Μάθημα 20

Πρόταση Θεωρούμε δύο φραγμένες, μετρήσιμες συναρτήσεις $f,g:E\to\mathbb{R}$ με
$\mu(E)<\infty$

(i) $\forall\, a,b\in\mathbb{R}$ $\quad \int_E (af+bg) = a\int_E f + b\int_E g$

(ii) Αν $f=g$ σπ $\Rightarrow \int_E f=\int_E g$

(iii) Αν $f\le g$ σπ $\Rightarrow \int_E f\le \int_E g$. Επιπλέον $\left|\int_E f\right|\le \int_E |f|$

(iv) Αν $m,M\in\mathbb{R}$ με $m\le f(x)\le M \Rightarrow m\cdot\mu(E)\le \int_E f\le M\mu(E)$

(v) A,B ξένα υποσύνολα του $E \Rightarrow \int_{A\cup B} f = \int_A f+\int_B f$

Απόδειξη (i) Αν $a=0 \Rightarrow a\int f = 0 = \int 0f$. Αν $a\neq 0$

η φ απλή $\Rightarrow a\cdot\varphi$ απλή.

- $a>0$: $\displaystyle \int_E af = \sup_{\substack{\varphi\le af\\ \varphi \text{ απλή}}} \int\varphi = \sup_{a^{-1}\varphi\le f}\int\varphi \overset{\psi=a^{-1}\varphi}{=\!=} \sup_{\psi\le f}\int a\psi = \sup_{\psi\le f} a\int\psi = a\sup_{\psi\le f}\int\psi = a\int f$

- $a<0$: $\displaystyle \int_E af = \sup_{\varphi\le af}\int\varphi = \sup_{a^{-1}\varphi\ge f}\int\varphi \overset{\psi=a^{-1}\varphi}{=\!=} \sup_{\psi\ge f}\int a\psi = \sup_{\psi\ge f} a\int\psi = a\cdot\inf_{\psi\ge f}\int\psi = a\int f$

Αν ψ_1 απλή & $f\le\psi_1$, ψ_2 απλή & $g\le\psi_2 \Rightarrow \psi_1+\psi_2$ απλή

& $f+g\le\psi_1+\psi_2 \Rightarrow \int(f+g)\le\int(\psi_1+\psi_2)=\int\psi_1+\int\psi_2$

και παίρνοντας $\displaystyle\inf_{\psi_1\ge f}$ & $\displaystyle\inf_{\psi_2\ge g} \Rightarrow \int(f+g)\le\int f+\int g$

~~Αντίστροφα~~ Αν φ_1 απλή $\le f$ και φ_2 απλή $\le g \Rightarrow \varphi_1+\varphi_2$ απλή $\le f+g$

$\Rightarrow \int\varphi_1+\int\varphi_2 = \int(\varphi_1+\varphi_2)\le\int(f+g)$

σελ 2

παίρνοντας $\sup\limits_{\varphi_1 \le f}$ & $\sup\limits_{\varphi_2 \le g}$ $\Rightarrow \int f + \int g \le \int (f+g)$ (1)

Άρα $\int (f+g) = \int f + \int g$ (2)

(ii) Από το (i) αρκεί $\int (f-g) = 0$. (3)

Αλλά $f = g$ σ.π. $\Rightarrow f-g = 0$ σ.π. Άρα αν ψ απλή $\ge f-g$ (4

$\Rightarrow \psi \ge 0$ σ.π. $\Rightarrow \int \psi \ge 0 \Rightarrow \inf\limits_{\psi \ge f-g} \int \psi \ge 0 \Rightarrow$ (5

$\Rightarrow \int (f-g) \ge 0$ (6)

Αν $\varphi \le f-g \Rightarrow \varphi \le 0$ σ.π. $\Rightarrow \int \varphi \le 0 \Rightarrow \sup\limits_{\varphi \le f-g} \int \varphi \le 0$ (7

$\Rightarrow \int (f-g) \le 0$ (8)

Άρα $\int (f-g) = 0$ (9)

