Μάθημα 3ο

Στο προηγούμενο μάθημα είδαμε ότι για τη γεωμετρική σειρά με λόγο $\lambda \neq 1$ ισχύει $S_N = \sum_{n=1}^{N} \lambda^n = \frac{\lambda - \lambda^{N+1}}{1-\lambda}$. Έτσι αν $|\lambda|<1$ επειδή $\lambda^{N+1} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ θα ισχύει $S_N \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{\lambda}{1-\lambda}$

Άρα $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n = \frac{\lambda}{1-\lambda}$. (Άσκηση: ελέγξτε ότι $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n = \frac{1}{1-\lambda}$ $\forall\ |\lambda|<1$)

Αν $\lambda \geq 1$ τότε $S_N = 1+\lambda+\dots+\lambda^N \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty$ και λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n$ απειρίζεται ή απειρίζεται θετικά ή τείνει στο + άπειρο. Αν $\lambda=-1$ τότε το S_N εξαρτάται από το αν το N είναι άρτιος ή περιττός π.χ. $S_2 = (-1)^1 + (-1)^2 = 0$ $S_4 = (-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+(-1)^4 =$ ___

Γενικά $S_{2N} = 0$ ενώ $S_{2N-1} = (-1)$ Άρα $S_{2N} \to 0$ και $S_{2N-1} \to -1$ συνεπώς η S_N δεν έχει όριο άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ λέμε ότι αποκλίνει. Ομοίως αν $\lambda < -1$ ελέγξτε ότι $S_{2N} \to +\infty$ κ $S_{2N-1} \to -\infty$ άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n$ αποκλίνει.

Μια σειρά μπορεί να ξεκινάει την άθροιση όχι από το $n=1$ αλλά από άλλον αριθμό π.χ. η σειρά της $a_n = \frac{1}{(n-1)(n-2)}$ πρέπει αναγκαστικά να μην συμπεριλαμβάνει τους όρους $n=1$ κ $n=2$

Η φράση «η σειρά της a_n» δεν είναι ακριβής αφού πρέπει να δηλώνουμε από πού ξεκινάει η άθροιση π.χ. είδαμε ότι για $|\lambda|<1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n = \frac{\lambda}{1-\lambda} \quad \text{ενώ} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n = \frac{1}{1-\lambda}.$$

Όμως η φράση «η σειρά της a_n συγκλίνει» έχει πάντα νόημα ανεξάρτητα από πού ξεκινάει η άθροιση.

<u>Πρόταση</u> Για κάθε ακολουθία a_n που ορίζεται για $n \geq k$ και για κάθε $n_1, n_2 \geq k$

η σειρά $\sum_{n=n_1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει $\Longleftrightarrow$ η σειρά $\sum_{n=n_2}^{\infty} a_n$ συγκλίνει

<u>Απόδειξη</u> Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $n_2 > n_1$ και θέτουμε $s_N = a_{n_1} + a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \dots + a_{n_2} + a_{n_2+1} + \dots + a_N$

και $t_N = a_{n_2} + a_{n_2+1} + a_{n_2+2} + \dots + a_N$

Οπότε $s_N = t_N + (a_{n_1} + a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2-1})$

Άρα η s_N συγκλίνει αν-ν η t_N συγκλίνει (αφού ο όρος $(a_{n_1} + \dots + a_{n_2-1})$ είναι σταθερός & ανεξάρτητος του N) ■

Στη συνέχεια εργαζόμαστε συχνά με σειρές της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

<u>Άσκηση</u> Υπολογίστε τις γεωμετρικές σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} =$$

<u>Πράξεις με σειρές</u>: Επειδή $\lambda \lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty} \lambda s_N = \lim_{N\to\infty}\left(\lambda \sum_{n=1}^{N} a_n\right)$

$= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} \lambda a_n\right)$ ισχύει $\lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n)$

αν η $\sum_{1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

αν $s_N=\sum_1^N a_n$ & $t_N=\sum_1^N b_n$

Ομοίως / Επειδή $\lim(s_N+t_N)=\lim s_N+\lim t_N$ αν τα όρια υπάρχουν στο $\mathbb{R}$, ~~αφού~~ και $s_N+t_N=\sum_1^N a_n+\sum_1^N b_n =$

