

Μάθημα 15

Η ανάγκη επέκτασης του ολοκληρώματος Riemann.

Δύο από τις βασικές αδυναμίες του ολοκληρώματος Riemann (1)

είναι

(1) Δεν ~~πρέπει~~ είναι ολοκληρώσιμες μη γραμμικές συναρτήσεις (2)

$$\text{όπως η } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \text{παράδειγμα που η} \quad (3)$$

αντιπαράγωγος \sqrt{x} έχει νόημα από 0 έως 1 (5)

(2) Υπάρχει ακολουθία Riemann ολοκληρώσιμων με $f_n \rightarrow f$ (6)

και f όχι Riemann ολοκληρώσιμη. Πχ (7)

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in Q_n = \{q_1, \dots, q_n\} \\ 0 & \text{αν } x \notin Q_n \end{cases} \quad \text{όπου } Q = \{q_1, q_2, \dots\} \quad (8)$$

$$f_n(x) \rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad (10) \quad (11)$$

Η θεωρία Lebesgue ορίζει έναν ευρύτερο διασυστακτικό χώρο (12)

$$\mathcal{L}[a, b] \supseteq \mathcal{R}[a, b], \quad \text{όπου } \mathcal{R}[a, b] \text{ ο διασυστακτικός χώρος} \quad (13)$$

των Riemann ολοκληρώσιμων, ~~και ο Riemann ολοκληρώσιμος~~ και ένα τρόπο (14)

ολοκλήρωσης στον $\mathcal{L}[a, b]$ ο οποίος περιλαμβάνει στο (15)

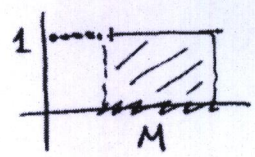
Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις του $\mathcal{R}[a, b]$ δίνει (16)

ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα με το Riemann ολοκλήρωμα.

ΜΕΤΡΗΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

• Αν $M \notin \mathcal{M}$ τότε δεν είναι εφικτό να έχουμε την (1)

αναμενόμενη συμπεριφορά



για το ολοκλήρωμα (2)

ως $\chi_M(x) = \begin{cases} 1 & x \in M \\ 0 & x \notin M \end{cases}$ αφού θα δεχάμε $\int \chi_M = \mu(M) - 1$, (3)

αλλά το $\mu(M)$ δεν έχει νόημα, αφού $M \notin \mathcal{M}$. (4)

Ο επόμενος ορισμός διασφαλίζει ότι τέτοιες συναρτήσεις δεν θα (5)

είναι επιλέξιμες για ολοκλήρωση: (6)

Ορισμός Η $f: A \rightarrow \tilde{\mathbb{R}} (= \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$ λέγεται μετρήσιμη (7)

εάν A αν $\forall a \in \mathbb{R}$ το σύνολο (8)

$$f^{-1}((a, +\infty]) = \{x \in A : f(x) > a\} =: \{f > a\} \quad (\ast) \quad (9)$$

είναι μετρήσιμο (10)

Με αυτόν τον ορισμό, πράγματι, αν $M \notin \mathcal{M}$ η χ_M δεν είναι (11)

μετρήσιμη διότι $M = \{x : \chi_M(x) > \frac{1}{2}\}$ και αφού η χ_M θα αποκλειστεί (12)

από το ολοκλήρωμα. (13)

Layer Cake Representation Ένας λόγος που τα συνόλα (14)

στην (\ast) πρέπει να υποσυνόλα είναι ο εξής: $\frac{\text{Ασυνόλεση}}{f(x) \geq 0}$ (15)

$$\chi_{\{z: f(z) > t\}}(x) = 1 \iff f(x) > t \iff t \in [0, f(x)] \iff \int_{[0, f(x)]} 1 dt = 1 \quad (16)$$

Άρα $\int_0^\infty \chi_{\{z: f(z) > t\}}(x) dt = \int_0^{f(x)} 1 dt = f(x)$ (17)

Άρα αν θα θέλαμε στο μέλλον να έχουμε ελαστές να λειτουργεί (1) ή αλλιώς βήμας στην ομοιογένεια, για να ορίσουμε το $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx$

πρέπει να υπάρξει το $\int_{\mathbb{R}} \int_0^{\infty} \chi_{\{z: f(z) > t\}}(x) dt dx =$ (3)

θα θέλαμε να ισούσαμε $\int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_{\{z: f(z) > t\}}(x) dx dt$ (4)

$= \int_0^{\infty} \mu\{z: f(z) > t\} dt.$ (5)

Για να έχει νόημα αυτό το σύνολο $\{z: f(z) > t\}$ πρέπει (6)

να είναι μετρήσιμα. δηλ. $\mu\{z: f(z) > t\} \in \mathcal{M} \forall t.$ (7)

Άσκηση: $\forall p > 0 \forall f: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ ισχύει $\| f(x)^p = \int_0^{\infty} p t^{p-1} \chi_{\{f > t\}}(x) dt \|$ (8)

Ορισμός Αν $f_n: A \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζουμε (9)

$(\sup_n f_n)(x) = \sup \{f_n(x) : n=1, 2, \dots\}$ (10)

$(\inf_n f_n)(x) = \inf \{f_n(x) : n=1, 2, \dots\}$ (11)

$(\limsup_n f_n)(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{(10)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} f_k(x) \right) \stackrel{(11)}{=} \inf_n \left(\sup_{k \geq n} f_k(x) \right)$ (12)

$(\liminf_n f_n)(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{k \geq n} f_k(x) \right) = \sup_n \left(\inf_{k \geq n} f_k(x) \right)$ (13)

(*) $\sup_{k \geq n} f_k(x) \geq \sup_{k \geq n+1} f_k(x)$ από η ακριβώς (14)

$\left(\sup_{k \geq n} f_k(x) \right)_{n=1}^{\infty}$ είναι φθίνουσα από έχει όριο (15)

το $\inf_n \dots$ (16)

Av za $\liminf f_n$ 5 $\limsup f_n$ cyfnwrdd wrt n (1)

$f = \liminf f_n = \limsup f_n$ eiddo 20 φ_{10} 795 f_n $\in A$. (2)

Π_x $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f_n(x) = \begin{cases} (-1)^n x^n & x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ 1 & x = \pm 1 \\ 0 & x \in (-1, 1) \end{cases}$ (3)

$$\limsup f_n(x) = \begin{cases} +\infty & x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) & (4) \\ 1 & x = \pm 1 & (5) \\ 0 & x \in (-1, 1) & (6) \end{cases}$$

$$\liminf f_n(x) = \begin{cases} -\infty & x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) & (7) \\ -1 & x = \pm 1 & (8) \\ 0 & x \in (-1, 1) & (9) \end{cases}$$