_n : [a\, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ και (9)

(10)

(i) f_n διαφορίσιμη $\forall n$ (11)

(ii) f_n' συνεχής $\forall n$

(iii) $\exists\ x_0 \in [a\, b]$ ώστε η $(f_n(x_0))_{n=1}^{\infty}$ να συγκλίνει (12)

(iv) f_n' - συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση g στο $[a b]$ (13)

Τότε $\exists$ η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια διαφορίσιμη (14)

συνάρτηση f στο $[ab]$ και ισχύει $f' = \lim\limits_{n\to\infty}(f_n')$ (15)

Δηλαδή $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim\limits_{n\to\infty}(f_n')$ (16)

(χωρίς απόδειξη)

Το Θεώρημα Dini

Θεώρημα (Dini) Θεωρούμε ένα συμπαγή μετρικό χώρο X, μια ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : X \to \mathbb{R}$ και μία συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι

(i) f_n συνεχής $\forall n$

(ii) $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ $\forall x \in X$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $f_n \longrightarrow f$

(iv) f συνεχής

Τότε $f_n \rightrightarrows f$

Απόδειξη $\forall n \in \mathbb{N}$ αφού $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ και $f_n \longrightarrow f(x)$

$\Rightarrow$ $f_n(x) \le f(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in X$

Θέτουμε $g_n = f - f_n$ η οποία είναι συνεχής και ≥ 0

και $g_n \longrightarrow 0$ και $g_n \ge g_{n+1}$. Αρκεί να δείξουμε ότι

$g_n \rightrightarrows 0$. Έστω ότι $\varepsilon > 0$

Θέτουμε $K_n = \{x \in X : g_n(x) \ge \varepsilon\}$, επειδή g_n συνεχής $\Rightarrow$ K_n κλειστό $\subseteq X$, άρα K_n συμπαγές

Επίσης $g_n \ge g_{n+1} \Rightarrow K_{n+1} \subseteq K_n$ διότι αν

$x \in K_{n+1} \Rightarrow g_{n+1}(x) \ge \varepsilon \Rightarrow g_n(x) \ge g_{n+1}(x) \ge \varepsilon \Rightarrow x \in K_n$

<u>Ισχυρισμός 1</u> $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \phi$. (1)

[$\forall x \in X$ $g_n(x) \longrightarrow 0$ άρα $\exists n_0 : \forall n \geq n_0$ $g_n(x) < \varepsilon$ (2)

οπότε $x \notin K_n$ $\forall n \geq n_0 \Rightarrow x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$] (3)

<u>Ισχυρισμός 2</u> $\exists n_0$ ώστε $K_{n_0} = \phi$ (4)

[αν όχι, $\Rightarrow K_n \neq \phi$ $\forall n$ και οποιαδήποτε πεπερασμένη (5)

τομή τους είναι $\neq \phi$ μαζί φθίνουν. (6)

(αν $n_1 < n_2 < \dots < n_k \Longrightarrow K_{n_1} \cap K_{n_2} \cap \dots \cap K_{n_k} = K_{n_k} \neq \phi$) (7)

(8)

Από Θ. 2.8.8 $\bigcap K_n \neq \phi$ άτοπο]

Αφού $K_{n_0} = \phi$ <u>κανένα</u> $x \in X$ <u>δεν</u> ικανοποιεί την

$g_{n_0}(x) \geq \varepsilon$. Άρα $\forall x \in X$ $g_{n_0}(x) < \varepsilon$

Οπότε $\forall n \geq n_0$ $0 \leq g_n(x) \leq g_{n_0}(x) < \varepsilon$ δηλαδή

$g_n \rightrightarrows 0$ ∎

<u>Παρατήρηση</u> Τοίδιο ισχύει αν υποθέσουμε ότι $f_n \downarrow$ (αντί για $\uparrow$)

Τότε θα θέσουμε $g_n = f_n - f \geq 0$

Άσκηση 4.7.3

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

(i) Δείξτε ότι συγκλίνει στο $[0\ \infty)$

(ii) Εξετάστε αν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0\infty)$

(iii) Εξετάστε αν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[\delta\ \infty)$ για $\delta>0$.

Λύση (i) Αν $x=0$ $\quad f_n(0)=0 \longrightarrow 0$

Αν $x\neq 0$ $\quad \frac{nx}{1+n^2x^2} \longrightarrow 0$

Άρα $f_n \longrightarrow 0$ $\quad \forall x\in[0\ \infty)$

(ii) Υπολογίζουμε το $a_n = \sup_{x\geq 0}\left|f_n(x)-0\right| = \sup_{x\geq 0}\frac{nx}{1+n^2x^2}$

$$\left(\frac{nx}{1+n^2x^2}\right)' = \frac{n\cdot(1+n^2x^2) - nx\cdot 2n^2x}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{n+n^3x^2-2n^3x^2}{(1+n^2x^2)^2}$$

$$= \frac{n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2} = 0 \iff 1-n^2x^2 = 0 \iff$$

$$\iff x = \frac{1}{n}$$

Άρα $a_n = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n\ 1/n}{1+n^2\ 1/n^2} = \frac{1}{2} \not\longrightarrow 0$

Οπότε $f_n \not\rightrightarrows 0$ στο $[0\ \infty)$

(iii) Αν $\delta>0$ $\exists\, n_0 : \forall n\geq n_0$ $\frac{1}{n}<\delta$ άρα ισχ. στο $[\delta\ \infty)$

$f' \leq 0 \Rightarrow f \downarrow$ άρα $a_n = f(\delta)$

$$= \frac{n\delta}{1+n^2\delta^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Άρα $f_n \rightrightarrows 0$ στο $[\delta\infty)$ ■