Μάθημα 15

Η ανάγκη επέκτασης του ολοκληρώματος Riemann

Δύο από τις βασικές αδυναμίες του ολοκληρώματος Riemann είναι

(1) Δεν είναι ολοκληρώσιμες μη φραγμένες συναρτήσεις

όπως η $f(x)=\begin{cases} & \\ 0 & x=0 \end{cases}$ παρόλο που η

αντιπαράγωγος ___ έχει νόημα από 0 έως 1

(2) Υπάρχει ακολουθία Riemann ολοκληρωσίμων με $f_n \longrightarrow f$

και f όχι Riemann ολοκληρώσιμη. Πχ

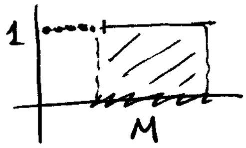
$$f_n(x)=\begin{cases} 1 & \text{αν } x\in Q_n=\{q_1,\dots,q_n\} \\ 0 & \text{αν } x\notin Q_n \end{cases}$$ όπου $Q=\{q_1,q_2,\dots\}$

$$f_n(x)\longrightarrow f(x)=\begin{cases} & \\ 0 & \text{αν } x\notin Q \end{cases}$$

Η θεωρία Lebesgue ορίζει έναν ευρύτερο διανυσματικό χώρο $\mathcal{L}[a,b] \geq R[a,b]$, όπου $R[a,b]$ ο διανυσματικός χώρος των Riemann ολοκληρωσίμων, και ένα τρόπο ολοκλήρωσης στον $\mathcal{L}[a,b]$ ο οποίος περιορισμένος στις Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις του $R[a,b]$ δίνει ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα με το Riemann ολοκλήρωμα.

Μετρήσιμες συναρτήσεις

• Αν $M \notin \mathcal{M}$ τότε δεν είναι εφικτό να έχουμε την αναμενόμενη συμπεριφορά



για το ολοκλήρωμα της $\chi_M(x)=\begin{cases}1 & x\in M\\ 0 & x\notin M,\end{cases}$ αφού θα θέλαμε $\int \chi_M = \mu(M)\cdot 1$, αλλά το $\mu(M)$ δεν έχει νόημα, αφού $M\notin\mathcal{M}$.

Ο επόμενος ορισμός διασφαλίζει ότι τέτοιες συναρτήσεις δεν θα είναι επιλέξιμες για ολοκλήρωση:

Ορισμός Η $f: A \longrightarrow \tilde{\mathbb{R}}\ (=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\})$ λέγεται ______ στο A αν $\forall\, a\in\mathbb{R}$ το σύνολο

$$f^{-1}((a,+\infty]) = \{x\in A:\ f(x)>a\} =: \{f>a\} \qquad (*)$$

είναι μετρήσιμο.

Με αυτόν τον ορισμό, πράγματι, αν $M\notin\mathcal{M}$ η χ_M δεν είναι ______ διότι $M=\{x: \quad \tfrac{1}{2}\}$ και άρα η χ_M θα αποκλειστεί από το ολοκλήρωμα.

Layer Cake Representation Ένας λόγος πού τα σύνολα στην $(*)$ πρέπει να υποτεθούν μετρήσιμα είναι ο εξής: $\boxed{\text{Ας υποθέσουμε } f(x)\geq 0}$

$$\chi_{\{z:\ f(z)>t\}}(x) = 1 \iff f(x)>t \iff t\in[0,f(x)] \iff \chi_{[0,f(x)]}(t)=1$$

Άρα $$\int_0^\infty \chi_{\{z:\ f(z)>t\}}(x)\,dt = \int_0^{f(x)} 1\,dt = f(x)$$

Άρα αν θα θέλουμε στο μέλλον να έχουμε ελπίδες να λειτουργεί η αλλαγή σειράς στην ολοκλήρωση, για να ορίζεται το $\int_{\mathbb{R}} f(x)$ πρέπει να υπάρχει το $\int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \chi_{\{z:\ f(z)>t\}}(x)\, dt\, dx ==$

<u>θα θέλουμε να ισούται με</u> $\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \chi_{\{z:\ f(z)>t\}}(x)\, dx\, dt$

$$= \int_0^\infty \mu\{z:\ f(z)>t\}\, dt.$$

Για να έχει νόημα αυτό τα σύνολα $\{z:\ f(z)>t\}$ πρέπει να είναι μετρήσιμα. δηλ. $\overset{\text{πρέπει}}{\vee}$ $\{z:\ f(z)>t\} \in \mathfrak{M}$ $\forall t$.

<u>Άσκηση</u>: $\forall p>0$ $\forall f: \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ ισχύει
$$f^p(x) = \int_0^\infty p\, t^{p-1} \chi_{\{f>t\}}(x)\, dt.$$

<u>Ορισμός</u> Αν $f_n : A \to \tilde{\mathbb{R}}$ ορίζουμε

$$\left(\sup_n f_n\right)(x) = \sup\{f_n(x) : n=1,2,\dots\}$$

$$\left(\inf_n f_n\right)(x) = \inf\{f_n(x) : n=1,2,\dots\}$$

$$\left(\limsup_n f_n\right)(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x) \overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} f_k(x)\right) \overset{(*)}{=} \inf_n\left(\sup_{k\geq n} f_k(x)\right)$$

$$\left(\liminf_n f_n\right)(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} f_k(x)\right) = \sup_n\left(\inf_{k\geq n} f_k(x)\right)$$

(*) $\sup_{k\geq n} f_k(x)$ $\quad\_\_\_\quad$ $\sup_{k\geq n+1} f_k(x)$ άρα η ακολουθία

$\left(\sup_{k\geq n} f_k(x)\right)_{n=1}^\infty$ είναι ______ άρα έχει όριο

το $\inf_n$ της.

Αν τα $\liminf f_n$ & $\limsup f_n$ συμπίπτουν τότε η (1)

$$f = \liminf f_n = \limsup f_n$$ είναι το όριο της f_n στο A. (2)

Πχ $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;:\; f_n(x) = (-1)^n x^n$ (3)

$$\limsup f_n(x) = \begin{cases} +\infty & x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \quad (4) \\ 1 & x = \pm 1 \quad (5) \\ 0 & x \in (-1, 1) \quad (6) \end{cases}$$

$$\liminf f_n(x) = \begin{cases} -\infty & x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \quad (7) \\ -1 & x = \pm 1 \quad (8) \\ 0 & x \in (-1, 1) \quad (9) \end{cases}$$