Μάθημα 21

Το ολοκλήρωμα μιας μη-αρνητικής συνάρτησης

(όχι απαραίτητα φραγμένης ούτε ορισμένης σε σύνολο με πεπερασμένο μέτρο)

<u>Ορισμός</u> Αν $f \geq 0$ μετρήσιμη & ορισμένη στο μετρήσιμο E

Ορίζουμε

$$\int_E f = \sup\left\{ \int_E h \ : \ h \leq f, \ h \text{ φραγμένη μετρήσιμη με } \mu\{x : h(x) \neq 0\} < \infty \right\}$$

$$= \sup\left\{ \int_E h : \ h \leq f \text{ σ.π. } h \text{ φραγμένη μετρήσιμη με } \mu\{x : h(x) \neq 0\} < \infty \right\}$$

<u>Παρατήρηση</u> Αν $F \subseteq E$ μετρήσιμο, τότε $\int_E f\chi_F = \int_F f$ διότι

$$\int_F f \overset{\text{ορσ}}{=\!=\!=} \sup_{h \leq f|_F} \int_F h = \sup_{h \leq f\chi_F} \int_F h \quad \text{γιατί}$$

(i) αν $h \leq f|_F \Rightarrow h\chi_F \leq f\chi_F$ & η $h\chi_F$ είναι πάλι μετρήσιμη, φραγμένη με $\mu\{(h\chi_F)(x) \neq 0\} < \infty$

(ii) αν h ορισμένη στο E & $h \leq f\chi_F \Rightarrow h \leq f|_F$.

Άρα $$\int_F f = \sup_{h \leq f\chi_F} \int_F h = \sup_{\substack{h \leq f\chi_F \\ \& \ h|_{F^c} = 0}} \int_E h = \int_E f\chi_F$$

<u>Πρόταση</u> Αν f, g μη αρνητικές μετρήσιμες ορισμένες στο μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}$ τότε

(i) $\int_E cf = c\int_E f \quad \forall c > 0$ (ii) $\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g$

(iii) αν $f \leq g$ σ.π. $\Rightarrow \int_E f \leq \int_E g$ (iv) αν $\int_E f = 0 \Rightarrow f = 0$ σ.π. στο E

Απόδειξη (i) $\int_E (cf) = \sup_{h\le cf} \int_E h = \sup_{\frac{1}{c}h\le f} \int_E h$

h μετρήσιμη φραγμένη με $\mu\{x: h(x)\neq 0\}<\infty \iff$

$\frac{1}{c}h$ —״— —״— —״— $\mu\{\cancel{x:}\ \frac{1}{c}h(x)\neq 0\}<\infty$

άρα αντικαθιστώντας με H την $\frac{1}{c}h$ παίρνουμε ότι

$$\int_E (cf) = \sup_{H\le f}\int_E cH = c\sup_{H\le f}\int_E H = c\int_E f.$$

(ii) Αν $h\le f$ και $k\le g \Rightarrow h+k\le f+g \Rightarrow \int_E (h+k)\le \int_E (f+g)$

$\Rightarrow \int_E \quad + \int_E \quad \le \int_E (\quad) \quad \overset{\cancel{\sup}}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow \sup_{h\le f} \quad + \sup_{k\le g}\int \quad \le \int_E (f+g)$

$\Rightarrow \int_E f + \int_E g \le \int_E (f+g)$. Έστω τώρα $l(x)$ φρ. μετρήσιμη

με $l(x)\le (f+g)(x)$ και $\mu\{x: l(x)\neq 0\}<\infty$

Θέτουμε $h(x)=\min\{f(x), l(x)\}$ μετρήσιμη και φραγμένη γιατί

$-\infty < \min\{0, \inf l\}\le h(x)\le l(x)\le \sup l(x)<\infty$

Επιπλέον $\mu\{x: h(x)\neq 0\}\le \mu\{x: l(x)\neq 0\}<\infty$

διότι αν $h(x)\neq 0 \xRightarrow{f\ge 0} l(x)\neq 0$ άρα $\{x: h(x)\neq 0\}\subseteq\{x: l(x)\neq 0\}$.

Συνεπώς $\int_E h \le \int_E f$ από τον ορισμό του $\int_E f$.

