Μάθημα 6

<u>Άσκηση</u> Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n^p}$

<u>Λύση</u> Από το κριτήριο συμπύκνωσης, η σειρά συγκλίνει αν-ν

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n+1)(2^n)^p}$$

συγκλίνει. Αυτή ισούται με

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n+1}\cdot\left(\frac{1}{2^p}\right)^n \le \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^p}\right)^n$$

η οποία συγκλίνει αν το $\frac{1}{2^p} < 1 \iff \boxed{p>0}$

Αν $p \le 0$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-p}}{n+1} \ge \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty$

<u>Άσκηση</u> Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση την $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$

<u>Λύση</u> Από το κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy η σειρά συγκλίνει αν-ν συγκλίνει η

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n(\log 2^n)^p} = \sum \frac{1}{n^p(\log 2)^p} = \frac{1}{(\log 2)^p}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1$$

(Άρα η $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n}$ <u>αποκλίνει</u> και η $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$ <u>συγκλίνει</u>)

Μήπως συγκλίνει η $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)}$;

<u>Το ολοκληρωτικό κριτήριο</u>

<u>Θεώρημα</u> Αν $f:[1,\infty) \to \mathbb{R}$ μη αρνητική και φθίνουσα και $a_n = f(n)$, τότε η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν το ολοκλήρωμα $\int_1^{\infty} f(x)dx$ συγκλίνει

(δηλαδή $\lim_{t\to+\infty}\int_1^t f(x)\,dx \in \mathbb{R}$)

<u>Απόδειξη</u> Αφού $f\downarrow \Rightarrow f(n) \geq f(x) \geq f(n+1) \quad \forall x \in [n, n+1]$ (1)

Άρα $$\int_n^{n+1} f(n)\,dx \geq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geq \int_n^{n+1} f(n+1)\,dx \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \quad f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geq f(n+1) \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \quad a_n \geq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geq a_{n+1} \qquad (4)$$

$$\xRightarrow{\sum_{n=1}^{N}} \quad \sum_{n=1}^{N} a_n \geq \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geq \sum_{n=1}^{N} a_{n+1} \qquad (5)$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{N} a_n \geq \int_1^{N} f(x)\,dx \geq \sum_{n=2}^{N+1} a_n \qquad (6)$$

Άρα αν το ολοκλήρωμα συγκλίνει για $N \to +\infty$ η $\left(\int_1^N f(x)\,dx\right)_{N \in \mathbb{N}}$ είναι (7)

φραγμένη ακολουθία, άρα το $\sum_{n=2}^{N+1} a_n$ είναι άνω φραγμένη και (8)

αύξουσα άρα συγκλίνει, δηλαδή η $\sum_1^{\infty} a_n$ συγκλίνει (9)

Αντίστροφα, αν η $\sum_1^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε (10)

επειδή $$\int_1^t f(x)\,dx \leq \int_1^{[t]+1} f(x)\,dx \leq \sum_1^{\infty} a_n \qquad (11)$$

συνεπάγεται ότι η συνάρτηση $F(t) = \int_1^t f(x)\,dx$ (12)

είναι άνω φραγμένη και προφανώς $\uparrow$ (αφού αν $t_1 > t_2 \Rightarrow$ (13)

$\Rightarrow F(t_1) - F(t_2) = \int_1^{t_1} f - \int_1^{t_2} f = \int_{t_2}^{t_1} f(x)\,dx \geq 0$) (14)

Οπότε το $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ (και $= \sup\limits_{t \geq 1} F(t)$) ∎ (15)

Παράδειγμα Ελέγξτε με το ολοκληρωτικό κριτήριο την σύγκλιση (1)

της $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ για $p>0$ (2)

Λύση Αν $f(x) = \frac{1}{x^p}$: $[1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \geq 0$ $f\downarrow$ (3)

και $\frac{1}{n^p} = f(n)$. Άρα η $\sum \frac{1}{n^p}$ συγκλίνει αν-ν (4)

