Μάθημα 24

Άσκηση 7.6.1 Αν $f: \mathbb{R} \to [0\ \infty]$ ολοκληρώσιμη αποδείξτε ότι $\forall\ \alpha \in (0, \infty]$ ισχύει $\mu(\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq \alpha\}) < \infty$

Λύση

$$\infty > \int_{\mathbb{R}} f(x) \overset{f \geq 0}{\geq} \int_{\{x : f(x) \geq \alpha\}} f(x) \geq \int_{\{f \geq \alpha\}} \alpha = \alpha\, \mu(\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq \alpha\})$$

$$f(x) \geq f(x) \cdot \chi_{\{x : f(x) \geq \alpha\}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu(x : f(x) \geq \alpha) \leq \frac{1}{\alpha} \cdot \int_{\mathbb{R}} f}$$

Άσκηση 7.6.3 Δείξτε με τη βοήθεια της $f_n = \chi_{[n, n+1)}$ ότι η ανισότητα Fatou μπορεί να είναι γνήσια

Λύση

$$f_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{αλλά} \quad 0 = \int 0 \ \overset{<}{\cancel{=}} \ \liminf \int f_n = 1$$

Άσκηση 7.6.5 Αν $h: \mathbb{R} \to [0\ \infty]$ μετρήσιμη με $\int h < \infty$ και f_n μετρήσιμες $\geq -h$ αποδείξτε ότι $\int (\liminf f_n) \leq \liminf \int f_n$

Λύση $f_n + h \geq 0 \xRightarrow{\text{Fatou}} \int \liminf (f_n + h) \leq \liminf \int (f_n + h)$

$$\Rightarrow \int ((\liminf f_n) + h) \leq \liminf \left(\int f_n + \int h\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \liminf f_n + \int h \leq \liminf \int f_n + \int h$$

$$\Rightarrow \int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n$$

∎

Άσκηση Αποδείξτε $\displaystyle\int_{[0\infty]} \frac{1}{1+t^2}\,d\mu(t) = \frac{\pi}{2}$

Λύση $$\int_{[0\infty]} \frac{1}{1+t^2}\,d\mu(t) \overset{ΘΜΣ}{=\!=\!=} \lim_{n\to\infty} \int_{[0\infty]} \left(\frac{1}{1+t^2}\,\chi_{[0n]}(t)\right) d\mu(t)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{[0,n]} \frac{1}{1+t^2}\,d\mu(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{1}{1+t^2}\,dt = \lim_{n\to\infty} \arctan(t)\Big|_0^n = \lim_{n\to\infty}\left(\arctan(n) - \arctan 0\right) = \frac{\pi}{2}$$

Άσκηση 7.8.10 | Υπολογίστε τα όρια αιτιολογώντας τις πράξεις σας

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} \sin\frac{x}{n}\,dx$ (ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (1+nx^2)(1+x^2)^{-n}\,dx$

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty n\sin\frac{x}{n}\,\left(x(1+x^2)\right)^{-1} dx$ (iv) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^\infty n(1+n^2x^2)^{-1}\,dx$

Λύση (i) $\displaystyle\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}\sin\frac{x}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-x}\cdot 0 = 0$

$$\underbrace{\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}\sin\frac{x}{n}\right|}_{f_n(x)} \le \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} \overset{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \uparrow}{\le\!\le} \underbrace{\frac{1}{\left(1+\frac{x}{2}\right)^2}}_{g(x)} \quad \forall n\ge 2$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\left(1+\frac{x}{2}\right)^2} = \int_0^\infty \frac{4}{4+4x+x^2} \overset{x>0}{\le} \int_0^\infty \frac{4}{4+x^2} \overset{x=2t}{=\!=\!=} \int_0^\infty \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

Άρα από ΘΚΣ $\displaystyle\lim \int_0^\infty f_n = \int_0^\infty \lim f_n = \int_0^\infty 0 = 0.$

(ii) $\displaystyle\frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall x>0$ και $\displaystyle\frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n} \overset{\text{Bernoulli}}{\le\!\le} \frac{1+nx^2}{1+nx^2} = 1 = g$

$\displaystyle\int_{[01]} g = 1 < \infty$ άρα από ΘΚΣ $\displaystyle\int_{[01]} \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n} \longrightarrow \int_{[01]} 0 = 0$

(iii) $\displaystyle n\sin\frac{x}{n}\,\left(x(1+x^2)\right)^{-1} = \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{\left(\frac{x}{n}\right)}\,\frac{1}{1+x^2} \longrightarrow \frac{1}{1+x^2}$

$$\Big|\overbrace{n\sin\frac{x}{n}\left(x(1+x^2)\right)^{-1}}^{f_n}\Big| \le n\,\frac{x}{n}\,\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2} =: g(x) \quad + ΘΚΣ$$

$\int g = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} < \infty$ άρα $\lim_n \int f_n = \int \lim_n f_n = \int \frac{1}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$.

