Μάθημα 26

Άσκηση 4.7.3 | $f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$ (i) Δείξτε ότι συγκλίνει στο $[0,\infty)$

(ii) Εξετάστε αν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,\infty)$

(iii) —//— ________ στο $[\delta,\infty)$ για $\delta>0$

Λύση (i) $f_n=\frac{x}{\frac{1}{n}+nx^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0=:f\quad\forall x\in[0,\infty)$

(ii) $\sup_{x\geq 0}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\geq 0}\frac{nx}{1+n^2x^2}$

$=0\Leftrightarrow$

$\left(\frac{nx}{1+n^2x^2}\right)'=\qquad=$

$\Leftrightarrow\qquad\Leftrightarrow\quad x=\frac{1}{n}$

		$1/n$	
f_n'	+	0	−
f_n	↗		↘

$\sup_{x\geq 0}\frac{nx}{1+n^2x^2}=\frac{n\frac{1}{n}}{1+n^2\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}\not\to 0$

Άρα $f_n\not\rightrightarrows f=0$ στο $[0,\infty)$

(iii) Αν $\delta>0$ $\exists n_0:\frac{1}{n}<\delta\ \forall n\geq n_0$. Άρα $\forall n\geq n_0$

η $\frac{nx}{1+n^2x^2}$ δεν έχει κρίσιμα σημεία στο $[\delta,\infty)$

οπότε σύμφωνα με τον πίνακα είναι φθίνουσα με μέγιστη τιμή στο $x=$ ___

$\frac{n\cdot\;}{1+n^2\cdot\;}=\frac{\;}{\frac{1}{n}+n\cdot\;}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$

Άρα $f_n\rightrightarrows f=0$ στο $[\delta,\infty)$

Άσκηση 47.5 $\quad f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$ (i) συγκλίνει στη σελ. 12 στο $[0\ 1]$; (ii) ομοιόμορφα; (iii) στο $[\delta\ 1]$ για $\delta\in(0\ 1)$; (2)

(3)

Λύση (i) Αν $x=0$ $\quad f_n(0)=0 \longrightarrow 0$ (4)

Αν $x>0$ $\quad f_n(x) = \dfrac{n^2 x}{e^{nx}} \longrightarrow 0$ (κριτήριο n-οστής ρίζας) (5)

(ελέγξτε το)

(ii) $\sup\limits_{x\in[0\,1]} |f_n(x)| \geq f_n(\ \ ) = \qquad = \qquad \longrightarrow +\infty$ (6)

(7)

άρα $f_n \not\rightrightarrows 0$ στο $[0\ 1]$

(iii) $a_n = \sup\limits_{x\in[0\,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[0\,1]} n^2 x e^{-nx} = \sup\limits_{x\in[\delta\,1]} f_n(x)$ (8)

$f_n'(x) = \qquad = 0 \Leftrightarrow \qquad \Leftrightarrow x=$ (9)

$<\delta$ άρα στο $[\delta\ 1]$ (10)

αν $\delta>0$ $\exists n_0 : \forall n\geq n_0$ (11)

δεν έχουμε κρίσιμα σημεία. Συνεπώς (12)

$a_n = \sup\limits_{x\in[\delta\,1]} f_n(x) = \max\{ \qquad \} =$ (13)

$= \qquad \longrightarrow 0$. Άρα $f_n \rightrightarrows 0$ στο $[\delta, 1]$

Άσκηση 47.10 (X, d) μετρικός χώρος, $\delta>0$ $f_n : X \to \mathbb{R}$ (14)

(15)

$f_n(x) \geq \delta$ $\forall x\in X$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Αν $f_n \rightrightarrows f$ Δείξτε ότι (16)

(i) $f(x)\neq 0$ $\forall x\in X$ (ii) $\dfrac{1}{f_n} \rightrightarrows \dfrac{1}{f}$

Λύση Έστω n_0 : $\forall n\geq n_0$ $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\delta}{2}$ $\forall x\in X$ (17)

(18)

$\Rightarrow \qquad < f(x)$ $\forall x\in X \Rightarrow \forall x\in X$ $f(x) > \qquad = \qquad >0$

