Μάθημα 5ο

<u>Πόρισμα</u> (κριτήριο οριακής σύγκρισης) Αν $a_n, b_n > 0$
και ισχύει $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell > 0$ τότε η σειρά

$$\sum_1^\infty a_n \text{ συγκλίνει} \iff \text{η } \sum_1^\infty b_n \text{ συγκλίνει}$$

<u>Απόδειξη</u> (αναγωγή στο κριτήριο σύγκρισης) Εφαρμόζουμε τον ορισμό στο όριο της διατύπωσης για $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$. Οπότε

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad \left| \frac{a_n}{b_n} - \ell \right| < \frac{\ell}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad -\frac{\ell}{2} < \frac{a_n}{b_n} - \ell < \frac{\ell}{2} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\tfrac{1}{2}\ell\right) b_n < a_n < \left(\tfrac{3}{2}\ell\right) b_n \qquad \forall n \geq n_0$$

Άρα από το κριτήριο σύγκρισης αν συγκλίνει η $\sum a_n$ συγκλίνει και η $\sum \left(\frac{1}{2}\ell\right) b_n$ άρα και η $\sum b_n$, ενώ αν
—״— η $\sum b_n \Longrightarrow$ συγκλίνει η $\sum \left(\frac{3}{2}\ell\right) b_n$ άρα και η $\sum a_n$ ■

<u>Παράδειγμα</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$. Θέτω $a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ & $b_n = \frac{1}{n}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sin(1/n)}{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 > 0$$ άρα αφού η $\sum \frac{1}{n}$ <u>αποκλίνει</u>
και η $\sum\limits_1^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ <u>αποκλίνει</u>

<u>Παράδειγμα</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2}$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos^2 n}{n^2} \right| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$

Άρα η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2}$ <u>συγκλίνει απολύτως</u> άρα <u>συγκλίνει</u>

<u>Παράδειγμα</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+n}$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+n} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty$ (1)

<u>Παράδειγμα</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n}}{n^2+n}$. Με ~~απλή σύγκριση~~: (2)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n-\sqrt{n}}{n^2+n}}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-\sqrt{n}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{n}} = 1 > 0$$ (3)

Άρα η σειρά αποκλίνει γιατί αποκλίνει η $\sum \frac{1}{n}$

Το ίδιο με απλή σύγκριση: Πότε ισχύει $n-\sqrt{n} \ge \frac{n}{2}$; (4)

$\Leftrightarrow \frac{n}{2} > \sqrt{n} \Leftrightarrow n > 4$ Άρα (5)

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n}}{n^2+n} \ge \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n/2}{n^2+n} = \frac{1}{2}\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty$$ (6)

<u>Παράδειγμα</u> $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-\sqrt{n}}$. Με οριακό $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2-\sqrt{n}}}{1/n^2} = 1 > 0$ (7)

(8)

άρα η σειρά συγκλίνει γιατί συγκλίνει η $\sum \frac{1}{n^2}$ (9)

Με απλή σύγκριση: Πότε ισχύει $n^2-\sqrt{n} > \frac{1}{2}n^2$;

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}n^2 > \sqrt{n} \Leftrightarrow n > \sqrt[3]{4}$ (10)

Άρα $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2-\sqrt{n}} \le \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{2}n^2} = 2\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$ (11)

<u>Παράδειγμα</u> Αν $\sum_{1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και $a_n \ge 0$ εξετάστε (12)

ως προς τη σύγκλιση της $\sum_{1}^{\infty} a_n^2$ και $\sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ (13)

Αφού $\sum_{1}^{\infty} a_n < \infty \Rightarrow a_n \longrightarrow 0$ άρα $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ (14)

ώστε $\forall n \ge n_0$ $0 \le a_n < 1 \Rightarrow a_n^2 < a_n \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n^2 \le \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n < \infty$ (15)

$\sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n} \le \sum_{1}^{\infty} a_n < \infty$ (16)

<u>Τηλεσκοπικές σειρές</u> Αν η a_n γράφεται ως $a_n = b_{n+1} - b_n$ (για κάποια ακολουθία b_n) η σειρά της a_n ονομάζεται τηλεσκοπική.

