Μάθημα 2ο

Θεώρημα: κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει.

Ειδικότερα αν $a_n \uparrow$ ($a_n \le a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$) και

a_n άνω φραγμένη ($\exists$ ώστε) τότε

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \quad \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

ή αν $a_n \downarrow$ ($a_n \ge a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$) και

a_n κάτω φραγμένη ($\exists$ ώστε)

Τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = \quad \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

Απόδειξη: (επειδή $a_n \uparrow$ κ άνω φρ.) Αφού $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ άνω φραγμένο σύνολο υπάρχει

το $S = \quad \{a_n \; n \in \mathbb{N}\} \in$ ___

Φανερά $a_n \le S$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι

$a_n \longrightarrow S$. Ας υποθέσουμε ότι μας ρωτάνε πότε οι όροι

της a_n θα απέχουν από το S απόσταση λιγότερη από $\varepsilon > 0$

Μας ζητούν δηλαδή να επιβεβαιώσουμε ότι θα συμβεί η

$|a_n - S| < \varepsilon$ από κάποιο n_0 κ μετά.

$\Longleftrightarrow \quad < a_n < \quad$. Την δεξιά την ξέρουμε

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αφού ακόμα καλύτερα $a_n \le S$. Άρα το ζητούμενο

είναι πότε ισχύει η αριστερή.

Όμως το $S - \varepsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του συνόλου $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

διότι το s ήταν το ελάχιστο άνω φράγματου. Άρα (1)

$\exists \quad \in \mathbb{N}$ ώστε $s-\varepsilon < \underline{\qquad}$ Επειδή τώρα $a_n \uparrow$ (2)

$\forall n \geq \qquad s-\varepsilon < \underline{\qquad} \leq a_n \leq s < s+\varepsilon$ (3)

άρα $\forall n \geq \qquad |a_n - s| < \varepsilon$ $\blacksquare$ (4)

<u>Θεώρημα Bolzano–Weierstrass</u> κάθε φραγμένη ακολουθία (5)
έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. (6)

(Σκεφτείτε ένα τρόπο να εξηγήσετε γιατί κάθε ακολουθία (7)
έχει <u>μονότονη</u> υπακολουθία) (8)

(9)
<u>Ορισμός</u> $a_n \longrightarrow +\infty$ αν

(10)
$a_n \longrightarrow -\infty$

<u>Βασικά όρια</u> $\lambda^n \longrightarrow \begin{cases} & \text{αν } |\lambda|<1 \\ & \text{αν } \lambda = 1 \\ & \text{αν } \lambda > 1 \end{cases}$ (11) (12) (13)

$\}$ αν $\lambda \leq 1$. (14)

$\forall\, a>0 \quad \sqrt[n]{a} \longrightarrow \quad , \quad \sqrt[n]{n} \longrightarrow$ (15)

(16)
Αν $a_n \longrightarrow \ell > 0 \implies \sqrt[n]{a_n} \longrightarrow$

Αν $a_n \longrightarrow 0 \quad a_n > -1 \implies (1+a_n)^p \longrightarrow 1 \quad \forall\, p \in \mathbb{R}$ (17)

Αν $a_n \longrightarrow 0 \quad \dfrac{\sin(a_n)}{a_n} \longrightarrow \quad , \quad \dfrac{e^{a_n}-1}{a_n} \longrightarrow \quad ,$ (18)

$\dfrac{\log n}{n} \longrightarrow \qquad \dfrac{\log(1+a_n)}{a_n} \longrightarrow$ (19)

<u>Ορισμός</u> (ακολουθία Cauchy) Μια ακολουθία a_n ονομάζεται ακολουθία Cauchy ή βασική ακολουθία αν

$$\forall \quad > 0 \quad \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall \qquad \text{ισχύει } |a_n - a_m| < \varepsilon$$

<u>Θεώρημα</u> Μια ακολουθία a_n με τιμές στο $\mathbb{R}$ ~~συγκ~~ συγκλίνει $\Longleftrightarrow$ είναι ακολουθία Cauchy

<u>Πρόταση</u> $a_n \longrightarrow \ell \iff \forall\, k_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad (k_n \nearrow)$ η υπακολουθία $a_{k_n} \longrightarrow \ell$

Γενικά περί Σειρών

<u>Ορισμός</u> Θεωρούμε μια ακολουθία a_n πραγματικών αριθμών και ορίζουμε μια νέα ακολουθία $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ θέτοντας

$$S_N = a_1 + a_2 + \cdots + a_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$$

Η νέα αυτή ακολουθία, $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$, ονομάζεται _____ της a_n

Προσοχή: Σειρά είναι η S_N που φτιάχνεται όπως παραπάνω από την a_n. <u>ΔΕΝ</u> είναι η a_n η σειρά

Σειρά της a_n είναι η ακολουθία $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ ενώ κάθε όρος αυτής, δηλαδή κάθε S_N, ονομάζεται μερικό άθροισμα της σειράς ή μερικό άθροισμα της a_n.

Άρα αφού τα S_N λέγονται «μερικά αθροίσματα» η σειρά της a_n

είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της a_n. (1)

<u>Παράδειγμα</u> (Η γεωμετρική σειρά) Ας πάρουμε ένα $\lambda \in \mathbb{R}$ (2)
και ας θεωρήσουμε την ακολουθία $a_n = \lambda^n$. Η σειρά της (3)
δηλαδή η ακολουθία $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ με (4)

$$S_N = a_1 + \dots + a_N = \lambda^1 + \lambda^2 + \dots + \lambda^N \qquad (5)$$

ονομάζεται γεωμετρική σειρά με <u>λόγο λ</u> (6)
$\hookrightarrow$ (από το ότι $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\lambda^{n+1}}{\lambda^n} = \lambda$)

Πολλές φορές αυτό το μερικό άθροισμα όπως το προηγούμενο (7)
μπορεί να υπολογιστεί σε «κλειστή μορφή» (8)

Γνωρίζουμε από το Λύκειο ότι $\lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^N = \_\_\_\_\_\_\_\_$ (9)

(γιατί;)

Οπότε $S_N = \sum_{n=1}^{N} \lambda^n = \_\_\_\_\_\_\_\_$. (10)

Άλλοτε πάλι τέτοιος υπολογισμός δεν είναι εφικτός (11)

π.χ. $a_n = \frac{1}{n}$ $\qquad S_N = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ (12)

Αν η S_N συγκλίνει καθώς $N \to \infty$ λέμε ότι η σειρά της a_n (13)
συγκλίνει, και αν το όριο είναι το L γράφουμε (14)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L \quad \Big(\text{εννοώντας} \qquad (15)$$

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} a_n = L \Big) \qquad (16)$$