Μάθημα 13ο

Άσκηση 6.4.2 $X \neq \emptyset$

Αν $\mathcal{A}$ οικογένεια αλγεβρών υποσυνόλων του X τότε η $\bigcap\limits_{A\in\mathcal{A}} A$ είναι άλγεβρα. Ομοίως για σ-άλγεβρες

Λύση Λύνουμε την άσκηση για σ-άλγεβρες: Έστω ότι $\mathcal{A}$ οικογένεια σ-αλγεβρών υποσυνόλων του X και $\mathcal{B} = \bigcap\limits_{A\in\mathcal{A}} A$. Αν $B \in \mathcal{B} \Rightarrow B \in A \ \forall A \in \mathcal{A}$

Αλλά A ____ $\Big\} \Rightarrow B^c$ $\forall$

άρα $B^c \in$

Αν $B_n \in \mathcal{B}$ για $n=1,2,\dots \Rightarrow B_n \in \quad \forall \quad \in \mathcal{A}$

A ____ $\Big\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \qquad \forall \qquad \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}$$

Άρα $\mathcal{B}$ σ-άλγεβρα.

Ορισμός Αν S οικογένεια υποσυνόλων του X.

Η $\sigma(S) = \bigcap \{A : A \text{ σ-άλγεβρα} \supseteq S\}$ είναι μια σ-άλγεβρα που περιέχει την οικογένεια S και μάλιστα είναι η ελάχιστη με αυτή την ιδιότητα

Η $\sigma(S)$ λέγεται η ______________________

Αν $(X\ d)$ μετρικός χώρος και $\mathcal{O}$ το σύνολο όλων των ανοικτών υποσυνόλων του X η $\sigma(\mathcal{O})$, δηλαδή η ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά σύνολα ονομάζεται Borel σ-άλγεβρα και συμβολίζεται με $\mathcal{B}(X)$.

Άσκηση 6.4.13 (Λήμμα Borel–Cantelli)

Αν $E_n \in \mathcal{M}$ με $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty \Rightarrow \mu(\limsup E_n) = 0$

όπου $\limsup E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{m=n}^{\infty} E_m \right)$

Λύση Αν θέσουμε $A_n = \bigcup_{m=n}$ τότε $A_n \downarrow$ και

$$\mu(A_1) = \mu(\quad) \overset{\text{υποπρ.}}{\leq} \sum \quad < \infty$$

Άρα $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \overset{\text{υποπρ.}}{\leq} \lim_{n\to\infty} \sum_m$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \mu(E_m) - \sum_{m=1}^{n-1} \mu(E_m) \right) = 0 \quad \blacksquare$$

Άσκηση 6.1.5 Δίνονται ανοικτά διαστήματα $I_1, \dots, I_n$. Δείξτε ότι αν το $\bigcup_{i=1}^{n} I_i$ περιέχει το $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ τότε

$$\sum_{i=1}^{n} \ell(I_i) \geq 1$$

Λύση Αν $\sum_{i=1}^{n} \ell(I_i) < 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \ell(\bar{I}_i) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \mu(\bar{I}_i) \xrightarrow{\text{υποπροσθ}} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} \bar{I}_i\right) < 1$$

$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} (\bar{I}_i \cap [0,1])\right) \leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} \bar{I}_i\right) < 1$. Άρα

$\mu\left([0,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{n} (\bar{I}_i \cap [0,1])\right) > 0$. Συνεπώς το

$[0,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{n} (\bar{I}_i \cap [0,1])$ είναι μη κενό και ανοικτό υποσύνολο του $[0,1]$. Άρα περιέχει ρητό, άτοπο $\blacksquare$

Άσκηση (α) Το εξωτερικό μέτρο μ^* είναι αναλλοίωτο στις μετατοπίσεις. Δηλαδή $\forall E \subseteq \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ αν $E+x = \{y+x \;:\; y \in E\}$ τότε $\mu^*(E+x) = \mu^*(E)$

(β) $\forall A \in \mathfrak{M}$ $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow A+x \in \mathfrak{M}$ & $\mu(A+x) = \mu(A)$

Λύση (α) $\mu^*(E+x) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j) \;:\; I_j = [a_j, b_j) \;\&\; E+x \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \right\}$

$= \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j) \;:\; I_j = [a_j\, b_j) \;\&\; E \subseteq \quad \right\}$

$= \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j - x) \;:\; I_j - x = [a_j - x, b_j - x) \;\&\; E \subseteq \quad \right\}$

$= \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j') \;:\; I_j' = [a_j', b_j') \;\&\; E \subseteq \quad \right\}$

$=$

(β) $\mu^*(E \cap (A+x)) + \mu^*(E \cap \quad) = \mu^*(((E-x) \cap A) + x) + \mu^*(((E-x) \cap A^c) + x)$

$\underset{=}{(\alpha)} \quad + \quad \underset{=}{A \in \mathfrak{M}} \; \mu^*(\quad) =$

$\Rightarrow A + x \in \mathfrak{M}$

Πρόταση Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(i) A μετρήσιμο (ii) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ G ανοικτό με $\mu^*(G \setminus A) < \varepsilon$

(iii) $\exists$ G_δ σύνολο $G \supseteq A$ ώστε $\mu^*(G \setminus A) = 0$

Απόδειξη (i)$\Rightarrow$(ii) Δείξαμε στην Ασκ. 6.2.2 ότι $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \text{ ανοικτό } \supseteq A\}$

Άρα $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ U ανοικτό $\supseteq$ ώστε

Αν $\mu(A) < \infty$ τότε $\Rightarrow \mu(U \setminus A) < \varepsilon$

Αν $\mu(A) = \infty$ θέτω $A_n = A \cap [-n, n]$ και βρίσκω όπως πριν ανοικτό U_n ώστε $U_n \supseteq A_n$ &

Θετουμε $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \supseteq A$, U ανοικτό και $\mu(U \setminus A) =$ (1)

$= \mu(\quad \setminus \quad) \leq \mu\left(\bigcup_1^{\infty} (U_n \setminus A_n)\right) \leq$ (2)

$\subseteq \bigcup_1^{\infty} (U_n \setminus A_n)$ (3)

$\leq \sum_1^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$ (4)

(5)

(ii) ⟹ (iii) Εστω G_n ανοικτό $\supseteq A$ η $\mu(G_n \setminus A) < \frac{1}{n}$

(6)

Θετω $G =$ G_δ-σύνολο $\supseteq A$ η

$\mu(G \setminus A) \leq$ $\leq \frac{1}{n}$ ⟹ $\mu(G \setminus A) =$ (7)

(iii) ⟹ (i) Το $G \setminus A$ είναι μετρήσιμο ως σύνολο _____ (8)

η το G είναι μετρήσιμο ως - - - - - (9)

Αρα $A \in \mathcal{M}$ γιατί $A = G \setminus (G \setminus A)$ διότι $G \supseteq A$ ■ 10