Μάθημα 4ο

Η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει $(=+\infty)$ [« Η αρμονική σειρά αποκλίνει »] (1)

Η $s_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ είναι γνησίως αύξουσα (2)

άρα αρκεί να δείξω ότι η υπακολουθία $s_{2^N} \longrightarrow +\infty$ (3)

(Άσκηση Αν $x_n \uparrow$ και $x_{k_n} \longrightarrow +\infty$ για κάποια υπακολουθία (4)

x_{k_n} της x_n (όπου $k_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \uparrow$) τότε $x_n \longrightarrow +\infty$) (5)

Όμως $s_{2^N} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^N} =$ (6)

(7)

$$= \left(1+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\right) + \dots$$

$$+ \left(\frac{1}{2^{N-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^N}\right) \quad (8)$$

$$\geq 2\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{8} + 8\cdot\frac{1}{16} + \dots + 2^{N-1}\cdot\frac{1}{2^N} = \quad (9)$$

$$= 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{N-1} = 1 + \frac{N-1}{2} \longrightarrow +\infty \quad \blacksquare$$

Κριτήριο Cauchy Από τις ακολουθίες γνωρίζουμε ότι (10)

η s_N συγκλίνει αν-ν είναι ακολουθία Cauchy (11)

αν-ν $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall M > N \geq N_0$ ισχύει $|s_M - s_N| < \varepsilon$ (12)

Αλλά επειδή η s_N έχει συγκεκριμένη μορφή $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ (13)

και $s_M - s_N = \sum_{n=1}^{M} a_n - \sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=N+1}^{M} a_n$

Το κριτήριο παίρνει τη μορφή: Η σειρά $\sum_{1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει (14)

αν-ν $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall M > N \geq N_0$ ισχύει $\left| \sum_{n=N+1}^{M} a_n \right| < \varepsilon$ (15)

<u>Πόρισμα</u> Αν η σειρά $\sum_{1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει <u>τότε</u> $a_n \longrightarrow 0$

<u>Απόδειξη</u> Εφαρμόζουμε το κριτήριο Cauchy για $M=n$, $N=n-1$

Άρα $\forall\, \varepsilon>0$ $\exists\, N_0 \in \mathbb{N}$: αν $n-1 \geq N_0$ $(\Leftrightarrow n \geq \underbrace{N_0+1}_{n_0})$

ισχύει $\underbrace{\left| \sum_{k=1}^{n} a_n - \sum_{k=1}^{n-1} a_n \right|}_{=|a_n|} < \varepsilon$ ■

<u>Παράδειγμα</u> Η $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ αποκλίνει $(=+\infty)$ διότι

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{1}{e} \neq 0$$

Το αντίστροφο <u>ΔΕΝ</u> είναι σωστό. Μπορεί η $a_n \longrightarrow 0$ & $\sum a_n = +\infty$ πχ. $a_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ αλλά $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

Άλλος τρόπος απόδειξης της απόκλισης της αρμονικής σειράς (ο πιο σύντομος): Επειδή η $s_N = 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{N}$ είναι ↑ αν δεν αποκλίνει στο $+\infty$ συγκλίνει σε αριθμό, έστω στον ℓ. Τότε όμως

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2N} = \cancel{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}\ \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{2N-1}+\frac{1}{2N}\right) \geq \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)+\dots+\left(\frac{1}{2N}+\frac{1}{2N}\right) = \frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{N}$$ ■

$n \to \infty$ $\quad \ell \geq \frac{1}{2}+\ell$ άτοπο

<u>Ορισμός</u> Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα αν η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ είναι συγκλίνουσα

Πρόταση Αν η $\sum_{1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα τότε συγκλίνει και απλά (χωρίς τα απόλυτα)

Απόδειξη Απλή εφαρμογή του κριτηρίου Cauchy:

Αφού η $\sum_{1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει ικανοποιεί το κριτήριο Cauchy.

Άρα $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} : \quad \forall M > N \geq N_0 \quad \left|\sum_{n=N+1}^{M} |a_n|\right| < \varepsilon$

Άρα από την Τριγωνική ανισότητα

$$\left|\sum_{n=N+1}^{M} a_n\right| \leq \sum_{n=N+1}^{M} |a_n| < \varepsilon$$ συνεπώς και

η $\sum_{1}^{\infty} a_n$ ικανοποιεί το κριτήριο Cauchy, άρα συγκλίνει ∎

Το κριτήριο Σύγκρισης

Η απόδειξη αυτού του κριτηρίου είναι ίδια με την προηγούμενη πρόταση

Θεώρημα (κριτήριο σύγκρισης) Αν $a_n, b_n > 0$ και υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $a_n \leq b_n \ \forall n \geq n_0$, τότε αν η $\sum_{1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Απόδειξη Η $\sum b_n$ συγκλίνει άρα ικανοποιεί το κριτήριο Cauchy.

Οπότε $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall N > M > N_0 \quad \left|\sum_{n=M+1}^{N} b_n\right| < \varepsilon$

Άρα $\forall N > M > \max\{N_0, n_0\}$ θα ισχύει

$$\left|\sum_{n=M+1}^{N} a_n\right| \leq \left|\sum_{n=M+1}^{N} b_n\right| < \varepsilon$$

Άρα η $\sum_{1}^{\infty} a_n$ ικανοποιεί το κριτήριο Cauchy, άρα συγκλίνει. ∎

Πρόταση Με τις υποθέσεις του προηγούμενου θεωρήματος αν

$$\sum_1^\infty a_n = +\infty \implies \sum_1^\infty b_n = +\infty$$

Απόδειξη $b_1 + \dots + b_{n_0-1} + b_{n_0} + \dots + b_N \geq$

$$\geq b_1 + \dots + b_{n_0-1} + a_{n_0} + \dots + a_N =$$

$$= (b_1 + \dots + b_{n_0-1} - a_1 - a_2 - \dots - a_{n_0-1}) + (a_1 + \dots + a_N)$$

$$\xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty \qquad \blacksquare$$

Άσκηση Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά $\sum_{n=1}^\infty (\sqrt{n^2+1} - n)$

Λύση Φανερά $\sqrt{n^2+1} - n > 0$

Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο σύγκρισης:

$$\sum_{n=1}^\infty (\sqrt{n^2+1} - n) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(\sqrt{n^2+1} - n)(\sqrt{n^2+1} + n)}{\sqrt{n^2+1} + n} = \sum \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n}$$

$$\geq \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2} + n} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(\sqrt{2}+1)n} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = +\infty$$

$\blacksquare$