Μάθημα 17

Θεώρημα Αν $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ μετρήσιμες με κοινό πεδίο ορισμού και τιμές στο $\tilde{\mathbb{R}}$ τότε και οι $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_n f_n$, $\liminf_n f_n$ είναι μετρήσιμες

Απόδειξη $\{x : \sup_n f(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \qquad \in \mathcal{M}$

$\{x : \inf_n f(x) \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \qquad \in \mathcal{M}$

$\liminf_n f_n = \lim_{m\to\infty} \left(\inf_{n\geq m} f_n\right)$ $\quad \underline{\underline{(\inf_{n\geq m} f_n)_{m=1}^{\infty} \uparrow}}$ μετρ.

Ομοίως $\limsup_n f_n = \lim_{m\to\infty} \left(\sup_{n\geq m} f_n\right)$ $\quad \underline{\underline{(\sup_{n\geq m} f_n)\downarrow}}$ μετρ.

Ορισμός Θα λέμε ότι μιά ιδιότητα $p(x)$ για $x\in A$, $A\in\mathcal{M}$ ισχύει **σχεδόν παντού** και θα γράφουμε «$p(x)$ σ.π.» αν

$\mu\{x : \neg p(x)\} = 0.$

Πχ. Αν $f, g : A \to \tilde{\mathbb{R}}$ μετρήσιμες τότε η φράση «$f=g$ σ.π.» σημαίνει $\mu\{x\in A : f(x)\neq g(x)\} = 0$. Λέμε ότι η f και g είναι σχεδόν παντού ίσες

Πχ. $f, g : A \to \tilde{\mathbb{R}}$ μετρήσιμες, τότε η φράση «$f>g$ σ.π.» σημαίνει

$\mu \qquad = 0.$

Πρόταση Αν $f=g$ σ.π. και f μετρήσιμη τότε g μετρήσιμη

Απόδειξη (απλούστερη από το βιβλίο). Θέτουμε $E=\{x : f(x)=g(x)\}$. $\mu(E^c)=0$ αφού $f=g$ σ.π. άρα $E\in\mathcal{M}$.

$$\{x : g(x) > a\} = \underbrace{\{x \in E : g(x) > a\}}_{\displaystyle \| } \cup \underbrace{\{ \qquad \}}_{\subseteq E^c}$$

άρα εξ. μέτρου 0

άρα ανήκει στην $\mathcal{M}$

$$\{x \in E : f(x) > a\} = \{x : f(x) > a\} \cap E \in \mathcal{M} \quad \blacksquare$$

<u>Πόρισμα</u> Αν $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ μετρήσιμες με κοινό πεδίο ορισμού & τιμές στο $\tilde{\mathbb{R}}$, και η f έχει το ίδιο πεδίο ορισμού & $f_n \longrightarrow f$ σ.π. Τότε και η f είναι μετρήσιμη.

<u>Απόδειξη</u> Το $\limsup\limits_n f_n(x)$ υπάρχει πάντα στο $\tilde{\mathbb{R}}$ και ορίζει μια μετρήσιμη συνάρτηση. Αλλά $\limsup\limits_n f_n(x) = f(x)$ σ.π. Άρα f μετρήσιμη.

<u>Άσκηση 7.2.1</u> $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη & $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής.
Δείξτε ότι $g \circ f$ μετρήσιμη

<u>Λύση</u> $(g \circ f)^{-1}(a\ \infty) = \quad (\ \ (a\ \infty))$. Αφού

g συνεχής $\Rightarrow$ $g^{-1}(a\ \infty)$ ______ Άρα υπάρχουν

ξένα (a_n, b_n) διαστήματα $n = 1, 2, \ldots$ ώστε $g^{-1}(a\ \infty) = \bigcup\limits_{1}^{\infty}(a_n\ b_n)$

Άρα $f^{-1}(g^{-1}(a\ b)) = \qquad \qquad = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}$

$$= \bigcup_{1}^{\infty} f^{-1}(\qquad \infty] \setminus \qquad \infty]) = \bigcup_{1}^{\infty} (\qquad \qquad)$$

$$\in \mathcal{M} \qquad (f^{-1}(a_n\ \infty] \setminus f^{-1}[b_n\ \infty] = \{x\ f(x) > a_n\} \setminus \{x : f(x) \geq b_n\})$$

