Μαθημα 7

Παλιό θεμα: Εξετάστε αν η $f_n(x)=\begin{cases} e^{-nx} & \text{για } x>0 \\ 0 & \text{για } x=0 \end{cases}$

συγκλίνει απλά κ ομοιόμορφα στο $[0,\infty)$.

Λύση: $f_n(0)=0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Για $x>0$

$$f_n(x)=e^{-nx}=\frac{1}{e^{nx}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$ Αρα $f_n \longrightarrow 0$.

$$\alpha_n=\sup_{x\in[0,\infty)}|f_n(x)-0| = \sup_{x\in(0,\infty)} e^{-nx} =$$

Παλιό θεμα: Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση την $f_n(x)=nx^n(1-x)$

για $x\in[0,1]$.

Λύση: $f_n(1)=0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Ομοίως για $x=0$. Για $x\in(0,1)$

$$\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \left|\frac{(n+1)\,x^{n+1}\,(1-x)}{n\,x^n\,(1-x)}\right| = \frac{n+1}{n}|x| \longrightarrow |x|<1$$

αρα $f_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Συνεπώς $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$$\alpha_n=\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-0| = \sup_{x\in(0,1)} f_n(x)$$

$$f_n'(x) = \qquad\qquad = 0 \iff \begin{cases} x=0 \\ \text{ή} \\ x=\frac{n}{n+1} \end{cases}$$

αρα $\alpha_n = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right) = n\,\frac{1}{\quad}\,\frac{1}{\quad}$

$\longrightarrow \frac{1}{\quad} \neq 0$ αρα $f_n \not\rightrightarrows 0$

Παλιό θέμα Δείξτε ότι η $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n!} x^n$

συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $[-M, M]$

$\forall M > 0$ και εξηγήστε γιατί η f είναι συνεχής σε κάθε

σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$.

Λύση $\left| \frac{\sin(nx)}{n!} x^n \right| \leq \frac{1}{n!} |x|^n \leq \frac{M^n}{n!} = M_n$

Επίσης $\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M^n}{n!} = \qquad < \infty$

Άρα από το M-test η σειρά ______

στο $[-M \ M]$.

Αν $x_0 \in \mathbb{R}$ $\exists M > 0$ ώστε $x_0 \in [-M, M]$

(π.χ. $M =$)

Στο $[-M, M]$ η σύγκλιση ______

και επειδή τα μερικά αθροίσματα $\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(nx)}{n!} x^n$

είναι ______ συναρτήσεις που συγκλίνουν ______

στην f $\Longrightarrow$ f ______ στο $[-M \ M]$

άρα και στο x_0

Εισαγωγή στην έννοια του μέτρου

<u>καθορισμός κοινού μέτρου</u> $\ell([a\,b)) = b-a \quad \forall\, [a,b) \subseteq \mathbb{R}.$ (1)

Αν $A = [a_1 b_1) \cup [a_2 b_2) \cup \cdots \cup [a_N b_N)$ με τα $[a_j, b_j)$ ξένα (2)

(3)

ανά δύο, τότε θέτουμε

$$\mu^*(A) = \mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{N} [a_j, b_j)\right) = \sum_{j=1}^{N} \ell([a_j\, b_j)) = \sum_{j=1}^{N} (b_j - a_j)$$ (4)

(5)

Ο ορισμός είναι καλός, δηλαδή

(6)

πχ $[0,5) = [0\ \sqrt{2}) \cup [\sqrt{2}\ 3) \cup [3,5)$

(7)

$\ell([0\,5)) =$

$\mu^*([0\,\sqrt{2}) \cup [\sqrt{2}\ 3) \cup [3\,5)) = (\qquad) + (\qquad) + (\qquad)$ (8)

$= 5$ (9)

(10)

Γενικά, αν $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ τότε

$\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{N} [\qquad)\right) = \sum \qquad = x_N - x_0 = b \qquad = \ell([a\,b))$ (11)

Ομοίως για άπειρη ένωση ξένων διαστημάτων. αν τα αθροίσματα (12)

(13)

που εμφανίζονται ~~θα~~ συγκλίνουν.

Τι μπορούμε να κάνουμε όμως αν τα διαστήματα αυτά δεν είναι μεταξύ τους ξένα ή ακόμα χειρότερα το σύνολο δεν γράφεται ως ένωση διαστημάτων (πχ το $\mathbb{Q} \cap [0\,1)$)

Ας δοκιμάσουμε μερικές συγκρίσεις για το $\mathbb{Q} \cap [0,1)$. (14)

Φανερά $\mathbb{Q} \cap [0,1) \subseteq [0,1)$ άρα θα θέλουμε (15)

$\mu^*(\mathbb{Q} \cap [0,1)) \leq \qquad = 1$ (16)

Μπορούμε να βελτιώσουμε την παραπάνω εκτίμηση;

Γνωρίζουμε ότι το $\mathbb{Q}\cap[0,1)$ είναι __________ σύνολο (1)

άρα $\exists\ x_1, x_2, \ldots$ ώστε $\mathbb{Q}\cap[0,1)=\{$ (2)

Έστω ότι $\varepsilon>0$. Τότε $\mathbb{Q}\cap[0,1) \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty}[x_j, x_j+\varepsilon)$ (3)

αλλά $\sum_{j=1}^{\infty}\mu^*([\qquad\qquad)=\sum_{j=1}^{\infty}\qquad=$ (4)

Αλλά $\mathbb{Q}\cap[0,1) \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty}[x_j, x_j+\qquad)$ και (5)

$\sum_{j=1}^{\infty}\ell([\qquad\qquad)=\sum\qquad=$ (6)

Σύμφωνα με αυτό το σκεπτικό θα πρέπει $\mu^*(\mathbb{Q}\cap[0,1)) \leq$ (7)

Δηλαδή θα πρέπει $\mu^*(\mathbb{Q}\cap[0,1))=$ (8)

Ορισμός Για κάθε σύνολο $A\subseteq\mathbb{R}$ θέτουμε (9)

$$\mu^*(A) = \_\_\ \Big\{\ \_\_\_\_\_\_\_\_\qquad A\subseteq\bigcup_{j=1}^{\infty}[a_j,b_j)\Big\} \quad (10)$$

Γράφουμε μ^* αντί για μ διότι ο παραπάνω ορισμός έχει (11)

το εξής πρόβλημα: $\exists\ A\subseteq\mathbb{R}\ \exists\ B\subseteq\mathbb{R}$ με $A\cap B=\emptyset$ (12)

αλλά $\mu^*(A\cup B) < \mu^*(A)+\mu^*(B)$ (13)

Ονομάζουμε το μ^* « » (14)