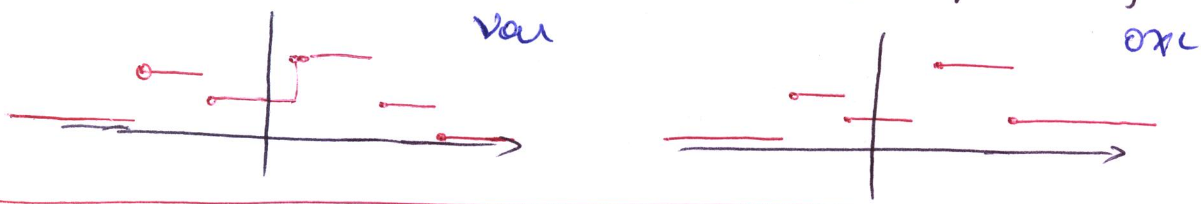
Μάθημα 19

Ολοκλήρωμα απλών συναρτήσεων

Στα παρακάτω θα θεωρούμε ότι $\overbrace{}^{\text{για } \varphi \text{ απλή}}$ $\mu\{x : \varphi(x) \neq 0\} < \infty$



Ορισμός (i) Θεωρούμε μια απλή μετρήσιμη συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και έστω ότι $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ η κανονική αναπαράσταση της φ. Ορίζουμε το ολοκλήρωμα *Lebesgue* της φ να είναι ο αριθμός $\int \varphi \in \mathbb{R}$ με $\int \varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)$ (όπου $0 \cdot \infty = 0$)

(ii) Αν $\varphi : A \to \mathbb{R}$ απλή μετρήσιμη ορίζουμε $\int \varphi = \int \tilde{\varphi}$

με $\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{αν } x \in A \\ 0 & \text{αν } x \notin A. \end{cases}$

(iii) Αν $\varphi : A \to \mathbb{R}$ απλή μετρήσιμη, ~~ορίζουμε~~ και $E \subseteq \mathbb{R}$ E μετρήσιμο, ορίζουμε $\int_E \varphi = \int \tilde{\varphi} \chi_E$

Πρόταση Αν φ, ψ απλές μετρήσιμες συναρτήσεις και $s, t \in \mathbb{R}$

(i) $\int (s\varphi + t\psi) = s \int \varphi + t \int \psi$ (ii) Αν $\varphi \leq \psi$ σ.π. $\Rightarrow \int \varphi \leq \int \psi$

Απόδειξη (i) Έστω ότι $\varphi = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}$ & $\psi = \sum_{j=1}^{n} b_j \chi_{B_j}$ κανονικές αναπαραστάσεις των φ, ψ. Για $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ θέτουμε $C_{ij} = A_i \cap B_j$ ($m \times n$ σύνολα)

C_{ij} ξένα ανά δύο: Αν $(i,j)\neq(k,\ell)$ είτε (1)

$i\neq k$ οπότε (2)

$$\left.\begin{array}{l} C_{ij}\subseteq A_i \\ C_{k\ell}\subseteq A_k \\ A_i, A_k \text{ ξένα} \end{array}\right\} \Longrightarrow C_{ij}, C_{k\ell} \text{ ξένα}$$ (3) (4)

είτε $i=k$ και $j\neq\ell$ οπότε (5)

$$\left.\begin{array}{l} C_{ij}\subseteq B_j \\ C_{k\ell}\subseteq B_\ell \\ B_j, B_\ell \text{ ξένα} \end{array}\right\} \Longrightarrow C_{ij}, C_{k\ell} \text{ ξένα.}$$ (6) (7)

Επειδή $A_i = A_i\cap\mathbb{R} = A_i\cap\left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right) = \bigcup_{j=1}^{n}(A_i\cap B_j) = \bigcup_{j=1}^{n} C_{ij}$ (8)

και $B_j = \qquad = \qquad = \qquad = \bigcup_i$ (9)

Από την προσθετικότητα του μέτρου $s\int\varphi + t\int\psi =$ (10)

$= \qquad\qquad =$ (11)

$= \sum_{i,j}(sa_i+tb_j)\,\mu(C_{ij})$. Ενώ $s\varphi+t\psi = \sum_{i,j}(sa_i+tb_j)\,\chi_{C_{ij}}$ (12)

$\Rightarrow \int(s\varphi+t\psi) = \sum_{i,j}(sa_i+tb_j)\,\mu(C_{ij}) = s\int\varphi+t\int\psi.$ (13)

(ii) $\varphi\leq\psi \Rightarrow 0\leq\psi-\varphi = \sum_j b_j\chi_{B_j} - \sum_i a_i\chi_{A_i} \overset{(8),(9)}{=}$ (14)

$$= \sum_{j=1}^{n} b_j\,\chi_{\bigcup_{i=1}^{m} C_{ij}} - \sum_{i=1}^{m} a_i\,\chi_{\bigcup_{j=1}^{n} C_{ij}} =$$ (15)

$$= \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{i=1}^{m}\chi_{C_{ij}} - \sum_{i=1}^{m} a_i\sum_{j=1}^{n}\chi_{C_{ij}} =$$ (16)

$$= \sum_{i,j}(b_j-a_i)\,\chi_{C_{ij}}$$ (17)