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$ συγκλίνει (υπάρχει σ.ο $\mathbb{R}$)

Όμως $\int_1^t \frac{1}{x^p}\, dx = \begin{cases} \log x \Big|_1^t = \log t & p=1 \\ \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_{x=1}^t = \frac{t^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} & 0<p\neq 1 \end{cases}$ (5) (6)

$\lim_{t\to\infty} \log t = +\infty$, $\lim_{t\to\infty} \frac{t^{1-p}-1}{1-p} \in \mathbb{R} \iff p>1$. $\blacksquare$ (7)

Εφαρμογές του κριτηρίου Σύγκρισης (8)

ΠΡΟΤΑΣΗ (κριτήριο λόγου D'Alambert) (σύγκριση με τη (9)
γεωμετρική σειρά) (10)

Για κάθε ακολουθία $a_n \neq 0$ (11)

- αν $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ τότε η σειρά $\sum_1^{\infty} a_n$ συγκλίνει (12)
  και μάλιστα απολύτως (13)
- αν $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ τότε η σειρά $\sum a_n$ αποκλίνει (14)

Απόδειξη Αν $\ell = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ και $\ell < 1$, εφαρμόζουμε (15)

τον ορισμό του ορίου για $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2} > 0$. Οπότε $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ (16)

ώστε $\forall\, n \geq n_0$

$$\left| \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - \ell \right| < \frac{1-\ell}{2} \Longrightarrow \quad (17)$$

$$-\frac{1-\ell}{2} < \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - \ell < \frac{1-\ell}{2} \quad (18)$$

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \frac{1+\ell}{2} < 1$. Θέτουμε $\lambda = \frac{1+\ell}{2}$ (1)

οπότε $0 < \lambda < 1$ και $\forall n \geq n_0$ $|a_{n+1}| < \lambda |a_n|$ (2)

Έτσι αν $n > n_0$ $|a_n| < \lambda |a_{n-1}| < \lambda \cdot \lambda |a_{n-2}| = \lambda^2 |a_{n-2}|$ (3)

$< \lambda^3 |a_{n-3}| < \dots < \lambda^{n-n_0} |a_{n_0}|$ (4)

Συνεπώς $\sum_{n=n_0}^{N} |a_n| \leq \sum_{n=n_0}^{N} \lambda^{n-n_0} |a_{n_0}| = |a_{n_0}| \cdot \sum_{n=0}^{N-n_0} \lambda^n < \infty$ $\quad n-(n-n_0)$ (5) (6)

Άρα από το κριτήριο σύγκρισης η $\sum |a_n|$ συγκλίνει (7)

Αν $\ell > 1$, εφαρμόζουμε τον ορισμό του ορίου για $\varepsilon = \frac{\ell-1}{2} > 0$ (8)

άρα $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$ $\left| \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - \ell \right| < \frac{\ell-1}{2} \Rightarrow$ (9)

$\Rightarrow \ell - \frac{\ell-1}{2} < \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > \frac{\ell+1}{2} > 1$ (10)

$\Rightarrow \forall n \geq n_0$ $|a_n| \uparrow \Rightarrow a_n \not\to 0 \Rightarrow$ η $\sum a_n$ αποκλίνει. ∎ (11)

(12)

Παρατήρηση Αν $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

π.χ. και για την $\sum \frac{1}{n} = \infty$ $\quad \left|\frac{1/(n+1)}{1/n}\right| \longrightarrow 1$ (13)

και για την $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$ $\quad \left|\frac{1/(n+1)^2}{1/n^2}\right| \longrightarrow 1$ (14)

Παρατήρηση Αν $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \lambda < 1$ $\forall n \geq n_0$, ακόμα και αν (15)

το όριο $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ δεν υπάρχει η $\sum a_n$ συγκλίνει (16)

και αν $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq \lambda > 1$ $\forall n \geq n_0$ ακόμα και αν $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ (17)

δεν υπάρχει η $\sum a_n$ αποκλίνει. (18)