(ii) $\left|\dfrac{1}{f_n} - \dfrac{1}{f}\right| = \dfrac{|\qquad|}{|\ \ |\,|\ \ |}$ βρίσκουμε $n_0 : \forall n\geq n_0$ $|f_n - f| < \dfrac{\varepsilon\delta^2}{2}$ (19) οπότε

$\left|\dfrac{1}{f_n} - \dfrac{1}{f}\right| < \dfrac{\varepsilon\delta^2/2}{\frac{\delta}{2}\,\delta} = \varepsilon$ ■ (20)

σελ 3

Άσκηση 4.7.14 Αν $f_n \rightrightarrows f$ στο μετρικό χώρο E η f συνεχής (1)

δείξτε ότι αν $x_n \in E$ η $x \in E$ η $x_n \to x$ τότε $f_n(x_n) \to f(x)$ (2)

Λύση

(3)

$$|f_n(x_n) - f(x)| \le |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)|$$

Αφού f συνεχής $\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \ge n_1$ $< \varepsilon/2$ (4)

Αφού $f_n \rightrightarrows f$ $\exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall$ $\forall z \in E$ (5)

(6)

άρα η για $z = x_n$

(7)

Συνεπώς για $n \ge \max\{n_1, n_2\}$

(8)

Άσκηση 4.4.15 ο $(\mathbb{X}, d)$ είναι συμπαγής μ.χ. $f_n : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, f συνεχής: $\mathbb{X} \to \mathbb{R}$ (9)

Υποθέτουμε ότι $\forall x \in \mathbb{X}$ $\forall x_n \in \mathbb{X}$ με $x_n \to x$ ισχύει $f_n(x_n) \to f(x)$ (10)

Δείξτε ότι $f_n \rightrightarrows f$

(11)

Λύση Αν όχι $\exists \varepsilon > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N}$ $\exists n \ge n_0$: $\sup_{x \in \mathbb{X}} \ge \varepsilon$

(12)

Άρα $\exists x_n \in \mathbb{X}$ ώστε $|f_n(x_n) - f(x_n)| \ge \varepsilon/2$ ~~...~~

~~...~~

(13)

Ο $\mathbb{X}$ είναι συμπαγής άρα $\exists x_{n_k}$ υπακολουθία της x_n (14)

που συγκλίνει. Ας ονομάσουμε x το όριό της

Τότε $x_{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} x$ αλλά $|f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| \ge \varepsilon/2$ (15)

(16)

$$\Rightarrow \lim_k |f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| \ge \varepsilon/2$$

(17)

$\xRightarrow{\text{f συνεχής}}$ $|f(x) - f(x)| \ge \varepsilon/2$ άτοπο

Άσκηση 4.7.16 $f_n : (0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \begin{cases} n & 0 < x \leq 1/n \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$

$f(x) = \frac{1}{x}$: $(0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$

(i) Δείξτε ότι $\forall\, x \in (0, 1]$ $\forall\, x_n \in (0, 1]$ με $x_n \longrightarrow x$

$f_n(x_n) \longrightarrow f(x)$

(ii) $f_n \not\rightrightarrows f$

Λύση (i) Έστω ότι $x \in (0, 1]$ και $x_n \in (0, 1]$ με $x_n \longrightarrow x$

$\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_1$ $\frac{1}{n} < x$. Άρα $\frac{1}{n_1} < x$

$\exists\, n_2 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_2$ $x_n > \frac{1}{n_2}$ αφού $x_n \longrightarrow x$ (άσκηση)

Άρα $\forall n \geq \max\{n_1, n_2\}$ $x_n, x > \frac{1}{n}$

Συνεπώς $f_n(x_n) = \frac{1}{x_n} \longrightarrow \frac{1}{x} = f(x)$

(ii) $\sup\limits_{x \in (0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{0 < x < \frac{1}{n}} \left| n - \frac{1}{x} \right|$ (αφού $f_n(x) - f(x) = \{$)

$= +\infty \not\longrightarrow 0$ άρα $f_n \not\rightrightarrows f$.