Μάθημα 11

Θεώρημα (Καραθεοδωρή) Η $\mathcal{M}$ είναι σ-άλγεβρα και το μέτρο Lebesgue μ είναι αριθμήσιμα προσθετικό. Δηλ. αν A_n ξένα & μετρήσιμα τότε $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

Απόδειξη Ήδη γνωρίζουμε ότι η $\mathcal{M}$ είναι άλγεβρα. Έτσι από την προηγούμενη πρόταση αρκεί να αποδείξουμε ότι αν A_n ξένα ανά δύο στοιχεία της $\mathcal{M}$ τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

Θέτουμε $B_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ και $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Φανερά $B_n \in \mathcal{M}$ αφού $\mathcal{M}$ άλγεβρα. Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι $B \in \mathcal{M}$. Παρατηρήστε ότι $B_n \uparrow$, $B_n \subseteq B \Rightarrow B_n^c \supseteq B^c$

Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c)$

Όμως
$$\mu^*(E \cap B_n) = \mu^*(E \cap B_n \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_n \cap A_n^c) =$$
$$= \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_{n-1})$$
$$\overset{\text{επαγωγή}}{=} \mu^*(E \cap A_n) + \dots + \mu^*(E \cap A_1)$$

Δηλαδή $\mu^*(E \cap B_n) = \sum_{j=1}^{n} \mu^*(E \cap A_j)$

Άρα
$$\mu^*(E) \overset{B_n \in \mathcal{M}}{=} \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_n^c) \geq \sum_{j=1}^{n} \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*(E \cap B^c)$$

$n \to \infty \Rightarrow$

$$\mu^*(E) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*(E \cap B^c) \quad (*)$$

$$\underset{\text{υποπροσθετικότητα}}{\geq} \mu^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} (E\cap A_j)\Big) + \mu^*(E\cap B^c) =$$

$$= \mu^*\Big(E\cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) + \mu^*(E\cap B^c)$$

$$= \mu^*(E\cap B) + \mu^*(E\cap B^c) \geq \mu^*(E)$$

Άρα $B\in\mathcal{M}$. Τέλος, στην $(*)$ της σελ. 1 ισχύει ισότητα οπότε θέτοντας εκεί $E = B$ παίρνουμε

$$\mu^*(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(B\cap A_j) + \mu^*(B\cap B^c)$$

$$\mu^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j) \Rightarrow \mu\Big(\bigcup_{1}^{\infty} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \quad \blacksquare$$

<u>Πρόταση</u> Κάθε διάστημα είναι μετρήσιμο.

<u>Απόδειξη</u> Αρκεί να δείξουμε ότι $[a,b)\in\mathcal{M}$ (αφού π.χ. $(a,b) = [a,b)\cap\{a\}^c$, $[a,b] = [a,b)\cup\{b\}$ κλπ)

Θεωρούμε $E\subseteq\mathbb{R}$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\mu^*(E) \geq \mu^*(E\cap[a,b)) + \mu^*(E\cap[a,b)^c)$

Από τον ορισμό του μ^*, $\forall\varepsilon>0$ $\exists$ $[a_n,b_n) = I_n$: $E\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n)$

για $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \leq \mu^*(E)+\varepsilon$

Όμως $\forall n$ τα $I_n\cap[a,b)$ και $I_n\cap[a,b)^c$ είναι διαστήματα ή ένωση δύο διαστημάτων κ εύκολα ελέγχουμε ότι

$$\ell(I_n) = \mu^*(I_n) = \mu^*(I_n\cap[a,b)) + \mu^*(I_n\cap[a,b)^c)$$

διακρίνοντας περιπτώσεις. Π.χ.

σελ 3

αν $a_n < a < b_n < b$ τότε $\mu^*(I_n \cap [a\,b)) = \mu^*[a\; b_n) = b_n - a$ (1)

$\mu^*(I_n \cap [a\,b)^c) = \mu^*[a_n\; a) = a - a_n \Rightarrow$ (2)

$\Rightarrow \mu^*(I_n \cap [a\,b)) + \mu^*(I_n \cap [a\,b)^c) = b_n - a_n = \ell(I_n) = \mu^*(I_n)$ (3)

ομοίως αν $a < a_n < b_n < b$, $a < a_n < b < b_n$, κλπ. (4)

