Μάθημα 9

Πόρισμα Αν A αριθμήσιμο τότε $\mu^*(A) = 0$ (1)

Απόδειξη Αν $A = \{x_1, x_2, x_3, \dots\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{x_j\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} [x_j, x_j]$ (2)

Από την υποπροσθετικότητα

$$\mu^*(A) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*([x_j\ x_j]) = \sum_{j=1}^{\infty} (x_j - x_j) = 0.$$ (3)

Πόρισμα Το διάστημα $[0, 1]$ <u>δεν</u> είναι αριθμήσιμο (4)

αφού $\mu^*([0\ 1]) =$ (5)

Άσκηση 6.2.2. Δείξτε ότι $\forall\ E \subseteq \mathbb{R}$ (6)

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu^*(U) \ : \ E \subseteq U \ \& \ U \text{ ανοικτό}\}$$ (7)

Λύση Αφού $E \subseteq U$, μ^* ___ $\Rightarrow \mu^*(E)$ ___ $\mu^*(U) \Rightarrow \mu^*(E) \le$ ___ $\left\{\mu^*(U) : \begin{matrix} E \subseteq U \\ U \text{ αν.} \end{matrix}\right\}$ (8)

Αντίστροφα Έστω ότι $\varepsilon > 0$ και $I_n = [a_n, b_n)$ ώστε (9)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \quad \mu^*(E) + \varepsilon \quad \text{με} \quad E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$ (10)

(θυμηθείτε: $\mu^*(E) =$ ___ $\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \quad : E \subseteq \quad \right\}$) (11)

Θέτουμε $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n -$ ___ $, b_n) \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supseteq E$ (12)

Φανερά U _____ αλλά (13)

$$\mu^*(U) \overset{\text{υποπροσ.}}{\le} \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(\qquad) \le \sum_{1}^{\infty} \left(b_n - a_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right)$$ (14)

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) + \varepsilon \le \mu^*(E) + 2\varepsilon$$

Άρα $\inf\{\mu^* \qquad \} \le \mu^*(E) + 2\cdot\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

άρα $\inf\{ \qquad \} \le \mu^*(E)$

<u>Άσκηση 6.2.4</u> Αν $d(A,B) = \inf\{ |x-y| : x \in A, y \in B\} > 0$

τότε $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$

<u>Λύση</u>

Παρατήρηση επί του ορισμού του μ^*: Επειδή κάθε $[a,b)$ γράφεται ως ξένη ένωση $[a, a+r) \cup [a+r, a+2r) \cup \cdots \cup [a+(N-1)r, b)$ όπου $r = \frac{b-a}{N}$

(παρατηρήστε ότι $a + Nr = \qquad$)

και $\ell[a,b) = \sum_{k=1}^{N} \ell[a+(k-1)r, a+kr) = \sum_{k=1}^{N} \cdots = b-a$

και τα διαστήματα $[a+(k-1)r, a+kr)$ έχουν όλα πλάτος ___

μπορούμε να τροποποιήσουμε τον ορισμό του μ^* ως εξής

$$\mu^*(E) = \inf\Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} \ell(\quad) \text{ με } E \subseteq \bigcup_{1}^{\infty} I_n,\ I_n = [a_n, b_n) \text{ και } b_n - a_n < r \Big\}$$

για όποιο $r > 0$ θέλουμε.

Θέτουμε $r = \frac{d(A,B)}{2} > 0$

Τότε τα διαστήματα I μήκους $< r$ που καλύπταν το A είναι ξένα με τα I που καλύπταν το B.

δηλ. αν $E = A \cup B$ ή $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, $I_n = [a_n, b_n)$ & $b_n - a_n < r$ τότε $\{I_n : I_n \cap A \neq \emptyset\} \cap \{I_n : I_n \cap B \neq \emptyset\} = \emptyset$

Έστω τέτοια κάλυψη του $A \cup B$ ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell[a_n, b_n) \leq \mu^*(A \cup B) + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \mu^*(A \cup B) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} = \sum_{[a_n, b_n) \cap A \neq \emptyset} + \sum_{[a_n, b_n) \cap B \neq \emptyset}$$

$$\geq \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

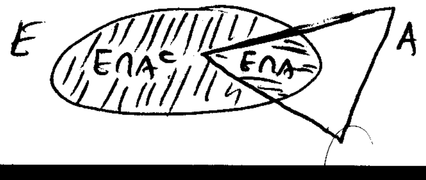
$$\Rightarrow \mu^*(A \cup B) \geq \mu^*(A) + \mu^*(B) \qquad \blacksquare$$

Η αντίστροφη είναι η υποπροσθετικότητα

Ιδιότητες του μέτρου Lebesgue

Παρατήρηση: Για να ελέγξουμε τη μετρησιμότητα ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$ πρέπει να ελέγξουμε αν $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ $\forall E \subseteq \mathbb{R}$.

Όμως η $\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ ισχύει πάντα λόγω της υποπροσθετικότητας $\left(E = (E \cap A) \cup (E \cap A^c) \right)$



Άρα για τον έλεγχο της μετρησιμότητας ενός συνόλου A

αρκεί να ελέγχουμε την $\mu^*(E) \geq \mu^*(E\cap A) + \mu^*(E\cap A^c)$ $\forall E$

Μάλιστα επειδή η τελευταία ισχύει τετριμμένα αν $\mu^*(E)=\infty$

αρκεί να ελέγχουμε την $\mu^*(E) \geq \mu^*(E\cap A) + \mu^*(E\cap A^c)$
για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}$ με $\mu^*(E) < \infty$.

Πρόταση $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{M}$

Απόδ. Η $\mu^*(E) \geq \mu^*(E\cap \mathbb{R}) + \mu^*(E \cap \underbrace{\mathbb{R}^c}_{=\emptyset})$ ισχύει προφανώς

με "=" διότι $\mu^*(E\cap\emptyset) = \mu^*(\emptyset) = 0$ διότι $\emptyset \subseteq [0,\varepsilon)$ $\forall \varepsilon>0$

άρα $\mu^*(\emptyset) \leq \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \mu^*(\emptyset) = 0$ ∎

Πρόταση Αν $\mu^*(A) = 0 \Rightarrow A \in \mathcal{M}$ (οπότε $\mu(A) = 0$)

Απόδειξη $\forall E \subseteq \mathbb{R}$ $\quad 0 \leq \mu^*(E\cap A) \leq \mu^*(A) = 0 \Rightarrow \underline{\qquad} = 0$.

Όμως $E \underline{\qquad} E\cap A^c$, άρα $\mu^*(E) \underline{\qquad} \mu^*(E\cap A^c) = \underline{\qquad} + \mu^*(E\cap A^c)$ ∎

$= \underline{\qquad} + \mu^*(E\cap A^c) \Rightarrow A \in \mathcal{M}$