(iv) $\int_a^\infty \frac{n}{1+n^2x^2} \overset{ΘΜΣ}{=} \lim_{m\to\infty} \int_a^\infty \frac{n}{1+n^2x^2} \chi_{[a,m]}(x)$ γιατί

η $f_{n,m}(x) = \frac{n}{1+n^2x^2}\chi_{[a,m]}(x) \le \frac{n}{1+n^2x^2}\chi_{[a,m+1]}(x) = f_{n,m+1}(x)$

και $\lim_{m\to\infty} f_{n,m} = f_n$.

Άρα $\int_a^\infty \frac{n}{1+n^2x^2} = \lim_{m\to\infty} \int_a^m \frac{n}{1+n^2x^2} = \lim_{m\to\infty} \arctan(nx)\Big|_{x=a}^{x=m}$

$= \lim_{m\to\infty}\left(\arctan(nm) - \arctan(na)\right) =$

$= \frac{\pi}{2} - \lim_{m\to\infty} \arctan(na) \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 0 & a>0 \\ \pi/2 & a=0 \\ \pi & a<0 \end{cases}$

<u>Άσκηση 7.6.4</u> Έστω ότι $f_n \ge 0$, $f_n \to f$ και $\int f = \lim \int f_n < \infty$. Τότε $\forall E$ μετρήσιμο $\subseteq \mathbb{R}$ $\int_E f_n \to \int_E f$. Το αποτέλεσμα δεν είναι σωστό αν $\int f = \infty$

<u>Λύση</u> Από το Λήμμα Fatou

$\int_E f = \int f\chi_E \le \liminf_n \int f_n \chi_E = \liminf \int_E f_n$ $\quad \forall E \in \mathfrak{M}$

Άρα $\int f - \int_E f = \int_{E^c} f \overset{E\in\mathfrak{M}}{\le} \liminf_n \int f_n \chi_{E^c} = \liminf_n \left(\int f_n - \int_E f_n\right)$

$= \int f - \limsup \int_E f_n \Rightarrow \int_E f \ge \limsup \int_E f_n \ge \liminf \int_E f_n \ge \int_E f$

Αν τώρα $F = (-\infty, 0)$ $F_n = F \cup [n, n+1)$, $\chi_F, \chi_{F_n} \ge 0$ $\chi_{F_n} \to \chi_F$

$\int \chi_{F_n} = +\infty = \int \chi_F$. Αν $E = (0,\infty)$ $\int_E \chi_{F_n} = 1 \ne \int_{(0,\infty)} \chi_F = 0$

<u>Άσκηση 7.7.1</u> Αν f ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$ και g μετρήσιμη και φραγμένη $\Longrightarrow$ $f \cdot g$ ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$. Δεν ισχύει ότι το γινόμενο ολοκληρωσίμων είναι ολοκληρώσιμη.

<u>Λύση</u> Γνωρίζουμε ότι fg μετρήσιμη. Έστω $M>0$: $|g| \le M$

$\Longrightarrow$ $-M \le g \le M$.

<u>Ισχυρισμός</u> $|f|$ ολοκλ. $\Longleftrightarrow$ f ολοκλ. & $\left|\int f\right| \le \int |f|$

["$\Longleftarrow$" f ολοκλ. $\Longrightarrow$ $\int f^+, \int f^- < \infty$ $\Longrightarrow$ $\int |f| = \int f^+ + \int f^- < \infty$

"$\Longrightarrow$" $\int f^+ + \int f^- = \int (f^+ + f^-) = \int |f| < \infty$ άρα $\int f^+, \int f^- < \infty$]

Από τον ισχυρισμό αρκεί να δείξουμε ότι $|fg|$ ολοκληρώσιμη.

Αλλά f ολοκλ. $\overset{\text{Ισχ}}{\Longrightarrow}$ $|f|$ ολοκλ. $\Longrightarrow$

$$\int |fg| = \int |f|\,|g| \le \int |f| \cdot M = M \int |f| < \infty \qquad \blacksquare$$

Το γινόμενο ολοκληρωσίμων δεν είναι απαραίτητα ολοκληρώσιμη πχ $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = g(x)$ στο $(0, 1]$ είναι ολοκληρώσιμες με ολοκλήρωμα $= 1$

αλλά $fg(x) = \dfrac{1}{4x}$ $\Longrightarrow$ $\int (fg) = +\infty$