Μαθημα 5ο

Ασκηση 4.7.18 $f_n(x) = x^n \quad x \in [0\ 1] \quad g: [0 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής με $g(1)=0$

δείξτε ότι η $g \cdot f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

Λύση Θυμηθείτε ότι $f_n(x) \longrightarrow \left.\begin{cases} 0 & x \in [0\ 1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}\right\} =: f(x)$ (1) (2)

(αλλά όχι ομοιόμορφα) (3)

$(g \cdot f_n)(x) = g(x)\, f_n(x) \longrightarrow \left.\begin{cases} g(x) \cdot 0 & x \in [0,1) \\ g(1) \cdot 1 & x = 1 \end{cases}\right\} = 0$ (4)

Έστω ότι $\varepsilon > 0$. Η g είναι συνεχής στο 1 άρα $\exists\ \delta > 0$ (5)

ώστε αν $x \in (1-\delta, 1] \Rightarrow |g(x) - g(1)| < \frac{\varepsilon}{3} \iff |g(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ (6)

Επίσης g φραγμένη (ως συνεχής ορισμένη σε συμπαγές σύνολο) (7)

άρα $\exists M > 0 : \quad |g(x)| \leq M \quad \forall x \in [0 1]$.

Στο διάστημα $[0, 1-\frac{\delta}{2}]$ η $f_n \rightrightarrows 0$ διότι (8)

$$\sup_{x \in [0, 1-\frac{\delta}{2}]} |f_n(x) - 0| = \sup_{x \in [0, 1-\frac{\delta}{2}]} x^n = (1-\delta/2)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad (9)$$

Άρα $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n \geq n_0 \quad |f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3M} \quad \forall\, x \in [0, 1-\frac{\delta}{2}]$ (10)

Συνεπώς $\sup_{x \in [0\ 1]} |(g f_n)(x) - 0| \leq \max\left\{ \sup_{x \in [0, 1-\delta/2]} |g f_n| , \sup_{x \in [1-\frac{\delta}{2}, 1]} |g f_n| \right\}$ (11)

$\leq \max\left\{ M \cdot \frac{\varepsilon}{3M}, \frac{\varepsilon}{3} \right\}$ (αφού $|f_n(x)| \leq 1$.) (12)

$\leq \max\left\{ \frac{\varepsilon}{3}, \frac{\varepsilon}{3} \right\} = \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$ (13)

Δηλαδή $|(g f_n)(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [0 1] \quad \forall\, n \geq n_0$. Άρα $g f_n \rightrightarrows 0$

∎

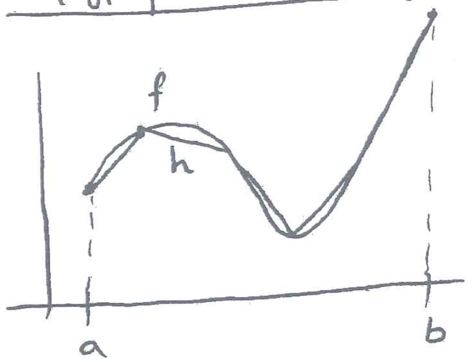
Το Θεώρημα Προσέγγισης του Weierstrass

Θεώρημα Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ και $\forall \varepsilon>0$ υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-p(x)|<\varepsilon$.

Ισοδύναμα υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων p_n ώστε $p_n \rightrightarrows f$.

Ισοδύναμα το σύνολο $\mathbb{P}[x]$ των πολυωνύμων είναι πυκνό στον $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$

Περιγραφή της απόδειξης



Όπως βλέπουμε με το σχήμα κάθε συνεχής συνάρτηση μπορεί να προσεγγιστεί από μια τεθλασμένη γραμμή. Οι τεθλασμένες γραμμές έχουν τύπο της μορφής

$$h(x)=Ax+B+\sum_{i=1}^{n-1} c_i|x-x_i| \quad \text{όπου}$$

x_i τα σημεία στα οποία η τεθλασμένη έχει κορυφή. Άρα, αφού η h μπορεί να είναι οσοδήποτε κοντά στην f πληθαίνοντας τα σημεία κορυφών της, αρκεί να δείξουμε ότι η h προσεγγίζεται από πολυώνυμα ομοιόμορφα. Επειδή το $Ax+B$ είναι ήδη πολυώνυμο και το άθροισμα πολυωνύμων είναι πολυώνυμο, αρκεί να προσεγγίσουμε ομοιόμορφα με πολυώνυμα τις $|x-x_i|$. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων q_n ώστε $q_n(x) \rightrightarrows |x|$ στο $[-1,1]$ διότι το $q_n(x-x_i)$ είναι πάλι πολυώνυμο και φανερά αν $q_n(x)\rightrightarrows|x|$ τότε $q_n(x-x_i)\rightrightarrows|x-x_i|$.