(iii) $g-f \ge 0$ σ.π. Άρα αν ψ απλή $\ge g-f \Rightarrow \psi \ge 0$ σ.π. (10)

$\Rightarrow \int \psi \ge 0 \Rightarrow \inf\limits_{\psi \ge g-f} \psi \ge 0 \Rightarrow \int (g-f) \ge 0$ (11)

$\Rightarrow \int f \le \int g$.

$$\left.\begin{array}{l} f \le |f| \\ -f \le |f| \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \int f \le \int |f| \\ -\int f \le \int |f| \end{array}\right\} \Rightarrow \left| \int f \right| \le \int |f| \quad (12)$$

(iv) $m \le f \le M \Rightarrow \underset{= m\int \chi_E}{\int_E m} \le \int_E f \le \underset{= M\int \chi_E}{\int_E M} \Rightarrow m\,\mu(E) \le \int f \le M\,\mu(E)$ (1

(v) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{\emptyset} = \chi_A + \chi_B \Rightarrow \chi_{A\cup B} \cdot f = \chi_A f + \chi_B f$ (1

$\Rightarrow \int \chi_{A\cup B} f = \int \chi_A f + \int \chi_B f \Rightarrow \int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f$ (15)

Λήμμα (αρχή του Littlewood)

Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$, $\mu(E) < \infty$, $f_n : E \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες, $f_n \to f : E \to \mathbb{R}$

Τότε $\forall \varepsilon > 0$ $\forall \delta > 0$ υπάρχει μετρήσιμο $A \subseteq E$ με $\mu(A) < \delta$

και υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall x \in E \setminus A$ $\forall n \geq n_0$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Απόδειξη Θέτουμε $G_k = \{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$ και

$$E_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} G_k = \{x \in E : \exists\, k \geq n \text{ ώστε } |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$$

$E_n \downarrow$. $\forall x \in E$ επειδή $f_n(x) \to f(x)$ μετά από κατάλληλο δείκτη n_0 θα ισχύει $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

$$\text{Άρα} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$$

Αφού $\mu(E) < \infty \Rightarrow \mu(E_n) < \infty$ άρα $0 = \mu(\emptyset) =$
$= \mu\left(\bigcap_1^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$. Συνεπώς $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$
ώστε $\forall n \geq n_0$ $\mu(E_n) < \delta$. Θέτουμε $A = E_{n_0}$
οπότε αν $x \in E \setminus A \Rightarrow x \notin E_{n_0} \Rightarrow \forall k \geq n_0$ $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ ∎

Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης **1η Μορφή**

Έστω οι f_n μετρήσιμες στο $E \subseteq \mathbb{R}$ με $\mu(E) < \infty$
& $\exists\, M > 0$: $|f_n(x)| \leq M$ $\forall n$ $\forall x \in E$.

Αν $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in E$ τότε $\int f_n \to \int f$

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int \lim_{n\to\infty} f_n$$

<u>Απόδειξη</u> Από την αρχή του Littlewood $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ (1)

η $A \subseteq E$ με $\mu(A) < \frac{\varepsilon}{4M}$ ώστε $\forall n \geq n_0$ $\forall x \in E \setminus A$ (2)

$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2\mu(E)}$. Οπότε (3)

$$\left| \int f_n - \int f \right| \leq \int |f_n - f| = \int_A |f_n - f| + \int_{E\setminus A} |f_n - f| \quad (4)$$

$$\leq \int_A 2M + \int_{E\setminus A} \frac{\varepsilon}{2\mu(E)} \quad (5)$$

$$< 2M \frac{\varepsilon}{4M} + \int_E \frac{\varepsilon}{2\mu(E)} \quad (6)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \blacksquare \quad (7)$$

$$|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq M + |f| \leq M + M = 2M$$

$(5) \Rightarrow (6)$ $\displaystyle\int_{E\setminus A} \frac{\varepsilon}{2\mu(E)} = \int_E \frac{\varepsilon}{2\mu(E)} \chi_{E\setminus A} \leq \int_E \frac{\varepsilon}{2\mu(E)} \cdot 1$