

# Μάθημα 12

Πρόταση Αν  $A_n \in \mathcal{M}$  &  $A_n \supseteq A_{n+1}$  τότε  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ : (1)

$\mu(A_{n_0}) < \infty$  τότε  $\mu\left(\bigcap_1^\infty A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$  (2)

Απόδειξη  $\forall j > n_0$  θεωρούμε  $F_j = A_{n_0} \setminus A_j$  ↑ (3)

οπότε  $\mu\left(\bigcup_{j=n_0+1}^\infty F_j\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n)$  (4)

$\mu(A_j) \leq \mu(A_{n_0}) < \infty \quad \forall j > n_0$  οπότε  $\mu(F_j) = \mu(A_{n_0}) - \mu(A_j) \quad \forall j > n_0$  (5)

και  $\bigcup_{j=n_0+1}^\infty F_j = \bigcup_{j=n_0+1}^\infty (A_{n_0} \setminus A_j) \stackrel{\text{De Morgan}}{=} A_{n_0} \setminus \bigcap_{j=n_0+1}^\infty A_j = A_{n_0} \setminus \bigcap_{j=1}^\infty A_j$  (6)

$A_j$  φθίνουσα

$\left[ \bigcup_{j=n_0+1}^\infty (A_{n_0} \setminus A_j) = \bigcup_{j=n_0+1}^\infty (A_{n_0} \cap A_j^c) = A_{n_0} \cap \bigcup_{j=n_0+1}^\infty A_j^c \stackrel{DM}{=} A_{n_0} \cap \left(\bigcap_{j=1}^\infty A_j\right)^c \right]$  (7)

$= A_{n_0} \setminus \left(\bigcap_{j=1}^\infty A_j\right)$  (8)

$\left[ \bigcap_1^\infty A_j \subseteq \bigcap_{n_0+1}^\infty A_j \right]$  φανερό. Αν  $x \in \bigcap_{n_0+1}^\infty A_j \Rightarrow x \in A_{n_0+1} \subseteq A_{n_0} \subseteq A_{n_0-1} \subseteq \dots \subseteq A_1$  (9)

οπότε Αντίστροφα  $x \in A_n \quad \forall n \Rightarrow x \in \bigcap_1^\infty A_n$  (10)

Συνεπώς η (4) γράφεται (11)

$\mu\left(A_{n_0} \setminus \left(\bigcap_1^\infty A_j\right)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(A_{n_0}) - \mu(A_n))$  (12)

$\Rightarrow \mu(A_{n_0}) - \mu\left(\bigcap_1^\infty A_j\right) = \mu(A_{n_0}) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$  (13)

$\xrightarrow{\mu(A_{n_0}) < \infty} \mu\left(\bigcap_1^\infty A_j\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$  (14)

Παρατήρηση Η προηγούμενη δεν ισχύει αν  $\mu(A_n) = \infty$  τότε π.χ. (15)

$A_n = (n, \infty) \downarrow \quad \lim_n \mu(A_n) = \lim_n \infty = \infty \quad \alpha \lambda \alpha \quad \mu\left(\bigcap_n A_n\right) = \mu(\emptyset) = 0$  (16)

Άσκηση 6.4.1 |  $\mathcal{A} = \{ F \subseteq \mathbb{N} : |F| < \infty \vee |F^c| < \infty \}$  (1)

είναι αλγεβρα αλληλοσυμβατά σ-άλγεβρα (2)

[  $\{z_n\} \in \mathcal{A}$  ή αλληλοσυμβατά  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{z_n\} = \{ \text{ότιοι} \} \notin \mathcal{A}$  (3)

από  $\mathcal{A}$  ή σ-άλγεβρα ] (4)

Άσκ 6.4.4 | Έστω ότι  $f: X \rightarrow Y$  συνάρτηση. (5)

(i) Αν  $\mathcal{B}$  μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του  $Y$  τότε (6)

$\mathcal{A} = \{ f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B} \}$  είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων (7)

του  $X$  (8)

(ii) Αν  $\mathcal{A}$  σ-άλγεβρα υποσυνόλων του  $X$  τότε η (9)

$\mathcal{B} = \{ B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \}$  είναι σ-άλγεβρα (10)

υποσυνόλων του  $Y$  (11)

Λύση Υπενθύμιση  $\forall B_n \in \mathcal{B}$  ισχύει  $f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n)$  (12)

$f^{-1}(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n)$   $\hookrightarrow f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$  (13)

(i) Αν  $A \in \mathcal{A}$  τότε  $A = f^{-1}(B)$  για κάποιο  $B \in \mathcal{B}$  (14)

$\Rightarrow A^c = X \setminus A = X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B) \setminus f^{-1}(B)$  (15)

$= f^{-1}(Y \setminus B) = f^{-1}(B^c) \in \mathcal{A}$  γιατί  $B^c \in \mathcal{B}$  (16)

και αν  $A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow A_n = f^{-1}(B_n)$  για κάποια  $B_n \in \mathcal{B}$  (17)

αλληλοσυμβατά  $\mathcal{B}$  είναι σ-άλγεβρα από (18)

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n) = f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \in \mathcal{A}$  (19)

από  $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}$ . Από  $\mathcal{A}$  σ-άλγεβρα (20)

Ομοίως το (ii) (άσκηση) (1)

Άσκηση 6.4.5 | Αν η  $\mathcal{A}$  είναι μια αλγεβρα, τα (2)

