Μάθημα 9

Πόρισμα Αν A αριθμήσιμο τότε $\mu^*(A) = 0$ (1)

Απόδειξη Αν $A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{x_j\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} [x_j, x_j]$ (2)

Από την υποπροσθετικότητα

$$\mu^*(A) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*([x_j\ x_j]) = \sum_{j=1}^{\infty} (x_j - x_j) = 0. \qquad (3)$$

Πόρισμα Το διάστημα $[0, 1]$ **δεν** είναι αριθμήσιμο (4)

(5) αφού $\mu^*([0\ 1]) =$

Άσκηση 6.2.2 Δείξτε ότι $\forall\ E \subseteq \mathbb{R}$ (6)

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu^*(U) \ : \ E \subseteq U \ \&\ U \text{ ανοικτό}\} \qquad (7)$$

(8)

Λύση Αφού $\left.\begin{array}{l} E \subseteq U \\ \mu^* \ \_\_\_ \end{array}\right\} \Rightarrow \mu^*(E) \ \_\_\_ \ \mu^*(U) \Rightarrow \mu^*(E) \le \ \_\_\_ \left\{\mu^*(U) : \begin{array}{l} E \subseteq U \\ U \text{ αν.} \end{array}\right\}$

Αντίστροφα Έστω ότι $\varepsilon > 0$ και $I_n = [a_n, b_n)$ ώστε (9)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \qquad \mu^*(E) + \varepsilon \quad \text{με} \quad E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \qquad (10)$$

$$\left(\text{θυμηθείτε: } \mu^*(E) = \ \_\_\_ \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \qquad : E \subseteq \qquad \right\} \right) \qquad (11)$$

Θέτουμε $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n - \ \_\_\_ \ , b_n) \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supseteq E$ (12)

Φανερά U ______ αλλά (13)

$$\mu^*(U) \overset{\text{υποπροσθ.}}{\le} \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(\qquad) \le \sum_{1}^{\infty} \left(b_n - a_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) \qquad (14)$$

σελ 2

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) + \varepsilon \leq \mu^*(E) + 2\varepsilon$$ (1)

Άρα $\inf \{ \mu^* \quad \} \leq \mu^*(E) + 2\cdot\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$ (2)

άρα $\inf \{ \quad \} \leq \mu^*(E)$ $\boxed{}$ (3)

<u>Ασκηση 6.2.4</u> Αν $d(A, B) = \inf\{ |x-y| : x \in A, y \in B\} > 0$ (4)

Τότε $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$ (5)

<u>Λύση</u>

Παρατήρηση επί του ορισμού του μ^*: Επειδή κάθε (6)

$[a, b)$ γράφεται ως ξένη ένωση $[a, a+r) \cup [a+r, a+2r) \cup \dots$ (7)

$\dots \cup [a+(N-1)r, b)$ όπου $r = \frac{b-a}{N}$ (8)

(παρατηρήστε ότι $a + Nr = \quad$)

και $\ell[a, b) = \sum_{k=1}^{N} \ell [a + (k-1)r, a + kr) = \sum_{k=1}^{N} \dots = b-a$ (9)

και τα διαστήματα $[a+(k-1)r, a+kr)$ έχουν όλα πλάτος ___ (10)

μπορούμε να τροποποιήσουμε τον ορισμό του μ^* ως εξής (11)

$$\mu^*(E) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \ell(\quad) \text{ με } E \subseteq \bigcup_{1}^{\infty} I_n, \ I_n = [a_n, b_n) \right.$$ (12)

$$\left. \text{ και } b_n - a_n < r \right\}$$ (13)

για όποιο $r > 0$ θέλουμε. (14)

Θέτουμε $r = \frac{d(A, B)}{2} > 0$ (15)

Τότε τα διαστήματα I μήκους $< r$ που καλύπτουν το A είναι ξένα με τα I που καλύπτουν το B.

δηλ. αν $E = A \cup B$ κ $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, $I_n = [a_n, b_n)$

& $b_n - a_n < r$ τότε $\{I_n : I_n \cap A \neq \emptyset\} \cap \{I_n : I_n \cap B \neq \emptyset\} = \emptyset$

Έστω τέτοια κάλυψη του $A \cup B$ ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell[a_n, b_n) \leq \mu^*(A \cup B) + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \mu^*(A \cup B) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} = \sum_{[a_n, b_n) \cap A \neq \emptyset} + \sum_{[a_n, b_n) \cap B \neq \emptyset}$$

$$\geq \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

$$\Rightarrow \mu^*(A \cup B) \geq \mu^*(A) + \mu^*(B)$$ ■

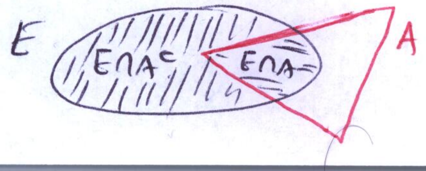
Η αντίστροφη είναι η υποπροσθετικότητα

Ιδιότητες του μέτρου Lebesgue

Παρατήρηση Για να ελέγξουμε τη μετρησιμότητα ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$ πρέπει να ελέγξουμε αν $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ $\forall E \subseteq \mathbb{R}$.

Όμως η $\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ ισχύει πάντα

λόγω της υποπροσθετικότητας $\left(E = (E \cap A) \cup (E \cap A^c) \right)$



Αρα για τον έλεγχο της μετρησιμότητας ενός συνόλου A

αρκεί να ελέγχουμε την $\mu^*(E) \geq \mu^*(E\cap A) + \mu^*(E\cap A^c)$ $\forall E$

Μάλιστα επειδή η τελευταία ισχύει τετριμμένα αν $\mu^*(E)=\infty$

$$\boxed{\text{αρκεί να ελέγχουμε την } \mu^*(E) \geq \mu^*(E\cap A) + \mu^*(E\cap A^c) \text{ για κάθε } E\subseteq \mathbb{R} \text{ } \underline{\text{με}} \text{ } \mu^*(E)<\infty.}$$

<u>Πρόταση</u> $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{M}$

<u>Αποδ</u> Η $\mu^*(E) \geq \mu^*(E\cap \mathbb{R}) + \mu^*(E\cap \underbrace{\mathbb{R}^c}_{=\emptyset})$ ισχύει προφανώς

με "=" διότι $\mu^*(E\cap\emptyset) = \mu^*(\emptyset) = 0$ διότι $\emptyset \subseteq [0,\varepsilon)$ $\forall \varepsilon>0$

άρα $\mu^*(\emptyset) \leq \varepsilon$ $\forall \varepsilon>0 \implies \mu^*(\emptyset)=0$ ∎

<u>Πρόταση</u> Αν $\mu^*(A)=0 \implies A\in\mathcal{M}$ (οπότε $\mu(A)=0$)

<u>Απόδειξη</u> $\forall E\subseteq\mathbb{R}$ $\quad 0\leq \mu^*(E\cap A) \leq \mu^*(A) = 0 \implies$ ___ $=0$.

Όμως E ___ $E\cap A^c$, άρα $\mu^*(E)$ ___ $\mu^*(E\cap A^c) =$ ___ $+ \mu^*(E\cap A^c)$

$=$ ___ $+ \mu^*(E\cap A^c) \implies A\in\mathcal{M}$ ∎