Μάθημα 1°

Επανάληψη στις ακολουθίες. Ακολουθία (ονομάζουμε οποιαδήποτε συνάρτηση) $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.

π.χ. $a(n) = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Ομοίως ονομάζαμε ακολουθία

οποιαδήποτε συνάρτηση $a : A \longrightarrow \mathbb{R}$ όπου $A \subseteq \mathbb{N}$ άπειρο σύνολο

π.χ. $a : \{\text{άρτιοι}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ π.χ. $a(2n) = \frac{1}{2n}$

$\{2n : n \in \mathbb{N}\}$

Συνήθως χρησιμοποιούμε γράμματα όπως a, b, γ, x, y, t, s

(και όχι f, g, h) για τις ακολουθίες.

Επιπλέον αντί για $a(n)$, $\gamma(n)$ $y(n)$ κλπ γράφουμε

a_n γ_n y_n κλπ.

Κάθε τιμή της ακολουθίας a [redacted] ονομάζεται και όρος της a

$a_1, a_2, a_{15}, a_{832}$ είναι όροι της ακολουθίας a δηλαδή

Είναι οι τιμές της $a(1)$, $a(2)$, $a(15)$, $a(832)$

Συνήθως δεν λέμε «η ακολουθία a» αλλά «η ακολουθία a_n»

(το αντίστοιχο για τις συναρτήσεις είναι να προτιμούσαμε το $f(x)$ από το f)

$\forall$ $m \in \mathbb{N}$ το σύνολο $\{a_n : n \geq m\}$ ονομάζεται [redacted]

Τελικό τμήμα της a_n. Π.χ. Αν $a_n = \frac{1}{n}$

$a_{10} = \frac{1}{10}$ $a_{52} = \frac{1}{52}$ $\{a_n : n \geq 85\} = \{\frac{1}{85}, \frac{1}{86}, \frac{1}{87}, \dots\}$

Λέμε ότι $a_n \longrightarrow 0$ ή $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ή $\lim a_n = 0$ (1)

αν $\forall\, \varepsilon>0 \quad \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$ (2)

<u>Πχ</u> Η $a_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ (παρόλο που πλησιάζει και το $\frac{-1}{100\pi}$) (3)

<u>Πράγματι</u> αν μας ζητήσουν να ελέγξουμε αν τελικά βρίσκεται (4)

σε απόσταση $\varepsilon>0$ από το 0 δεν έχουμε παρά να ελέγξουμε (5)

αν $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$ Το ζητούμενο (6)

λοιπόν είναι εφικτό όταν $n > \frac{1}{\varepsilon}$... Θέτουμε $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ (7)

(8)

ή ισχύει η γραμμή (2).

$a_n \not\longrightarrow -\frac{1}{100\pi}$ (παρόλο που το πλησιάζει) (9)

Θα το δούμε αυτό αφού θυμηθούμε τον ορισμό σύγκλισης (10)

<u>Ορισμός</u> Μια ακολουθία $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ λέμε ότι συγκλίνει στο ℓ (11)

και γράφουμε $a_n \longrightarrow \ell$ ή $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$ ή $\lim a_n = \ell$ (12)

αν η ακολουθία $x_n = a_n - \ell$ έχει όριο το μηδέν. Δηλαδή (13)

αν

$$\forall\, \varepsilon>0 \quad \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ ώστε } |\overbrace{a_n - \ell}^{x_n}| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad (14)$$

Η $a_n = \frac{1}{n}$ παρόλο που πλησιάζει το $-\frac{1}{100\pi}$ <u>δεν</u> συγκλίνει (15)

σε αυτό διότι αν μας ζητήσουν να βρούμε πότε (16)

απέχει από αυτό λιγότερο από ~~200~~ $\frac{1}{1000}$ (17)

Τότε θα θέλαμε $\left|\frac{1}{n}-\left(-\frac{1}{100\pi}\right)\right|<\frac{1}{1000} \iff$

$$\iff -\frac{1}{1000}<\frac{1}{n}+\frac{1}{100\pi}<\frac{1}{1000}$$

$$\iff -\frac{1}{1000}-\frac{1}{100\pi}<\frac{1}{n}<\frac{1}{1000}-\frac{1}{100\pi}$$

$$\iff -\frac{1000+100\pi}{10^5\pi}<\frac{1}{n}<-\frac{1000-100\pi}{10^5\pi}$$

το οποίο είναι ανέφικτο διότι $\frac{1}{n}>0$.

