

Μάθημα 23

Το Ολοκλήρωμα Lebesgue

Ορισμός (γενικός ορισμός) Μια μετρήσιμη συνάρτηση f ορισμένη σε ένα μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται ολοκληρώσιμη στο E αν οι συναρτήσεις f^+ ή f^- είναι ολοκληρώσιμες στο E . Το ολοκλήρωμα της f ορίζεται να είναι ο αριθμός

$$\int_E f =$$

Πρόταση Έστω ότι οι f, g είναι ολοκληρώσιμες στο $E \subseteq \mathbb{R}$

- (i) $\forall c \in \mathbb{R}$ η cf είναι ολοκληρώσιμη ή $\int_E (cf) = c \cdot \int_E f$
- (ii) Η $f+g$ είναι ολοκληρώσιμη ή $\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g$
- (iii) Αν $f \leq g$ στη E τότε $\int_E f \leq \int_E g$
- (iv) Αν A, B είναι μετρήσιμα υποσύνολα του E τότε $\int_{A \cup B} f =$
 $=$

Απόδειξη (i) Αν $c \geq 0$ τότε $(cf)^+ = c \cdot f^+$ ή $(cf)^- = c \cdot f^-$

αφά είναι ολοκληρώσιμες ή $\int (cf)^+ =$ $=$ και

$\int (cf)^- =$ $=$ \cdot Άρα

$$\int cf = = =$$

=

An $c < 0$ τότε $(cf)^+ = |c| \cdot f^-$ και $(cf)^- = |c| f^+$

$(cx)^-(cf)^- = \max\{-cf, 0\} \stackrel{-c > 0}{=} -c \cdot \max\{f, 0\} = |c| \cdot f^+$

(ii) $(f+g)^\pm \leq |f+g| \leq |f|+|g| =$

Αρα $\int (f+g)^\pm \leq < \infty$ σφραγισ

η $f+g$ είναι ολοκληρώσιμη. Επινδύου

$(f+g)^+ - (f+g)^- = f+g = f^+ - f^- + g^+ - g^- \implies$

\implies

\implies

\implies

\implies

\implies

$\implies \int (f+g) = \int f + \int g.$

(iii) $f \leq g \implies g-f \geq 0 \implies \int (g-f) \geq 0 \implies \int g - \int f \geq 0$

\implies

(iv) $\int_{A \cup B} f = \int_{A \cup B} f \chi_{A \cup B} = \int f (\chi_A + \chi_B) = \int f \chi_A + \int f \chi_B =$

$=$

Θεώρημα κυριαρχημένης συγκλίνουσας του Lebesgue (ΘΚΣ)

Αν g ολοκληρώσιμη στο μετρήσιμο E ή f_n μετρήσιμες

με $|f_n| \leq g$ και $f_n \rightarrow f$ σ.η. τότε

$\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$, (δηλαδή ~~$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$~~)

Απόδειξη

$$f_n \leq |f_n| \leq g \Rightarrow \int f_n \leq \int |f_n| \leq \int g \Rightarrow \int (g-f) \leq \liminf \int f_n$$

$$\geq 0 \xrightarrow{\text{Fatou}} \Rightarrow \int g - \int f \leq \int g -$$

$$\Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n \leq \int f.$$

$$-f_n \leq |f_n| \leq g \Rightarrow \int -f_n \leq \int |f_n| \leq \int g \Rightarrow \int g + \int f \leq \int g + \liminf \int f_n$$

⇒

Αρα

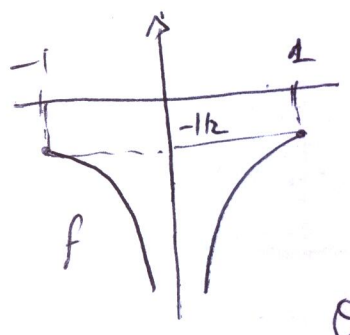


Παράδειγμα

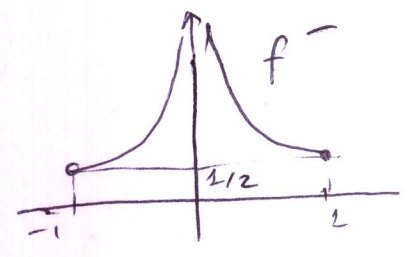
~~Ασκηση~~

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα Lebesgue της $f: [-1, 1] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{με } f(x) = -\frac{1}{2\sqrt{|x|}} = \begin{cases} -\frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{αν } x > 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{-x}} & \text{αν } x < 0. \end{cases}$$



$$f^+ = 0 \quad f^- = \frac{1}{2\sqrt{|x|}}$$



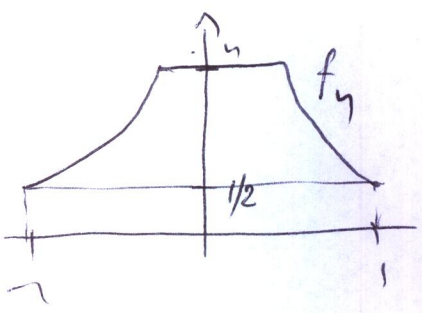
Είναι η f^- ολοκληρώσιμη;

$$\Theta \text{ ερωτάμε την } f_n(x) = \begin{cases} f^-(x) & \text{αν } f^-(x) \leq n \\ n & \text{αν } f^-(x) > n \end{cases}$$

$f_n \uparrow$ και $f_n(x) \rightarrow f^-(x)$. Αρα από το

$$\text{Θ.Μ.Σ } \int f^- = \lim \int f_n$$

Πόσο είναι όπως το $\int f_n$; (ολοκλήρωμα Lebesgue)



Θεώρημα (Lebesgue) Έστω ότι u, f είναι γραμμικά πραγματικές συναρτήσεις

με πεδίο ορισμού το $[a, b]$

(i) Αν f R-ολοκληρώσιμη $\Rightarrow f$ Z-μετρήσιμη ή ακ ολοκληρώσιμη

Επίσης $\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f(x) d\mu(x)$

(ii) Η f είναι R-ολοκληρώσιμη $\Leftrightarrow \mu(\{x \in [a,b] : f(x) > 1 \text{ ή } f(x) < -1\}) = 0$

Η απόδειξη παραλείπεται.

Επιστρέφοντας στο παράδειγμα u, f_1 είναι R-ολοκληρώσιμη

ότι $\int_{[-1]} f_1(x) d\mu(x) = \int_{-1}^1 f_1(x) =$

$= 2 - \frac{2}{7} \rightarrow 2$

Αρκ $\int_{[-1]} f(x) d\mu(x) = -2$

