(35)

Σελ 1

Μαθημα 7

Παλιό θεμα Εξετάστε αν η $f_n(x)=\begin{cases} e^{-nx} & \text{για } x>0 \\ 0 & \text{για } x=0 \end{cases}$ (1) (2)

συγκλίνει απλά ή ομοιόμορφα στο $[0,\infty)$. (3)

Λύση $f_n(0)=0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Για $x>0$ (4)

$f_n(x)=e^{-nx}=\frac{1}{e^{nx}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Αρα $f_n \longrightarrow 0$. (5)

$\alpha_n=\sup_{x\in[0,\infty)}|f_n(x)-0|=\sup_{x\in(0,\infty)} e^{-nx}=1 \not\to 0$ (6)

αρα $f_n \not\rightrightarrows 0$ (7)

Παλιό θεμα Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση την $f_n(x)=nx^n(1-x)$ (8)
για $x\in[0,1]$. (9)

Λύση $f_n(1)=0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Ομοίως για $x=0$, Για $x\in(0,1)$ (10)

$$\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \left|\frac{(n+1)x^{n+1}(1-x)}{nx^n(1-x)}\right| = \frac{n+1}{n}|x| \longrightarrow |x|<1$$ (11)

αρα $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Συνεπως $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. (12)

$\alpha_n=\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-0|=\sup_{x\in(0,1)} f_n(x)$ (13)

$f_n'(x)=n\left(nx^{n-1}(1-x)+x^n(-1)\right)=nx^{n-1}(n-nx-x)=0 \iff \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{n}{n+1} \end{cases}$ (14)

αρα $\alpha_n=f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)=n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right)=n\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\frac{1}{n+1}$ (15)

$\longrightarrow \frac{1}{e}\neq 0$ αρα $f_n \not\rightrightarrows 0$ (16)

Παλιό θέμα: Δείξτε ότι η $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n!}x^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $[-M, M]$ $\forall M>0$ και εξηγήστε γιατί η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$.

Λύση

$$\left|\frac{\sin(nx)}{n!}x^n\right| \le \frac{1}{n!}|x|^n \le \frac{M^n}{n!} = M_n$$

Επίσης

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M^n}{n!} = e^M - 1 < \infty$$

Άρα από το M-test η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-M\ M]$.

Αν $x_0 \in \mathbb{R}$ $\exists M>0$ ώστε $x_0 \in [-M, M]$

(π.χ. $M = |x_0| + 1$)

Στο $[-M, M]$ η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη και επειδή τα μερικά αθροίσματα $\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(nx)}{n!}x^n$ είναι συνεχείς συναρτήσεις που συγκλίνουν ομοιόμορφα στην $f \Longrightarrow f$ συνεχής στο $[-M\ M]$

άρα και στο x_0

Εισαγωγή στην έννοια του μέτρου

<u>καθορισμός κοινού μέτρου</u> $\ell([a,b)) = b-a \quad \forall [a,b)\subseteq\mathbb{R}$.

Αν $A=[a_1,b_1)\cup[a_2,b_2)\cup\dots\cup[a_N,b_N)$ με τα $[a_j,b_j)$ ξένα ανά δύο, τότε θέτουμε

$$\mu^*(A)=\mu^*\Big(\bigcup_{j=1}^N [a_j,b_j)\Big) = \sum_{j=1}^N \ell([a_j,b_j)) = \sum_{j=1}^N (b_j-a_j)$$

Ο ορισμός είναι καλός, δηλαδή

πχ $\quad [0,5)=[0,\sqrt2)\cup[\sqrt2,3)\cup[3,5)$

$$\ell([0,5))=5-0=5$$

$$\mu^*([0,\sqrt2)\cup[\sqrt2,3)\cup[3,5)) = (\sqrt2-0)+(3-\sqrt2)+(5-3) = 5$$

Γενικά, αν $a=x_0<x_1<\dots<x_N=b$ τότε

$$\mu^*\Big(\bigcup_{j=1}^N [x_{j-1},x_j)\Big) = \sum_{j=1}^N (x_j-x_{j-1}) = x_N-x_0 = b-a = \ell([a,b))$$

Ομοίως για άπειρη ένωση ξένων διαστημάτων, αν τα αθροίσματα που εμφανίζονται συγκλίνουν.

Τι μπορούμε να κάνουμε όμως αν τα διαστήματα αυτά δεν είναι μεταξύ τους ξένα ή ακόμα χειρότερα το σύνολο δεν γράφεται ως ένωση διαστημάτων (πχ το $\mathbb{Q}\cap[0,1)$)

Ας δοκιμάσουμε μερικές συγκρίσεις για το $\mathbb{Q}\cap[0,1)$.

Φανερά $\mathbb{Q}\cap[0,1)\subseteq[0,1)$ άρα θα θέλουμε

$$\mu^*(\mathbb{Q}\cap[0,1)) \le \mu^*([0,1)) = 1$$

Μπορούμε να βελτιώσουμε την παραπάνω εκτίμηση;

Γνωρίζουμε ότι το $\mathbb{Q}\cap[0,1)$ είναι αριθμήσιμο σύνολο (1)

άρα $\exists\ x_1, x_2, \ldots$ ώστε $\mathbb{Q}\cap[0,1)=\{x_1,x_2,x_3,\ldots\}$ (2)

Έστω ότι $\varepsilon>0$. Τότε $\mathbb{Q}\cap[0,1)\subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty}[x_j, x_j+\varepsilon)$ (3)

αλλά $\sum_{j=1}^{\infty}\mu^*([x_j, x_j+\varepsilon)) = \sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon = \infty$ (4)

Αλλά $\mathbb{Q}\cap[0,1)\subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty}[x_j, x_j+\frac{\varepsilon}{2^j})$ και (5)

$$\sum_{j=1}^{\infty}\ell\left(\left[x_j, x_j+\frac{\varepsilon}{2^j}\right)\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon \quad (6)$$

Σύμφωνα με αυτό το σκεπτικό θα πρέπει $\mu^*(\mathbb{Q}\cap[0,1))\leq\varepsilon$ (7)

Δηλαδή θα πρέπει $\mu^*(\mathbb{Q}\cap[0,1))=0$ (8)

<u>Ορισμός</u> Για κάθε σύνολο $A\subseteq\mathbb{R}$ θέτουμε (9)

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\ell([a_j,b_j)) \quad A\subseteq\bigcup_{j=1}^{\infty}[a_j,b_j)\right\} \quad (10)$$

Γράφουμε μ^* αντί για μ διότι ο παραπάνω ορισμός έχει (11)

το εξής πρόβλημα: $\exists\ A\subseteq\mathbb{R}\ \exists\ B\subseteq\mathbb{R}$ με $A\cap B=\emptyset$ (12)

αλλά $\mu^*(A\cup B) < \mu^*(A)+\mu^*(B)$ (13)

Ονομάζουμε το μ^* « εξωτερικό μέτρο » (14)