Αφού $\psi - \varphi \geq 0$ σ.π. αν τύχουν $b_j - a_i < 0 \Rightarrow \mu(C_{ij}) = 0$ (1)

Άρα $\int (\psi - \varphi) = \sum_{i,j} (b_j - a_i)\mu(C_{ij}) = \sum_{\{i,j \,:\, b_j - a_i \geq 0\}} (b_j - a_i)\mu(C_{ij}) \geq 0$ (2)

$\Rightarrow \int \psi - \int \varphi \geq 0 \Rightarrow \int \varphi \leq \int \psi$ ■ (3)

<u>Πόρισμα</u> Αν φ, ψ απλές μετρήσιμες και $\varphi = \psi$ σ.π. $\Rightarrow \int \varphi = \int \psi$ (4)

<u>Απόδειξη</u>
$$\left.\begin{array}{l} \varphi = \psi \text{ σπ} \Rightarrow \varphi \leq \psi \text{ σπ} \Rightarrow \int \varphi \leq \int \psi \quad (5) \\ \varphi = \psi \text{ σπ} \Rightarrow \varphi \geq \psi \text{ σπ} \Rightarrow \int \varphi \geq \int \psi \quad (6) \end{array}\right\} \Rightarrow \int \varphi = \int \psi \quad ■ \quad (7)$$

Ορισμός ολοκληρώματος για φραγμένες & μετρήσιμες συναρτήσεις

<u>Ορισμός</u> Έστω οι $f : A \to \mathbb{R}$ $\boxed{\text{φραγμένη}}$ μετρήσιμη με $\underline{\mu(A) < \infty}$ (8)

Ορίζουμε το ολοκλήρωμα της f στο A να είναι ο αριθμός (9)

$$\int_A f = \sup\left\{ \int_A \varphi \;:\; \varphi \text{ απλή, μετρήσιμη με } \varphi \leq f \right\} \quad (10)$$

<u>Παρατήρηση</u> Αν $\varphi \leq f$ σπ θέτουμε $\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{αν } \varphi(x) \leq f(x) \quad (11) \\ \underbrace{\inf f(x)}_{\in \mathbb{R} \text{ αφού } f \text{ φραγμένη}} & \text{αν } \varphi(x) > f(x) \quad (12) \end{cases}$ (13)

Η ψ είναι απλή μετρήσιμη, $\psi \leq f$ (παντού) (14)

και $\int \varphi = \int \psi$ γιατί $\varphi = \psi$ σπ. Άρα (15)

$$\int_A f = \sup\left\{ \int_A \varphi \;:\; \varphi \text{ απλή, μετρήσιμη με } \varphi \leq f \text{ σπ} \right\} \quad (16)$$

Το παρακάτω μας δείχνει ότι θα μπορούσαμε να έχουμε θέσει $\int_A f = \inf\left\{ \int_A \psi \ : \ \psi \text{ απλή μετρήσιμη}, \ \psi \geq f \right\}$

<u>Θεώρημα</u> Έστω ότι $f : A \to \mathbb{R}$ φραγμένη $\mu(A) < \infty$
Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(i) f μετρήσιμη

(ii) $\sup\limits_{\varphi \leq f} \int_A \varphi = \inf\limits_{\psi \geq f} \int_A \psi$ $\quad \varphi, \psi$ μετρήσιμες απλές

<u>Απόδειξη</u> (ii) $\Rightarrow$ (i) παραλείπεται

(i) $\Rightarrow$ (ii) Αν $|f| \leq M$ θέτω $A_k = \left\{ x : \frac{(k-1)M}{n} < f(x) \leq \frac{kM}{n} \right\}$

Αυτά είναι ξένα με ένωση το A.

Θέτω $\varphi_n = \sum\limits_{k=-n}^{n} \frac{(k-1)M}{n} \chi_{A_k}$ & $\psi_n = \sum\limits_{k=-n}^{n} \frac{kM}{n} \chi_{A_k}$

Οπότε φ_n, ψ_n απλές και $\varphi_n \leq f \leq \psi_n \ \forall n$

Έτσι $\inf\limits_{\psi \geq f} \int \psi \leq \int \psi_n = \frac{M}{n} \sum\limits_{k=-n}^{n} k \mu(A_k)$

$\sup\limits_{\varphi \leq f} \int \varphi \geq \int \varphi_n = \frac{M}{n} \sum\limits_{k=-n}^{n} (k-1) \mu(A_k)$

Άρα

$$0 \leq \inf_{\psi \geq f} \int \psi - \sup_{\varphi \leq f} \int \varphi \leq \int \psi_n - \int \varphi_n =$$

$$= \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} k\mu(A_k) - (k-1)\mu(A_k) = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} \mu(A_k)$$

$$= \frac{M}{n} \mu(A) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad \text{αφού } \mu(A) < \infty$$

Άρα $\inf\limits_{\psi \geq f} \psi = \sup\limits_{\varphi \leq f} \int \varphi$ ∎