

# Μάθημα 4ο

Η  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  αποκλίνει  $(= +\infty)$  « Η αρμονική  
σειρά  
αποκλίνει » (1)

~~Η~~ Η  $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$  είναι γνησίως ----- (2)

αρκεί να δείξω ότι η υποκολουθία  $S_{2^N} \rightarrow +\infty$  (3)

(Αρκεί αν  $x_n \uparrow$  και  $x_{k_n} \rightarrow +\infty$  για κάποια υποκολουθία (4)

$x_{k_n}$  της  $x_n$  (όπου  $k_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \uparrow$ ) τότε  $x_n \rightarrow +\infty$ ) (5)

Οπως  $S_{2^N} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^N} =$  (6)

$= (1 + \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6}) + (\frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}) + \dots$  (7)

$+ (\frac{1}{2^{N-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^N})$  (8)

$\Rightarrow$  (9)



Κριτήριο Cauchy Από τις ακολουθίες γνωρίζουμε ότι (10)

~~Η~~ Η  $S_N$  συγκλίνει αν-ν είναι ακολουθία ----- (11)

$\forall \epsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall M > N \geq N_0$  ισχύει  $|S_M - S_N| < \epsilon$  (12)

Αλλά επειδή η  $S_N$  έχει συγκεκριμένη μορφή  $S_N = \sum_{n=1}^N a_n$  (13)

και  $S_M - S_N =$  -----

το κριτήριο παίρνει τη μορφή : Η σειρά  $\sum_1^{\infty} a_n$  συγκλίνει (14)

$\forall \epsilon > 0 \exists N_0 = N_0(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall M > N \geq N_0$  ισχύει  $|S_M - S_N| < \epsilon$  (15)

Πόρισμα Αν η σειρά  $\sum_1^\infty a_n$  συγκλίνει τότε  $a_n \rightarrow 0$  (1)

Απόδειξη εφαρμόζουμε το κριτήριο Cauchy για  $M=n, N=n-1$  (2)

Άρα  $\forall \epsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N}: \text{αν } n-1 \geq N_0 \Leftrightarrow n \geq \underbrace{\quad}_{n_0}$  (3)

Ισχύει  $\left| \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \right| < \epsilon$  (4)  
 $= |a_n|$  

Παράδειγμα Η  $\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$  αποκλίνει ( $= +\infty$ ) διότι (5)

$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \neq 0$  (6)

Το αντίστροφο ΔΕΝ είναι σωστό. Μπορεί η  $a_n \rightarrow 0$  (7)

ε  $\sum a_n = +\infty$  π.χ.  $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$  αλλ  $\sum_1^\infty \frac{1}{n} = +\infty$  (8)

Άλλος τρόπος απόδειξης της απόκλισης της αρμονικής σειράς (9)

(ο πρόστιμος) : Επειδή η  $S_N = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N}$  είναι  $\uparrow$  (10)

αν δεν αποκλίνει στο  $+\infty$  συγκλίνει σε αριθμό, έστω στον  $l$ . (11)

Τότε όπως  (12)

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n} = \cancel{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \dots +$  (13)

$+ \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) \geq \frac{1}{2} + \dots$  (14)

$n \rightarrow \infty \quad l \geq \frac{1}{2} + l$  άτοπο  (15)

Ορισμός Λέμε ότι η σειρά  $\sum_{n=1}^\infty a_n$  συγκλίνει απόλυτα (16)

αν η  $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$  είναι συγκλίνουσα (17)

Πρόταση Αν  $\sum_1^\infty a_n$  συγκλίνει απόλυτα τότε συγκλίνει και (1)  
 αλλά (χωρίς τα απόλυτα) (2)

Απόδειξη Αντί εφαρμογή του κριτηρίου Cauchy. (3)

Αφού  $\sum_1^\infty |a_n|$  συγκλίνει ικανοποιεί το κριτήριο Cauchy. (4)

Άρα  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall m > n \geq N_0$  (5)

Άρα από την τριγωνική ανισότητα (6)

$$\leq < \varepsilon \text{ ούτως και } (7)$$

$\sum_1^\infty a_n$  ικανοποιεί το κριτήριο Cauchy, άρα συγκλίνει  $\square$  (8)

### Το κριτήριο Σύγκρισης (9)

Η απόδειξη αυτού του κριτηρίου είναι ίδια με την προηγούμενη (10)

Πρόταση (11)

Θεώρημα (κριτήριο σύγκρισης) Αν  $a_n, b_n > 0$  και ~~α~~ (12)

υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε  $a_n \leq b_n \forall n \geq n_0$ , τότε αν η (13)

$\sum_1^\infty b_n$  συγκλίνει, τότε  $\sum_1^\infty a_n$  συγκλίνει. (14)

Απόδειξη Η  $\sum b_n$  συγκλίνει άρα ικανοποιεί το κριτήριο Cauchy. (15)

Ούτως  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \forall N > N_0$   $\left| \sum_{n=M+1}^N b_n \right| < \varepsilon$  (16)

Άρα  $\forall N > \max\{N_0, n_0\}$  θα ισχύει (17)

$$\left| \sum_{n=M+1}^N a_n \right| \leq \left| \sum_{n=M+1}^N b_n \right| < \varepsilon \quad (18)$$

Άρα  $\sum_1^\infty a_n$  ικανοποιεί το κριτήριο Cauchy, άρα συγκλίνει.  $\square$  (19)

Πρόταση Μς τις υποθέσεις του προηγούμενου θεωρήματος α-

(1)

$$\sum_1^{\infty} a_n = +\infty \implies \sum_1^{\infty} b_n = +\infty$$

(2)

Απόδειξη  $b_1 + \dots + b_{n_0-1} + b_{n_0} + \dots + b_N \geq$

(3)

$$\geq b_1 + \dots + b_{n_0-1} + a_{n_0} + \dots + a_N =$$

(4)

$$= (b_1 + \dots + b_{n_0-1} - a_1 - a_2 - \dots - a_{n_0-1}) + (a_1 + \dots + a_N) \quad (5)$$

$$\xrightarrow{N \rightarrow \infty} +\infty$$

□ (6)

Άσκηση Ελεγχξε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+1} - n)$  (7)

(8)

Λύση Φανερά  $\sqrt{n^2+1} - n > 0$

θα χρησιμοποιήσω το κριτήριο σύγκλισης :

(9)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+1} - n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{n^2+1} - n)(\sqrt{n^2+1} + n)}{\sqrt{n^2+1} + n} = \sum \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} \quad (10)$$

⇒

=

=

(11)

□ (12)