Θέτουμε $k(x) = l(x) - h(x)$ φραγμένη ως διαφορά φραγμένων

Αν $h(x) = f(x) \Rightarrow k(x)\le f(x)+g(x)-f(x) = g(x)$

Αν $h(x) = l(x) \Rightarrow k(x) = 0 \le g(x)$

Επιπλέον αν $l(x)=0 \Rightarrow h(x) = \quad \Rightarrow k(x)=0$ Άρα

$\{x: k(x)\neq 0\}\subseteq\{x: l(x)\neq 0\} \Rightarrow \mu\{x: k(x)\neq 0\}<\infty$

Συνεπώς $\int_E k \leq$

Έχουμε $\int_E \ell = \int_E (h+k) = \int_E h + \int_E k \leq \int_E f + \int_E g$

$\Longrightarrow \sup\limits_{\ell \leq (f+g)} \int_E \ell \leq \int_E f + \int_E g \Rightarrow \int_E (f+g) \leq \int_E f + \int_E g$.

(iii) Αν $f \leq g$ σπ & $h \leq f \Rightarrow h \leq g$ σπ. Άρα

$\{h :$ φρ. μετρ. $\leq f$ σπ & $\mu\{x : h(x) \neq 0\} < \infty\}$ $\quad$ $\{h :$ hφρ. μετρ. $\leq g$ σπ $\mu\{x, h(x) \neq 0\} < \infty\}$

$\Rightarrow \{\int h \quad\quad \} \subseteq \{\int h \quad\quad \}$

$\Rightarrow \sup \int h \quad\quad \leq \sup \int h$

$\int_E f \quad\quad \leq \int_E g$

(iv) Θέτουμε $A_n = \{x \in E : f(x) > \frac{1}{n}\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\mu(A_n) > 0$ τότε

$\int_E f \geq \int \quad \geq \int \quad = \quad > 0$ άτοπο

άρα $\mu(A_n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Φανερά $\{x \in E : f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

$\Rightarrow \mu\{x \in E : f(x) > 0\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0$ $\blacksquare$

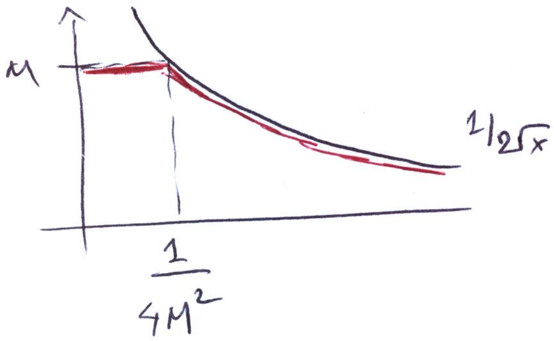
<u>Παράδειγμα</u> Υπολογίστε με τον ορισμό το $\int_{[0,1]} \frac{1}{2\sqrt{x}}$

<u>ορσ</u> $\sup\limits_{\substack{h \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ \{x : h \neq 0\} \leq [0,1]}} \left\{ \int_{[0,1]} h \quad h\text{φρ. μετρ.} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \ \& \ \mu\{x : h(x) \neq 0\} < \infty \right\}$

$\sup \left\{ \int_{[0,1]} h \quad h\text{φρ. μετρ.} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \right\}$

$$\geq \int_{(0,1]} \frac{1}{2\sqrt{x}}\, \chi_{[\frac{1}{n},1]}(x) = \int_{1/n}^{1} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x}\Big|_{1/n}^{1} = \sqrt{1} - \sqrt{1/n}$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 1 \Longrightarrow \boxed{\int_{(0,1]} \frac{1}{2\sqrt{x}} \geq 1}$$



Αν h οποιαδήποτε φρ. μετρ. $\leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$

τότε

$$h(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}\, \chi_{[\frac{1}{4M^2},1]}(x) + M\chi_{(0,\frac{1}{4M^2})}$$

$$\Longrightarrow \int_{(0,1]} h \leq \sqrt{x}\Big|_{1/4M^2}^{1} + M\cdot\frac{1}{4M^2} = 1 - \frac{1}{2M} + \frac{1}{4M}$$

$$= 1 - \frac{1}{4M} \leq 1 \Longrightarrow \sup_{h \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}} \int_{(0,1]} h \leq 1$$

$$\Longrightarrow \boxed{\int_{(0,1]} \frac{1}{2\sqrt{x}} \leq 1.}$$

∎