Μάθημα 14

<u>Πρόταση</u> $\forall A \subseteq \mathbb{R}$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(i) $A \in \mathcal{M}$ (ii) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists F \subseteq A$, F κλειστό με $\mu^*(A \setminus F) < \varepsilon$

(iii) υπάρχει F_σ σύνολο $F \subseteq A$ ώστε $\mu^*(A \setminus F) = 0$

<u>Απόδειξη</u> (i) $\Rightarrow$ (ii) Εφαρμόζουμε την προηγούμενη πρόταση

για το A^c. Άρα $\exists$ G ανοικτό $\supseteq A^c$ με $\mu(G \setminus A^c) < \varepsilon$

Αλλά $G \supseteq A^c \Rightarrow F := G^c \subseteq A$ και F κλειστό και

$$A \setminus F = A \cap F^c = A \cap G = G \cap (A^c)^c = G \setminus A^c .$$

Άρα $\mu^*(A \setminus F) = \mu^*(G \setminus A^c) < \varepsilon$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Έστω ότι $F_n \subseteq A$, F_n κλειστό με $\mu^*(A \setminus F_n) \leq \frac{1}{n}$

Θέτουμε $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq A$, F είναι F_σ-σύνολο και

$$\mu^*(A \setminus F) \leq \mu^*(A \setminus F_n) < \frac{1}{n} \quad \forall n \Rightarrow \mu^*(A \setminus F) = 0.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Το $A \setminus F$ είναι μετρήσιμο ως σύνολο μηδενικού εξ. μέτρου

το F είναι μετρήσιμο ως ένωση κλειστών

Αλλά $A = F \cup (A \setminus F)$ διότι $F \subseteq A$.

Άρα $A \in \mathcal{M}$.

<u>Άσκηση 6.4.14</u> | Δεν υπάρχει $\mu : \mathcal{P}([0,1)) \to [0, \infty]$ ώστε

(i) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ για A_n ξένα $\subseteq [0,1)$

(ii) $\mu(A+x) = \mu(A)$ $\forall A \subseteq [0,1)$ $\forall x \in [0,1)$ ώστε $A+x \subseteq [0,1)$

(iii) $\mu([0,1)) = 1$.

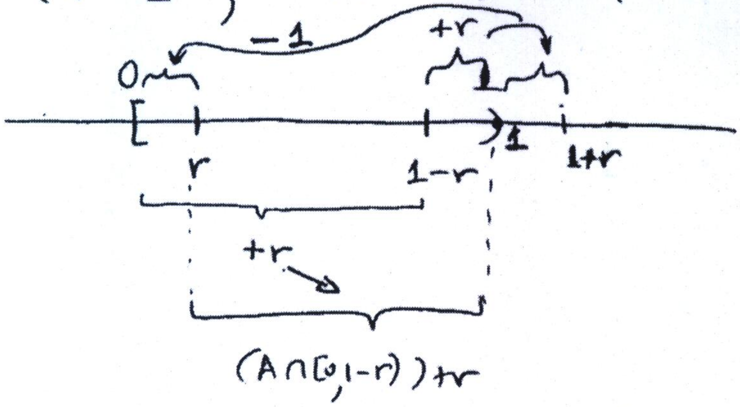
<u>Λύση</u> Στο $[0,1)$ ορίζουμε τη σχέση $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$

Η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας (άσκηση)

Από κάθε κλάση ισοδυναμίας επιλέγουμε ένα στοιχείο και σχηματίζουμε το σύνολο $A \subseteq [0,1)$. (1)

$\forall r \in \mathbb{Q}\cap[0,1)$ ορίζουμε τη μετατόπιση του A κατά $r \bmod 1$: (2)

$$A_r = ((A\cap[0,1-r))+r) \cup ((A\cap[1-r,1))+r-1) \quad (3)$$



Άρα $A\cap[0,1-r)+r \subseteq A_r$ & $A\cap[1-r,1)+r-1 \subseteq A_r$ (4)

<u>Ισχυρισμός</u> $\forall x\in[0,1)$ υπάρχει ακριβώς ένα $r\in\mathbb{Q}$: $x\in A_r$. (5)

[Έστω α_x το στοιχείο της κλάσης ισοδυναμίας $[x]$ του x (6)

που περιέχεται στο A. Δηλαδή $\{\alpha_x\} = A\cap[x]$. (7)

Άρα $\alpha_x \in [x] \Rightarrow \alpha_x - \cancel{x} \in \mathbb{Q}$ (8)

<u>Περίπτωση 1</u> Αν $x \geq \alpha_x$ θέτω $r = x-\alpha_x \in [0,1)\cap\mathbb{Q}$ (9)

$\Rightarrow \alpha_x = x - r \underset{x\in[0,1)}{\leq} 1-r \Rightarrow \alpha_x \in A\cap[0,1-r)$ (10)

$\Rightarrow x - r = \alpha_x \in A\cap[0,1-r) \Rightarrow x \in (A\cap[0,1-r))+r \subseteq A_r$ (11)