<u>Θεώρημα</u> Αν $a_n = b_{n+1} - b_n$ τότε η $\sum_1^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν κ μόνο αν υπάρχει το όριο $\lim b_n$. Σε αυτή την περίπτωση ισχύει $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n - b_1$

<u>Απόδειξη</u> Πράγματι $\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} (b_{n+1} - b_n) =$

$= (\cancel{b_2} - b_1) + (\cancel{b_3} - \cancel{b_2}) + (b_4 - \cancel{b_3}) + \cdots + (b_{N+1} - \cancel{b_N})$

$= b_{N+1} - b_1$ Άρα $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n = \lim_{N\to\infty} (b_{N+1} - b_1) =$

$= \lim_{N\to\infty} b_N - b_1$ $\boxed{}$

<u>Παράδειγμα</u> Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}(n+1)^{-1}$ συγκλίνει διότι είναι τηλεσκοπική:

$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \left(-\frac{1}{n+1}\right) - \left(-\frac{1}{n}\right)$. Συνεπώς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{-1}{N} + \frac{1}{1}\right) = 1$$

<u>Παράδειγμα</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n}{n!} - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\right) =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(-\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\right) - \left(-\frac{2^n}{n!}\right)\right) = \lim_{N\to\infty} \left(-\frac{2^N}{N!} - \left(-\frac{2^1}{1!}\right)\right)$$

$$= 2 - \lim_{N\to\infty} \frac{2^N}{N!} = 2 - 0 = 2$$

[Υπενθύμιση από ακολουθίες: αν $a_n \neq 0$ & $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \longrightarrow \ell < 1 \Rightarrow a_n \longrightarrow 0$]

$$\frac{2^{N+1}/(N+1)!}{2^N/N!} = \frac{2}{N+1} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 < 1 \Rightarrow \frac{2^N}{N!} \longrightarrow 0$$

Το κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy

Θεώρημα: Αν $a_n \geq 0$ και $a_n \downarrow$ τότε η σειρά $\sum_1^\infty a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^\infty 2^n a_{2^n}$ συγκλίνει.

Απόδειξη: Θέτουμε $s_N = a_1 + \dots + a_N$ και $t_N = 2a_2 + 2^2 a_{2^2} + \dots + 2^N a_{2^N}$

- Επειδή $a_n \geq 0$ $\quad s_N \leq s_{2^{N+1}-1} = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \dots + (a_{2^N} + a_{2^N+1} + \dots + a_{2^{N+1}-1})$

διότι $N \leq 2^{N+1} - 1 \Leftrightarrow N+1 \leq 2^{N+1}$ (απόδειξη με επαγωγή)

$$\overset{a_n \downarrow}{\leq} a_1 + 2a_2 + 2^2 a_{2^2} + \dots + 2^N a_{2^N} = a_1 + t_N$$

$\Longrightarrow \boxed{s_N \leq a_1 + t_N}$ Άρα αν συγκλίνει η t_N, δηλ. η $\sum_1 2^n a_{2^n}$ συγκλίνει και η s_N (γιατί η t_N ως συγκλίνουσα είναι φραγμένη άρα και η αύξουσα s_N είναι άνω φραγμένη)

- Αντίστροφα, αν $m \geq 2^N$ τότε

$$s_m \geq s_{2^N} = a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \dots + (a_{2^{N-1}+1} + \dots + a_{2^N})$$

$$\geq a_1 + a_2 + 2a_{2^2} + 2^2 a_{2^3} + \dots + 2^{N-1} a_{2^N} =$$

$$= a_1 + \frac{1}{2}\left(2a_2 + 2^2 a_{2^2} + 2^3 a_{2^3} + \dots + 2^N a_{2^N}\right)$$

$\Longrightarrow \boxed{s_m \geq a_1 + \frac{1}{2} t_N}$ Άρα αν s_m συγκλίνει είναι φραγμένη άρα είναι άνω φραγμένη η αύξουσα t_N οπότε από το κριτήριο φράγματος συγκλίνει.

[Από ακολουθίες: αν $x_n \longrightarrow \ell \Longrightarrow x_n$ φραγμένη]

Πχ. Η $\sum \frac{1}{n}$ αποκλίνει γιατί η $\sum_1^\infty 2^n \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^\infty 1 = \infty$. Ομοίως η $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} < \infty \Leftrightarrow p > 1$ διότι η $\sum_1^\infty 2^n \frac{1}{(2^p)^n} = \sum_1^\infty \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n < \infty \Leftrightarrow \left|\frac{1}{2^{p-1}}\right| < 1 \Leftrightarrow \boxed{p > 1}$