Μάθημα 9

Πόρισμα Αν A αριθμήσιμο τότε $\mu^*(A)=0$ (1)

Απόδειξη Αν $A=\{x_1,x_2,x_3,\dots\}=\bigcup_{j=1}^{\infty}\{x_j\}=\bigcup_{j=1}^{\infty}[x_j,x_j]$ (2)

Από την υποπροσθετικότητα

$$\mu^*(A)\le\sum_{j=1}^{\infty}\mu^*([x_j\ x_j])=\sum_{j=1}^{\infty}(x_j-x_j)=0. \quad \blacksquare \quad (3)$$

Πόρισμα Το διάστημα $[0,1]$ δεν είναι αριθμήσιμο (4)

αφού $\mu^*([0\ 1])=1\neq 0$ (5)

Άσκηση 6.2.2. Δείξτε ότι $\forall\ E\subseteq\mathbb{R}$ (6)

$$\mu^*(E)=\inf\{\mu^*(U)\ :\ E\subseteq U\ \&\ U \text{ ανοικτό}\} \quad (7)$$

Λύση Αφού $\left.\begin{array}{l}E\subseteq U\\ \mu^* \text{ μονότονο}\end{array}\right\}\Rightarrow\mu^*(E)\le\mu^*(U)\Rightarrow\mu^*(E)\le\inf\left\{\mu^*(U):\begin{array}{l}E\subseteq U\\ U\text{ αν.}\end{array}\right\}$ (8)

Αντίστροφα Έστω ότι $\varepsilon>0$ και θεωρούμε $I_n=[a_n,b_n)$ ώστε (9)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n)\le\mu^*(E)+\varepsilon \quad \text{με} \quad E\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n \quad (10)$$

(θυμηθείτε: $\mu^*(E)=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n)\ :\ E\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\right\}$) (11)

Θέτουμε $U=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{\varepsilon}{2^n},\ b_n\right)\supseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\supseteq E$ (12)

Φανερά U ανοικτό αλλά (13)

$$\mu^*(U)\overset{\text{υποπροσθ.}}{\le}\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*\left(a_n-\frac{\varepsilon}{2^n},\ b_n\right)\le\sum_{1}^{\infty}\left(b_n-a_n+\frac{\varepsilon}{2^n}\right) \quad (14)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) + \varepsilon \le \mu^*(E) + 2\varepsilon$$ (1)

Αρα $\inf\{\mu^*(V) : E \subseteq V, V \text{ ανοικτό}\} \overset{\le \mu^*(V) \le}{} \le \mu^*(E) + 2\cdot\varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$ (2)

αρα $\inf\{\mu^*(V) : V \text{ αν.} \supseteq E\} \le \mu^*(E)$ (3)

<u>Ασκηση 6.2.4</u> Αν $d(A,B) = \inf\{|x-y| : x \in A, y \in B\} > 0$ (4)

(5)

Τότε $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$

<u>Λύση</u>

Παρατήρηση: επί του ορισμού του μ^*: Επειδή κάθε (6)

$[a,b)$ γράφεται ως πεπερασμένη ξένη ένωση $[a, a+r) \cup [a+r, a+2r) \cup \cdots$ (7)

$\cdots \cup [a+(N-1)r, b)$ όπου $r = \frac{b-a}{N}$ (8)

(παρατηρήστε ότι $a + Nr = b$)

και $\ell[a,b) = \sum_{k=1}^{N} \ell[a+\overset{(k-1)}{\cancel{k}}r, a+\overset{k}{\cancel{(k+1)}}r) = \sum_{k=1}^{N} r = b-a$ (9)

και τα διαστήματα $[a+(k-1)r, a+kr)$ έχουν όλα πλάτος r (10)

μπορούμε να τροποποιήσουμε τον ορισμό του μ^* ως εξής (11)

$$\mu^*(E) = \inf\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \text{ με } E \subseteq \bigcup_{1}^{\infty} I_n, \; I_n = [a_n, b_n)$$ (12)

$$\text{και } b_n - a_n < r\Big\}$$ (13)

για όποιο $r > 0$ θέλουμε. (14)

Θέτουμε $r = \frac{d(A,B)}{2} > 0$ (15)

Τότε τα διαστήματα I μήκους $< r$ που ~~καλύπταν~~ τέμνουν το A είναι ξένα με τα I που ~~καλύπταν~~ τέμνουν το B.