$= \sum_1^N (a_n+b_n)$ ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$ εφόσον οι σειρές

συγκλίνουν. Προσοχή δεν είναι σωστό ότι αν συγκλίνει η $\sum(a_n+b_n)$ τότε συγκλίνουν και οι $\sum a_n$ & $\sum b_n$. (πχ $a_n=1$, $b_n=-1$)

<u>Άσκηση</u> Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ αποκλίνει τι κάνει η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-e^{-n})\ ;$$

<u>Άσκηση</u> Αν $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$ υπολογίστε τις σειρές $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}=$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!\,(n+1)}=$$

<u>Παράδειγμα</u> $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-3n+2}{n!}=\sum_{n=1}\left(\frac{n^2}{n!}-3\frac{n}{n!}+2\frac{1}{n!}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}-3\sum_{n=1}\frac{1}{(n-1)!}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\right)-1=e-1\,,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1+1}{(n-1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{(n-1)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}=$$

$$=e+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}=2e$$

κ.λ.π. Άρα $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-3n+2}{n!}=2e-3\cdot e+2(e-1)=$

$$=e-2$$

Θεωρητικά κριτήρια σύγκλισης σειρών. (1)

→ Το κριτήριο φράγματος

Πρόταση: Αν $a_n \ge 0$ και η $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ είναι φραγμένη (2)
ακολουθία, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει (3)
Αν η s_N δεν είναι φραγμένη τότε η σειρά $\sum_{1}^{\infty} a_n$ τείνει στο $+\infty$. (4)

Απόδειξη: Αφού $a_n \ge 0$ $s_N \le s_{N+1}$ $\forall N \in \mathbb{N}$ άρα η s_N (5)
είναι αύξουσα ακολουθία, και αν είναι και φραγμένη (6)
τότε συγκλίνει. Αν η s_N δεν είναι φραγμένη (7)
(επειδή $s_N \ge s_1$) δεν είναι άνω φραγμένη. Άρα $\forall M \in \mathbb{R}$ (8)
$\exists N_0 \in \mathbb{N}: \; s_{N_0} \ge M \xRightarrow{s_N \uparrow} \forall N \ge N_0 \quad s_N \ge s_{N_0} \ge M$ (9)
$\Rightarrow s_N \longrightarrow +\infty$ ■

Παράδειγμα: Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ για $p>1$ συγκλίνει (10)
(δείξτε πρώτα ότι $1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\dots+\frac{1}{N^p} \le \frac{p}{p-1} - \frac{1}{(p-1)N^{p-1}}$) (*) (11)
Φανερά $s_N = 1+\frac{1}{2^p}+\dots+\frac{1}{N^p}$ $\uparrow$ αφού $s_{N+1} = s_N + \frac{1}{(N+1)^p} > s_N$ (12)
Άρα μένει να δείξουμε ότι είναι και φραγμένη. Αν δειχθεί η (*) (13)
τότε φανερά $s_N \le \frac{p}{p-1}$ οπότε θα είναι φραγμένη (14)
Για την (*) κάνουμε επαγωγή: $N=1$ $\quad 1 \le \frac{p}{p-1} - \frac{1}{p-1} = 1$ ✓ (15)
Υποθέτω ότι ισχύει η (*) και ελέγχω την $N+1$, δηλαδή αν (16)
ισχύει η (17)

$$\underbrace{1+\frac{1}{2^p}+\dots+\frac{1}{N^p}}_{\overset{(*)}{\le} \frac{p}{p-1}-\frac{1}{(p-1)N^{p-1}}} + \frac{1}{(N+1)^p} \le \frac{p}{p-1} - \frac{1}{(p-1)(N+1)^{p-1}} \quad (18)$$

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{p}{p-1} - \frac{1}{(p-1)N^{p-1}} + \frac{1}{(N+1)^p} \le$ (19)
$\le \frac{p}{p-1} - \frac{1}{(p-1)(N+1)^{p-1}}$ (άσκηση) (20)