Άρα

$\mu^*(E) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) = \sum_{1}^{\infty} \left(\mu^*(I_n \cap [a\,b)) + \mu^*(I_n \cap [a\,b)^c)\right)$ (5)

$\underset{\text{υποπροσθετικότητα}}{\geq} \mu^*\left(\bigcup_1^\infty I_n \cap [a\,b)\right) + \mu^*\left(\bigcup_1^\infty I_n \cap [a,b)^c\right)$ (6)

$\underset{\text{μονοτονία}}{\geq} \mu^*(E \cap [a\,b)) + \mu^*(E \cap [a\,b)^c) \Longrightarrow [a,b) \in \mathcal{M}$ ∎ (7)

Άρα η $\mathcal{M}$ περιέχει τα διαστήματα, τα σύνολα μέτρου 0 και με αυτά μέσα στην $\mathcal{M}$ μπορούμε να κάναμε οποιεσδήποτε αριθμήσιμες συνολοθεωρητικές πράξεις.

<u>Πρόταση</u> Αν $A \supseteq B$ μετρήσιμα με $\mu(B) < \infty$ τότε $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$ (8)

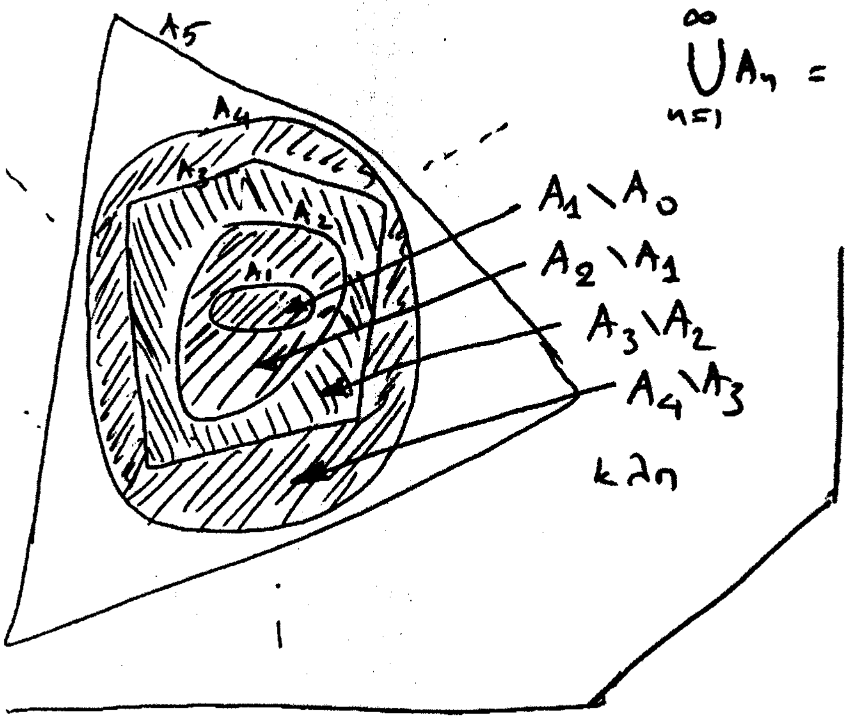
<u>Απόδειξη</u> $A = B \cup (A \setminus B) \Rightarrow \mu(A) = \mu(B) + \mu(A \setminus B) \Rightarrow$ (9)

$\xrightarrow{\mu(B) < \infty} \mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$ ∎ (10)

<u>Πρόταση</u> Αν A_n μετρήσιμα και $A_n \subseteq A_{n+1}$ $\forall n$ τότε (11)

$\mu\left(\bigcup_1^\infty A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$ (12)

<u>Απόδειξη</u> Θέτουμε $A_0 = \emptyset$. Τότε (1)



$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{(A_j \setminus A_{j-1})}_{\text{ξένα μεταξύ τους}} \qquad (2)$$

Άρα $\mu\left(\bigcup_{1}^{\infty} A_n\right) =$ (3)

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}(A_j \setminus A_{j-1})\right) \underset{\text{ξένα}}{\overset{A_j \setminus A_{j-1}}{=\!=}} \qquad (4)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j \setminus A_{j-1}) \qquad (5)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j \setminus A_{j-1}) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n}(A_j \setminus A_{j-1})\right) = \qquad (6)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \qquad \blacksquare\ (7)$$