# Μάθημα 10

## Η $\mathcal{M}$ έχει «πολλά» σύνολα

**Ορισμός (άλγεβρα συνόλων)** Μια μη κενή οικογένεια συνόλων $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ ονομάζεται άλγεβρα αν

(i) $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

(ii) $\forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

**Παρατήρηση** Η (ii) με επαγωγή $\Rightarrow \forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$

[ $n=2$ ισχύει — είναι η (ii). Τώρα αν έχουμε $n+1$ σύνολα
αν ισχύει για $n$ σύνολα

$$A_1, \dots, A_n, A_{n+1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A} \quad \text{(από επαγ. υποθ)} \\ A_{n+1} \in \mathcal{A} \end{array} \right\} \xRightarrow{(ii)}$$

$$\Rightarrow \left( \bigcup_{k=1}^{n} A_k \right) \cup A_{n+1} \in \mathcal{A}. ]$$

Επίσης αν $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \xRightarrow{(i)} A_1^c, \dots, A_n^c \in \mathcal{A}$

$$\xRightarrow{(ii)} \bigcup_{k=1}^{n} A_k^c \in \mathcal{A} \xRightarrow{(i)} \left( \bigcup_{k=1}^{n} A_k^c \right)^c \in \mathcal{A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}.$$

**Πρόταση** Αν $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}$ (δηλ. αν $A$ μετρήσιμο τότε και $A^c$ μετρήσιμο)

**Απόδειξη** $\forall E \subseteq \mathbb{R}$ $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ αφού $A \in \mathcal{M}$

$$= \mu^*(E \cap (A^c)^c) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E \cap A^c) + \mu^*(E \cap (A^c)^c)$$

$$\Rightarrow A^c \in \mathcal{M} \quad \blacksquare$$

Πρόταση Αν $A, B \in \mathfrak{M} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{M}$ (1)

Απόδειξη $A \in \mathfrak{M}$ άρα $\forall E \subseteq \mathbb{R}$ $\mu^*(E) = \overbrace{\mu^*(E \cap A)}^{\boxed{1}} + \overbrace{\mu^*(E \cap A^c)}^{\boxed{2}}$ (2)

$B \in \mathfrak{M}$ $\underbrace{\mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c)}_{\boxed{1}} + \underbrace{\mu^*(E \cap A^c \cap B) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c)}_{\boxed{2}}$ (3)

$$= \mu^*(E \cap (A \cup B)^c) + \mu^*(E \cap (A \cap B)) + \mu^*(E \cap (A \setminus B)) + \mu^*(E \cap (B \setminus A)) \quad (4)$$

υποπροσθετ.

$$\geq \mu^*(E \cap (A \cup B)^c) + \mu^*\Big((E \cap (A \cap B)) \cup (E \cap (A \setminus B)) \cup (E \cap (B \setminus A))\Big) \quad (5)$$

$$= \mu^*(E \cap (A \cup B)^c) + \mu^*\Big(E \cap \big(\underbrace{(A \cap B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A)}_{= A \cup B}\big)\Big) \quad (6)$$

$$= \mu^*(E \cap (A \cup B)^c) + \mu^*(E \cap (A \cup B)) \quad (7)$$

Δηλαδή καταλήξαμε στην

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c) \quad (8)$$

$$\Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{M} \qquad \blacksquare \quad (9)$$

Πόρισμα Η $\mathfrak{M}$ είναι άλγεβρα. (10)

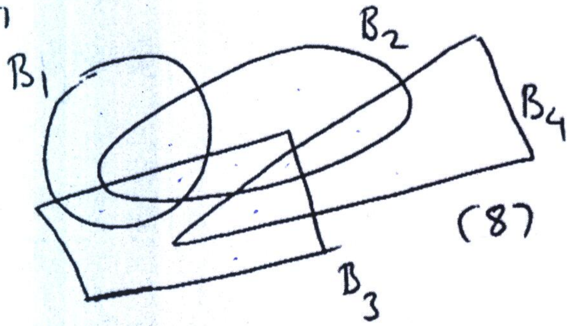
Ορισμός (σ-άλγεβρα) Μια μη κενή οικογένεια $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ (11)
λέγεται σ-άλγεβρα αν (12)

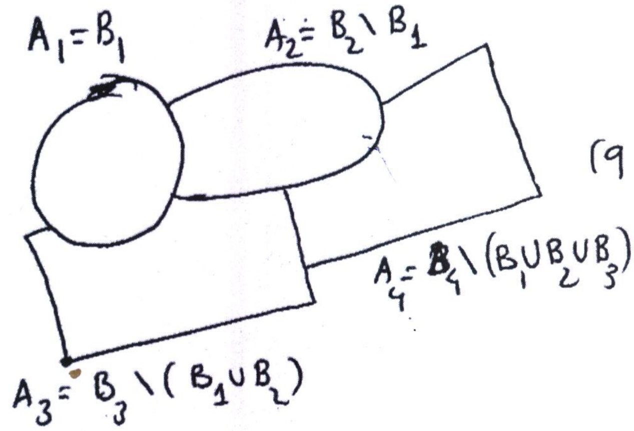
(i) $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$ (ii) $\forall (A_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. (13)

<u>Πρόταση</u> Μια άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι και σ-άλγεβρα αν

$$\left.\begin{array}{l}\forall (A_n)_{n=1}^{\infty} \ \underline{\text{ξένα ανά δύο}} \text{ στοιχεία της } \mathcal{A} \\ \text{συνεπάγεται } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}\end{array}\right\} (*)$$

<u>Απόδειξη</u> Έστω ότι η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα και έχει και την ιδιότητα (*). Θα δείξουμε ότι είναι και σ-άλγεβρα. Έστω $B_n \in \mathcal{A}$ (όχι απαραίτητα ξένα). Πρέπει να δείξουμε ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$.




Θέτουμε $A_1 = B_1$ και $A_n = B_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} B_j$. Τα $A_n$ είναι ξένα μεταξύ τους διότι αν $m > n$

$$A_n \subseteq B_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{m-1} B_j \quad \text{αλλά} \quad A_m = B_m \setminus \bigcup_{j=1}^{m-1} B_j, \quad \bigcup_{j=1}^{m-1} B_j \supseteq A_n \quad \text{άρα } A_m \cap A_n = \emptyset$$

(αφού $n \in \{1, \dots, m-1\}$)

$A_n \in \mathcal{A}$ διότι $A_n = B_n \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} B_j\right)^c \in \mathcal{A}$ αφού $\mathcal{A}$ άλγεβρα.

(άσκηση: $A \setminus B = A \cap B^c$)

Άρα από την υπόθεση (*) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. Αλλά $\bigcup_1^{\infty} A_n = \bigcup_1^{\infty} B_n$ διότι η $\bigcup_1^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_1^{\infty} B_n$ είναι προφανής γιατί $A_n \subseteq B_n$ και αν $x \in \bigcup_1^{\infty} B_n$ $\Rightarrow$ το $x$ ανήκει σε τουλάχιστον ένα από τα $B_n$. Έστω $n_0$ ο πρώτος δείκτης ώστε (1)

$x \in B_{n_0}$ άρα $x \notin B_j \ \forall j < n_0$. Συνεπώς (2)

$$x \in B_{n_0} \setminus \bigcup_{j=1}^{n_0-1} B_j = A_{n_0} \subseteq \bigcup_1^{\infty} A_n \quad (3)$$

Δηλαδή $\bigcup_1^{\infty} B_n \subseteq \bigcup_1^{\infty} A_n$ άρα $\bigcup_1^{\infty} B_n = \bigcup_1^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ ■ (4)