<u>Περίπτωση 2</u> Αν $x<\alpha_x \Rightarrow \alpha_x - x > 0$ και $\alpha_x - x < \alpha_x < 1$ (12)

$\Rightarrow \alpha_x - x \in (0,1) \Rightarrow x-\alpha_x \in (-1,0) \Rightarrow x-\alpha_x+1 \in (0,1)$ (13)

Θέτω $r = x-\alpha_x+1 \in \mathbb{Q}\cap(0,1)$ (14)

$\Rightarrow \alpha_x = x-r+1 \geq 1-r \Rightarrow \alpha_x \in A\cap[1-r,1)$ (15)

$\Rightarrow x-r+1 \in A\cap[1-r,1) \Rightarrow$ (16)

$\Rightarrow x \in (A\cap[1-r,1)) \cancel{+1-r} \underset{+r-1}{} \subseteq A_r$ (17)

Το r αυτό είναι μοναδικό: Αν $\exists\, r' \in \mathbb{Q}$ ώστε $x \in A_{r'}$ (1)

Τότε είτε $x = \alpha'_x + r'$ με $0 \le \alpha'_x < 1 - r'$ (2)

είτε $x = \alpha'_x + r' - 1$ με $1 - r' \le \alpha_x < 1$ (3)

Ενώ έχουμε ήδη για το r ότι είτε $x = \alpha_x + r$ με $0 \le \alpha_x < 1 - r$ (4)

είτε $x = \alpha_x + r - 1$ με $1 - r \le \alpha_x < 1$ (5)

Οι περιπτώσεις $x = \alpha_x + r = \alpha'_x + r' - 1$ και $x = \alpha_x + r - 1 = \alpha'_x + r'$ (6)

οδηγούν σε άτοπο: π.χ. αν $x = \alpha_x + r = \alpha'_x + r' - 1$ (7)

$\Rightarrow \alpha_x \sim x \sim \alpha'_x \Rightarrow \alpha_x = \alpha'_x$ (γιατί το A ΠΕΡΙΕΧΕΙ (8)

ΕΝΑΝ αντιπρόσωπο από κάθε κλάση ισοδυναμίας) (9)

Άρα $r = r' - 1 \Rightarrow 1 = r' - r < 1$ άτοπο, γιατί (10)

$r, r' \in [0,1)$ (δες γραμμές 9 και 14 της σελ. 2) (11)

Αν $x = r + \alpha_x = r' + \alpha'_x \Rightarrow \alpha_x \sim x \sim \alpha'_x \Rightarrow \alpha_x = \alpha'_x$ (12)

$\Rightarrow r = r'$ (13)

Αν $x = r + \alpha_x - 1 = r' + \alpha'_x - 1 \Rightarrow r + \alpha_x = r' + \alpha'_x$ (14)

όμοια $\Rightarrow r = r'$] (15)

$\mu(A_r) = \mu(A)$ διότι (16)

$\mu(A_r) = \mu\big((A \cap [0, 1-r)) + r \;\cup\; (A \cap [1-r, 1)) + r - 1\big)$ (17)

$\overset{(i)}{=} \mu\big((A \cap [0, 1-r)) + r\big) + \mu\big((A \cap [1-r, 1)) + r - 1\big)$ (18)

$\overset{(ii)}{=} \mu(A \cap [0, 1-r)) + \mu(A \cap [1-r, 1)) \overset{(i)}{=} \mu(A)$ (19)

(iii)

$$1 = \mu([0\,1)) = \mu\Big(\bigcup_{r\in[0\,1)\cap\mathbb{Q}} A_r\Big) = \sum_{r\in[0\,1)\cap\mathbb{Q}} \mu(A_r)$$ (1)

$$= \sum_{r\in[0\,1)\cap\mathbb{Q}} \mu(A) = \begin{cases} \infty & \text{αν } \mu(A)>0 \quad (2) \\ 0 & \text{αν } \mu(A)=0 \quad (3) \end{cases}$$

∴ σε κάθε περίπτωση έχουμε άτοπο ■ (4)

<u>Άσκηση 6.4.15</u> Υπάρχει μη μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. (5)

Το A της προηγούμενης άσκησης δεν είναι μετρήσιμο. (6)

Διότι αν $A\in\mathcal{M} \Rightarrow A+r \in \mathcal{M}$ και $\mu(A+r)=\mu(A)$ (7)

ενώ το μ είναι προσθετικό στην $\mathcal{M}$ και ισχύει $\mu([0\,1))=1$ (8)

Αυτό όμως είδαμε ότι δεν μπορεί να συμβαίνει (9)

άρα $A\notin\mathcal{M}$ (10)

Συνεπώς $\exists$ $E\subseteq\mathbb{R}$ ώστε $\mu^*(E) < \mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap A^c)$ (11)

Θέτουμε $C=E\cap A$ $D=E\cap A^c \Rightarrow E=C\cup D$ (12)

οπότε ισχύει C, D ξένα και (13)

$$\mu^*(C\cup D) < \mu^*(C)+\mu^*(D)$$ ■ (14)