Μαθημα 7

Παλιό θέμα Εξετάστε αν η $f_n(x)=\begin{cases} e^{-nx} & \text{για } x>0 \\ 0 & \text{για } x=0 \end{cases}$

συγκλίνει απλά & ομοιόμορφα στο $[0,\infty)$.

Λύση $f_n(0)=0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Για $x>0$

$$f_n(x)=e^{-nx}=\frac{1}{e^{nx}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$ Άρα $f_n \longrightarrow 0$.

$$a_n=\sup_{x\in[0,\infty)}|f_n(x)-0|=\sup_{x\in(0,\infty)} e^{-nx}=$$

Παλιό θέμα Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση την $f_n(x)=nx^n(1-x)$

για $x\in[0,1]$.

Λύση $f_n(1)=0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Ομοίως για $x=0$, Για $x\in(0,1)$

$$\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right|=\left|\frac{(n+1)\,x^{n+1}\,(1-x)}{n\,x^n\,(1-x)}\right|=\frac{n+1}{n}|x| \longrightarrow |x|<1$$

άρα $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Συνεπώς $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$$a_n=\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-0|=\sup_{x\in(0,1)} f_n(x)$$

$$f_n'(x)= \qquad\qquad =0 \iff \begin{cases} x=0 \\ \text{ή} \\ x=\frac{n}{n+1} \end{cases}$$

άρα $a_n=f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)=n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right)=n\,\frac{1}{\quad}\,\frac{1}{\quad}$

$\longrightarrow \frac{1}{\quad} \neq 0$ άρα $f_n \not\to 0$

Παλιό θέμα Δείξτε ότι η $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n!} x^n$ (1)

συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $[-M, M]$ (2)

$\forall M>0$ και εξηγήστε γιατί η f είναι συνεχής σε κάθε (3)

σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$. (4)

Λύση $\left| \frac{\sin(nx)}{n!} x^n \right| \leq \frac{1}{n!} |x|^n \leq \frac{M^n}{n!} = M_n$ (5)

Επίσης $\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M^n}{n!} =$ $<\infty$ (6)

Άρα από το M-test η σειρά ________________ (7)

στο $[-M\ M]$ (8)

Αν $x_0 \in \mathbb{R}$ $\exists M>0$ ώστε $x_0 \in [-M, M]$ (9)

(π.χ. $M =$) (10)

Στο $[-M, M]$ η σύγκλιση ________________ (11)

και επειδή τα μερικά αθροίσματα $\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(nx)}{n!} x^n$ (12)

είναι ________ συναρτήσεις που συγκλίνουν ________ (13)

στην f $\Rightarrow$ f ________ στο $[-M\ M]$ (14)

(15)

άρα και στο x_0

Εισαγωγή στην έννοια του μέτρου

Καθορισμός κοινού μέτρου $\ell([a\ b)) = b-a \quad \forall [a,b) \subseteq \mathbb{R}.$ (1)

Αν $A = [a_1\ b_1) \cup [a_2\ b_2) \cup \dots \cup [a_N\ b_N)$ με τα $[a_j, b_j)$ ξένα (2)

(3)

ανά δύο, τότε θέτουμε

$$\mu^*(A) = \mu^*\Big(\bigcup_{j=1}^{N} [a_j, b_j)\Big) = \sum_{j=1}^{N} \ell([a_j\ b_j)) = \sum_{j=1}^{N} (b_j - a_j)$$ (4)

(5)

Ο ορισμός είναι καλός, δηλαδή

(6)

πχ $[0, 5) = [0\ \sqrt{2}) \cup [\sqrt{2}\ 3) \cup [3, 5)$

(7)

$\ell([0\ 5)) =$

$\mu^*([0\ \sqrt{2}) \cup [\sqrt{2}\ 3) \cup [3\ 5)) = (\qquad) + (\qquad) + (\qquad)$ (8)

(9)

$= 5$

(10)

Γενικά, αν $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ τότε

$$\mu^*\Big(\bigcup_{j=1}^{N} [\qquad)\Big) = \sum \qquad = x_N - x_0 = b \qquad = \ell([a\ b))$$ (11)

Ομοίως για άπειρη ένωση ξένων διαστημάτων, αν τα αθροίσματα (12)

(13)

που εμφανίζονται συγκλίνουν.

Τι μπορούμε να κάνουμε όμως αν τα διαστήματα αυτά δεν είναι μεταξύ τους ξένα ή ακόμα χειρότερα το σύνολο δεν γράφεται ως ένωση διαστημάτων (πχ το $\mathbb{Q} \cap [0\ 1)$)

Ας δοκιμάσουμε μερικές συγκρίσεις για το $\mathbb{Q} \cap [0\ 1)$. (14)

Φανερά $\mathbb{Q} \cap [0, 1) \subseteq [0, 1)$ άρα θα θέλουμε (15)

$\mu^*(\mathbb{Q} \cap [0, 1)) \leq \qquad = 1$ (16)

Μπορούμε να βελτιώσουμε την παραπάνω εκτίμηση;

Γνωρίζουμε ότι το $\mathbb{Q}\cap[0,1)$ είναι ________ σύνολο (1)

άρα $\exists\ x_1, x_2, \ldots$ ώστε $\mathbb{Q}\cap[0,1)=\{$ (2)

Έστω ότι $\varepsilon>0$. Τότε $\mathbb{Q}\cap[0,1)\subseteq\bigcup_{j=1}^{\infty}[x_j, x_j+\varepsilon)$ (3)

αλλά $\sum_{j=1}^{\infty}\mu^*([\qquad\qquad) = \sum_{j=1}^{\infty}\qquad =$ (4)

Αλλά $\mathbb{Q}\cap[0,1)\subseteq\bigcup_{j=1}^{\infty}[x_j, x_j+\qquad)$ ή (5)

$\sum_{j=1}^{\infty}\ell([\qquad\qquad) = \sum\qquad =$ (6)

Σύμφωνα με αυτό το σκεπτικό θα πρέπει $\mu^*(\mathbb{Q}\cap[0,1))\leq$ (7)

Δηλαδή θα πρέπει $\mu^*(\mathbb{Q}\cap[0,1)) =$ (8)

<u>Ορισμός</u> Για κάθε σύνολο $A\subseteq\mathbb{R}$ θέτουμε (9)

$$\mu^*(A) = \_\_\ \Big\{\qquad\qquad\qquad A\subseteq\bigcup_{j=1}^{\infty}[a_j,b_j)\Big\}$$ (10)

Γράφουμε μ^* αντί για μ διότι ο παραπάνω ορισμός έχει (11)

το εξής πρόβλημα: $\exists\ A\subseteq\mathbb{R}\ \exists\ B\subseteq\mathbb{R}$ με $A\cap B=\emptyset$ (12)

αλλά $\mu^*(A\cup B)<\mu^*(A)+\mu^*(B)$ (13)

Ονομάζουμε το μ^* «\qquad\qquad» (14)