Στον ΑΠ ΛΟΓ 1 έχουν αποδειχθεί τα εξής:

Το όριο είναι μοναδικό (όταν υπάρχει), αν $x_n\to l_1$ και $y_n\to l_2$

Τότε $x_n\pm y_n\to l_1\pm l_2$, $x_n y_n\to l_1 l_2$, αν $l_2\neq 0$

$\frac{x_n}{y_n}\to\frac{l_1}{l_2}$ (για τα n για τα οποία $y_n\neq 0$), $|x_n|\to l_1$

$x_n^k \xrightarrow[n\to\infty]{} l_1^k$ $\forall k>0$ και $\forall k<0$ (όταν $x_n\neq 0$ και) $l_1\neq 0$

$\sqrt[k]{x_n}\to\sqrt[k]{l_1}$ αν $x_n\geq 0$.

Αν $x_n\le z_n\le y_n$ και $\lim x_n=\lim y_n=l$ τότε

$\lim z_n=l$.

Ορισμός Αν $B\subseteq A\subseteq\mathbb{N}$ άπειρα σύνολα και $a_n: A\to\mathbb{R}$ μια ακολουθία τότε ο περιορισμός $a_n\big|_{n\in B}$ ονομάζεται υπακολουθία της a_n.

Π.Χ.

$n=$	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$a_n=$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	...
	$\frac{1}{1}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{7}$		... =

$= a_n \Big|_{n \in \{\text{περιττοί}\}}$ είναι υπακολουθία της a_n

Αν θεωρήσουμε την ακολουθία $k_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ με $k_n = 2n-1$

τότε φανερά $a_n \Big|_{n \in \{\text{περιττός}\}} = (a \circ k)(n) = a(k(n)) = a_{k_n} =$

$= a_{2n-1} = \dfrac{1}{2n-1}$

Δηλαδή η <u>ακολουθία</u> $\dfrac{1}{2n-1}$ <u>ΕΙΝΑΙ</u> υπακολουθία

της $\dfrac{1}{n}$. Αλλωστε τι όρους δίνει η $\dfrac{1}{2n-1}$:

$\dfrac{1}{1}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{7}, \dots$

Έτσι συχνά μια υπακολουθία (όπου $k_n \uparrow : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$) γράφεται ως ακολουθία

της μορφής a_{k_n}. Δεν είναι όμως απαραίτητο ότι υπάρχει

τύπος για την k_n. Π.χ. Αν από την $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ κρατήσω

μόνο τους όρους που το n είναι μια δύναμη του 2

δηλ. τους $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2^2}, \dfrac{1}{2^3}, \dfrac{1}{2^4}, \dots$ έχω την

υπακολουθία a_{2^n} της $a_n = \dfrac{1}{n}$ και μπορώ να γράψω

τύπο: είναι η $\dfrac{1}{2^n}$

Ενώ αν από την $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ κρατήσω μόνο τους όρους

με παρονομαστή πρώτο αριθμό δηλ. $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{7}, \dfrac{1}{11}, \dfrac{1}{13}, \dfrac{1}{17}, \dots$

αυτή είναι μια υπακολουθία $a_{p(n)}$ της a_n με $p(n)$ ο n-στός

πρώτος αριθμός αλλά δεν έχω τύπο για την $a_{p(n)}$ (ούτε για την $p(n)$)