Μάθημα 27

Άσκηση 4.7.20 Δείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

Λύση Υπάρχουν περιπτώσεις όπως αυτή που το Θ. Weierstrass δεν λειτουργεί: το μικρότερο άνω φράγμα της $|(-1)^n x^n(1-x)|$ είναι το $\sup_{x\in[0,1]} |(-1)^n x^n(1-x)| = \sup_{x\in[0,1]} x^n(1-x)$

$$(x^n(1-x))' = (x^n - x^{n+1})' = nx^{n-1} - (n+1)x^n = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 & \text{ή} \\ x=\frac{n}{n+1} \end{cases}$$

Άρα
$$\sup_{x\in[0,1]} x^n(1-x) = \max\left\{0^n(1-0),\ 1^n(1-1),\ \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\right\}$$
$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \underbrace{\left(1-\frac{n}{n+1}\right)}_{=\frac{1}{n+1}}.$$ Αλλά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} \underset{\uparrow}{=} \infty$ Σύγκριση με την $\sum \frac{1}{n}$

άρα το Weierstrass εδώ δεν λειτουργεί.

Αλλιώς: Μπορούμε να υπολογίσουμε ακριβώς το μερικό άθροισμα:

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N}(-1)^n x^n(1-x) = (1-x)\sum_{n=1}^{N}(-x)^n =$$
$$= (1-x)\,\frac{(-x)-(-x)^{N+1}}{1-(-x)} = \frac{1-x}{1+x}(-x)\left(1-(-x)^N\right)$$
$$\xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{(-x)(1-x)}{1+x}$$ και το ερώτημα είναι αν αυτή η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη. Υπολογίζουμε το

$$a_N := \sup_{x\in[0,1]}\left|S_N(x) - \frac{(-x)(1-x)}{1+x}\right| = \sup_{x\in[0,1]}\left|\frac{(1-x)\,x^{N+1}}{1+x}\right|$$

Χρησιμοποιώντας παράγωγο βρίσκουμε ότι το sup αυτό υλοποιείται στο $x=\frac{n}{n+1}$ (άσκηση) άρα $a_n = \dfrac{1-\frac{n}{n+1}}{1+\frac{n}{n+1}}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \longrightarrow 0$

άρα $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x) \rightrightarrows \frac{(-x)(1-x)}{1+x}$$

Άσκηση 6.1.5 Αν $I_1, \dots, I_n$ ανοικτά διαστήματα με

$$\bigcup_{i=1}^{n} I_i \supseteq \mathbb{Q} \cap [0,1].$$

Δείξτε ότι $\sum_{i=1}^{n} \ell(I_i) \geq 1$.

Λύση Αν $\sum_{i=1}^{n} \ell(I_i) < 1$ επειδή $\ell(I) = \ell(\bar{I}) \Longrightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n} \ell(\bar{I}_i) < 1 \Rightarrow \mu^*\left(\bigcup_1^n \bar{I}_i\right) \leq \sum_1^n \ell(\bar{I}_i) < 1$$

Άρα $\left(\bigcup_{i=1}^{n} \bar{I}_i\right)^c \neq \phi$ & είναι ανοικτό στο $[0,1]$

άρα περιέχει ρητό. Άτοπο.

Άσκηση 6.2.6 Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό $U \subseteq \mathbb{R}$

με $A \subseteq U$ και $\mu^*(U) \leq \mu^*(A) + \varepsilon$.

Λύση Από τον ορισμό του $\mu^*(A) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) \; : \; A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}[a_i, b_i) \right\}$

υπάρχουν $[a_i, b_i)$ με $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}[a_i, b_i)$ ώστε

$$\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) \leq \mu^*(A) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Θέτουμε $U = \bigcup_{i=1}^{\infty}\left(a_i - \frac{\varepsilon}{2^i}, b_i\right)$. U ανοικτό $\supseteq A$

και $\mu^*(U) \leq \sum_1^{\infty}\left(b_i - \left(a_i - \frac{\varepsilon}{2^i}\right)\right) \leq \mu^*(A) + \varepsilon$

Άσκηση 7.3.3 Αν $E \in \mathcal{M}$ τότε η χ_E είναι μετρήσιμη.

Λύση "$\Longrightarrow$"

$$\{x : \chi_E(x) > a\} = \chi_E^{-1}((a, \infty)) = \begin{cases} \mathbb{R} & a < 0 \\ E & 0 \leq a < 1 \\ \phi & a \geq 1 \end{cases}$$

"$\Longleftarrow$" $E = \chi_E^{-1}\left(\left(\tfrac{1}{2}, \infty\right)\right)$

Ασκηση 7.3.4 | Δείξτε ότι δεν υπάρχει f συνεχής $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (1) σελ 23

με $f(x) = \chi_{[0\ 1]}(x)$ σ.π. (2)

Λύση Αν υπάρχει τέτοια f, τότε επειδή το $(-\frac{1}{n}\ 0)$ έχει (3)

θετικό μέτρο υπάρχει $x_n \in (-\frac{1}{n}\ 0)$ ώστε $f(x_n) = \chi_{[0\ 1]}(x_n) = 0$ (4)

$\left.\begin{array}{l} f \text{ συνεχής} \\ x_n \to 0^- \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_n f(x_n) = 0 \to \boxed{f(0) = 0}$ (5)

Όμως $\mu(0\ \frac{1}{n}) > 0 \Rightarrow \exists\ y_n \in (0, \frac{1}{n})$ ώστε $f(y_n) = \chi_{[0\ 1]}(y_n) = 1$ (6)

$\left.\begin{array}{l} f \text{ συνεχής} \\ y_n \to 0^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_n f(y_n) = 1 \Rightarrow \boxed{f(0) = 1}$ άτοπο (7)

Άσκηση Έστω ότι $f > 0$ $f : [0\ 1] \to \mathbb{R}$ και $E_n \subseteq [0\ 1]$ (8)

ώστε $\int_{E_n} f \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Δείξτε ότι $\mu(E_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (9)

Λύση Θεωρούμε $A_k = \{x \in [0\ 1] : f(x) > \frac{1}{k}\}$. Επειδή $f > 0$ (10)

$\Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = [0\ 1]$. Επίσης $A_k \subseteq A_{k+1}$ άρα (11)

$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu[0\ 1] = 1 \Rightarrow \mu([0\ 1] \setminus A_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ (12)

Έστω k_0 ώστε $\mu(A_{k_0}^c) < \varepsilon/2$ (13)

$\int_{E_n} f \geq \int_{E_n \cap A_{k_0}} f \geq \int_{E_n \cap A_{k_0}} \frac{1}{k} = \frac{1}{k} \mu(E_n \cap A_{k_0})$ (14)

$\Rightarrow \mu(E_n \cap A_{k_0}) \leq k_0 \cdot \int_{E_n} f \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ από υπόθεση (15)

Άρα $\exists\ n_0 : \forall n \geq n_0$ $\mu(E_n \cap A_{k_0}) < \varepsilon/2$. Συνεπώς (16)

$\mu(E_n) = \mu(E_n \cap A_{k_0}) + \mu(E_n \cap A_{k_0}^c) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ∎ (17)