<u>Παρατήρηση</u> Η σύνθεση μετρήσιμων <u>ΔΕΝ</u> είναι απαραίτητα μετρήσιμη διότι ο ορισμός της μετρησιμότητας είναι $f^{-1}(a\ \infty] \in \mathcal{M}$ άρα $f^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \subseteq \mathcal{M}$. Όμως δεν ξέρουμε ότι $g^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \subseteq \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ για να συμπεραίνουμε $f^{-1}(g^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}})) \subseteq \mathcal{M}$

Άσκηση 7.2.2 Αν $f:\mathbb{R}\to\tilde{\mathbb{R}}$ & $f^{-1}((r\ \infty])\in\mathcal{M}\ \ \forall r\in\mathbb{Q}$

τότε f μετρήσιμη

Λύση Έστω $r_n\to a^+$ $\quad r_n\in\mathbb{Q}$ $\quad$ (π.χ. $r_n=$ ______)

$\blacksquare$

Τότε $(a\ \infty]=$

Άσκηση 7.2.3 Το $\sup f_i$, $i\in I$, με I υπεραριθμήσιμο ΔΕΝ είναι απαραίτητα μετρήσιμη ακόμα & αν όλες οι f_i είναι.

Λύση Έστω ότι το A είναι ένα ΜΗ-μετρήσιμο $\subseteq[0,1]$

$\forall i\in A$ θέτουμε $f_i(x)=\chi_{\{i\}}(x)=\begin{cases}1 & \text{αν } x=i\\ 0 & \text{αν } x\neq i\end{cases}$

Η f_i είναι μετρήσιμη (γιατί;) Αλλά

$\sup_{i\in A} f_i(x)=\chi_A(x)$ όχι μετρήσιμη (αφού $\{x:\chi_A(x)>\frac{1}{2}\}=A\notin\mathcal{M}$)

$\blacksquare$

Άσκηση 7.2.4 Αν $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχείς & $f=g$ σ.π.

$\Rightarrow f=g$

Λύση $\mu\{x: f(x)\neq g(x)\}=$ $\qquad$ αφού αν $x\in A$

$\forall\varepsilon>0$ $\quad(x-\varepsilon,\ x+\varepsilon)$ $\qquad A$. Συνεπώς για $\varepsilon=\frac{1}{n}$

$\exists\ x_n\in(x-\frac{1}{n},\ x+\frac{1}{n})\setminus A$. Οπότε $x_n\to$ $\qquad$ και αφού f,g

συνεχείς $\quad f(x)=\lim_{n\to\infty}$ $\qquad \overset{x_n\notin A}{=\!=\!=}\ \lim_{n\to\infty}$ $\qquad =$ $\qquad$ άτοπο

Άρα $\quad A=\emptyset$ $\blacksquare$

Ασκ 7.2.5 Δώστε παράδειγμα $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ασυνεχής $\forall x\in\mathbb{R}$ ώστε $f=g$ σ.π.

Λύση $\quad f(x)=1$ $\qquad g(x)=$

$\blacksquare$

Ασκηση 7.2.6 Δείξτε ότι αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ αύξουσα τότε f μετρήσιμη

Λύση Αρκεί να δείξω ότι το $f^{-1}((a\ \infty))$ είναι διάστημα (οπότε $\in \mathcal{M}$)

Ισχυρισμός Το $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι διάστημα αν-ν $\forall x, y \in I$ αν $z \in \mathbb{R}$ με $x < z < y \implies z \in I$

["$\Rightarrow$" προφανές.
"$\Leftarrow$" Από την υπόθεση $\forall x, y \in I \implies [x, y] \subseteq I$. Θέτω $x_0 = \inf I$ & $y_0 = \sup I$. Εφαρμόζοντας τον ορισμό του inf & sup βρίσκουμε $x_n \downarrow x_0$ & $y_n \uparrow y_0$ με $x_n, y_n \in I$

Άρα $[x_n\ y_n] \subseteq I$ $\forall n \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} [x_n\ y_n] \subseteq I \implies$

$\implies (x_0\ y_0) \subseteq I \subseteq [x_0\ y_0]$ Άρα I διάστημα]

Αν τώρα $x, y \in f^{-1}(a\ \infty)$ & $x < y$ & $x < z < y$

Τότε $f(x) < f(z)$ διότι

άρα $f(z) > a \implies z \in f^{-1}(a\ \infty)$

Συνεπώς, από τον ισχυρισμό, το $f^{-1}(a\ \infty)$ είναι διάστημα. ∎