δηλ. αν $E = A \cup B$ κ $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, $I_n = [a_n, b_n)$

& $b_n - a_n < r$ τότε $\{I_n : I_n \cap A \neq \emptyset\} \cap \{I_n : I_n \cap B \neq \emptyset\} = \emptyset$

Έστω τέτοια κάλυψη του $A \cup B$ ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell[a_n, b_n) \leq \mu^*(A \cup B) + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \mu^*(A \cup B) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \ell[a_n, b_n) = \sum_{[a_n, b_n) \cap A \neq \emptyset} \ell[a_n, b_n) + \sum_{[a_n, b_n) \cap B \neq \emptyset} \ell[a_n, b_n)$$

$$\geq \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

$$\Rightarrow \mu^*(A \cup B) \geq \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

$\blacksquare$

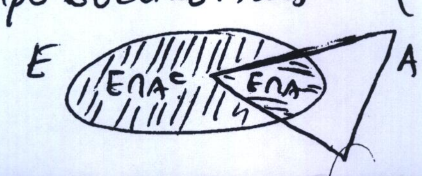
Η αντίστροφη είναι η υποπροσθετικότητα

Ιδιότητες του μέτρου Lebesgue

Παρατήρηση: Για να ελέγξουμε τη μετρησιμότητα ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$ πρέπει να ελέγξουμε αν $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ $\forall E \subseteq \mathbb{R}$.

Όμως η $\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ ισχύει πάντα

λόγω της υποπροσθετικότητας $(E = (E \cap A) \cup (E \cap A^c))$



Άρα για τον έλεγχο της μετρησιμότητας ενός συνόλου A (1)

αρκεί να ελέγχουμε την $\mu^*(E) \geq \mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap A^c)$ $\forall E$ (2)

Μάλιστα επειδή η τελευταία ισχύει τετριμμένα αν $\mu^*(E)=\infty$ (3)

αρκεί να ελέγχουμε την $\mu^*(E) \geq \mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap A^c)$ (4)

για κάθε $E\subseteq\mathbb{R}$ <u>με</u> $\mu^*(E)<\infty$. (5)

<u>Πρόταση</u> $\emptyset, \mathbb{R}\in\mathcal{M}$ (6)

<u>Αποδ</u> Η $\mu^*(E)\geq \mu^*(E\cap\mathbb{R})+\mu^*(E\cap \underbrace{\mathbb{R}^c}_{=\emptyset})$ ισχύει προφανώς (7)

με "=" διότι $\mu^*(E\cap\emptyset)=\mu^*(\emptyset)=0$ διότι $\emptyset\subseteq[0,\varepsilon)$ $\forall\varepsilon>0$ (8)

άρα $\mu^*(\emptyset)\leq\varepsilon$ $\forall\varepsilon>0$ $\Rightarrow$ $\mu^*(\emptyset)=0$ ∎ (9)

<u>Πρόταση</u> Αν $\mu^*(A)=0 \Rightarrow A\in\mathcal{M}$ (οπότε $\mu(A)=0$) (10)

<u>Απόδειξη</u> $\forall E\subseteq\mathbb{R}$ $0\leq\mu^*(E\cap A)\leq\mu^*(A)=0 \Rightarrow \mu^*(E\cap A)=0$. (11)

Όμως $E\supseteq E\cap A^c$, άρα $\mu^*(E)\geq\mu^*(E\cap A^c)=0+\mu^*(E\cap A^c)$ (12)

$=\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap A^c) \Rightarrow A\in\mathcal{M}$ ∎ (13)