Για να το κάνουμε αυτό θέτουμε $p_0(x)=0$ και $p_{n+1}(x)=\dfrac{p_n(x)^2+(1-x^2)}{2}$ (*) για $x\in[-1,1]$

και παρατηρούμε τα εξής

Βήμα 1 $\quad 0 \le p_n(x) \le 1$

Αφού $x \in [-1,1]$ φανερά $p_n(x) \ge 0$. Επίσης $p_0(x) = 0 \le 1$ (1)

και αν $p_n(x) \le 1$ τότε $p_{n+1}(x) = \dfrac{p_n^2(x) + (1-x^2)}{2} \le \dfrac{1+1-x^2}{2}$ (2)

$$= \frac{2-x^2}{2} = 1 - \frac{x^2}{2} \le 1$$ (3).

Βήμα 2 $\quad p_n(x) \le p_{n+1}(x)$ (4)

Για $n=0$ $\quad p_1(x) = \dfrac{p_0^2(x)+1-x^2}{2} = \dfrac{1-x^2}{2} \ge 0 = p_0(x)$ αφού $x\in[-1,1]$ (5)

Αν $p_{n+1}(x) \ge p_n(x) \xRightarrow{(\text{γιατί;})} p_{n+1}^2(x) \ge p_n^2(x) \Rightarrow$ (6)

$$\Rightarrow \frac{p_{n+1}^2(x)+1-x^2}{2} \ge \frac{p_n^2(x)+1-x^2}{2} \Rightarrow p_{n+2}(x) \ge p_{n+1}(x)$$ (7)

Αφού $(p_n(x))_{n=1}^{\infty}$ αύξουσα για κάθε $x\in[-1,1]$, συγκλίνει έστω (8)

στο $p(x)$. Παίρνοντας όριο $n\to\infty$ στην ⊛ [σελ 2] (9)

παίρνουμε $\quad p(x) = \dfrac{p^2(x)+1-x^2}{2} \Rightarrow p^2(x) - 2p(x) + 1 - x^2 = 0$ (10)

$$\Rightarrow p(x) = \frac{2 \pm \sqrt{4-4(1-x^2)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4x^2}}{2} =$$ (11)

$$= \frac{2(1 \pm \sqrt{x^2})}{2} = 1 \pm |x|.$$ (12)

Η $1+|x|$ απορρίπτεται διότι $p_n(x) \le 1$

Άρα $p_n(x) \longrightarrow 1-|x|$. Από θ. Dini $p_n \rightrightarrows 1-|x|$ άρα (13)

η $q_n(x) = 1 - p_n(x) \rightrightarrows |x|$ κ' είναι πολυώνυμο ■ (14)

Άσκηση 5.2.1 Έστω ότι $f \in C[0\ 1]$ και έχει την ιδιότητα (1)

$$\int_0^1 x^n f(x)\,dx = 0 \quad \forall\, n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2)$$

Δείξτε ότι αναγκαστικά $f = 0$ (3)

Λύση Για κάθε πολυώνυμο $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ (4)

θα ισχύει

$$\int_0^1 p(x) f(x)\,dx = \int_0^1 (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n)\, f(x)\,dx \qquad (5)$$

(6)

$$= a_0 \int_0^1 f(x)\,dx + a_1 \int_0^1 x f(x)\,dx + \cdots + a_n \int_0^1 x^n f(x)\,dx = 0 \qquad (7)$$

Αλλά υπάρχει $p_n(x) \rightrightarrows f$ όπου p_n πολυώνυμα (8)

Άρα $$\int_0^1 f^2(x)\,dx = \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} p_n(x)\right) f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 p_n(x) f(x)\,dx = 0 \qquad (9)$$

Άρα f^2 συνεχής ≥ 0 & $\int_0^1 f^2 = 0$ (10)

Από απειροστικό λογισμό $\Rightarrow f = 0$. (11)