ακόλουθα είναι ισοδύναμα (3)

(i) Αν  $A_n \in \mathcal{A} \forall n \in \mathbb{N}$  τότε  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$  (4)

(ii) Αν  $A_n \in \mathcal{A} \forall n \in \mathbb{N}$   $\&$  είναι μεταξύτες τότε  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$  (5)

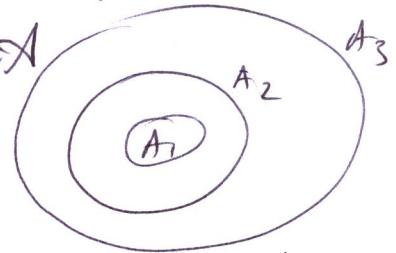
(iii) Αν  $A_n \in \mathcal{A} \forall n \in \mathbb{N}$   $\&$   $A_n \subseteq A_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$  τότε  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$  (6)

Λύση (i)  $\Rightarrow$  (ii) προφανές (7)

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Έστω ότι  $A_n \uparrow$  στην  $\mathcal{A}$  πρέπει να δείξουμε (8)

ότι  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ . Θετούμε  $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, B_3 = A_3 \setminus A_2 \dots$  (9)

Αυτά είναι  $\&$  είναι μεταξύτες,  $\&$  και αυξάνουν (10)



αφ' ου ισχύει το (ii)  $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$  (11)

Αλλά  $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ . Οπότε  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$  (12)

(iii)  $\Rightarrow$  (i) Αν  $A_n \in \mathcal{A}$  θετούμε  $B_n = \bigcup_{j=1}^n A_j \in \mathcal{A}, B_n \uparrow$  (13)

αφ' ου ισχύει το (iii)  $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$ . Αλλά  $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  (14)

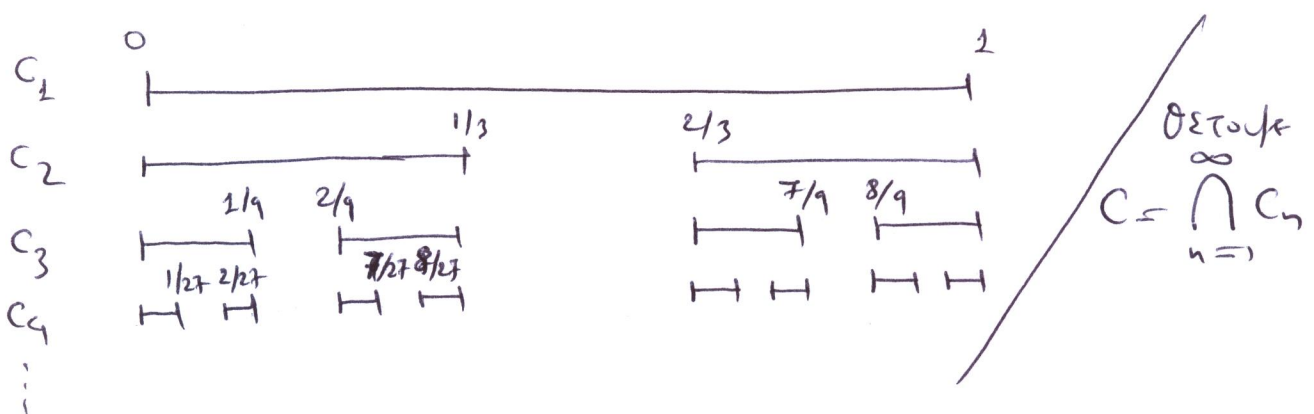
αφ' ου  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$  (15)

### Το σύνολο Cantor

Το σύνολο Cantor είναι το σύνολο C που προκύπτει ως εξής (16)

Θετούμε  $C_1 = [0, 1], C_2 = C_1 \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), C_3 = C_2 \setminus ((\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}) \cup (\frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2}))$  (17)

κλπ



Θετούμε  $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$  (18)

Άσκηση 6.4.9 Δείξτε ότι το σύνολο Cantor  $C$  είναι (1)

(2)

μετρικού  $\mu(C) = 0$

Λύση

Κάθε  $C_n$  αποτελείται από  $2^{n-1}$  διαστήματα μήκους  $\frac{1}{3^{n-1}}$  (3)

κάθε ένα. Άρα  $\mu(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ . Τα  $C_n$  φθάνουν,  $\mu(C_n) = 1 < \infty$  (4)

$$\text{Άρα } \mu(C) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 0 \quad (5)$$

(Το  $C_n$  είναι στην  $\mathcal{M}$  ως πεπερασμένη ένωση διαστημάτων (6)

Η  $\mathcal{M}$  είναι  $\sigma$ -άλγεβρα άρα  $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \in \mathcal{M}$  (7)

Εναλλακτικά μπορούμε να προσδιορίσουμε τα  $\mu$  μήκη των διαστημάτων που αφαιρούμε. (8)

Να πάρει δηλαδή ότι  $\mu(C) = \mu([0,1] \setminus \left( \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}\right) \cup \left(\frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2}\right) \cup \dots \right))$  (9)

$$= 1 - \left( \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{3^3} + \dots \right) = \quad (10)$$

$$= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \frac{1}{3^n} = 1 - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \quad (11)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \frac{2/3}{1 - 2/3} = 1 - \frac{1}{2} \frac{2/3}{1/3} = 1 - 1 = 0 \quad \square \quad (12)$$