Μάθημα 6

Άσκηση Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n^p}$

Λύση Από το κριτήριο συμπύκνωσης, η σειρά συγκλίνει αν-ν

$\sum_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει. Αυτή ισούται με

$$\sum_{1}^{\infty} \qquad \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^p}\right)^n$$

η οποία συγκλίνει αν το $\frac{1}{2^p} < 1 \iff \boxed{p > 0}$

Αν $p \leq 0$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\quad}{\quad} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \qquad = \infty$

Άσκηση Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση την $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$

Λύση Από το κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy η σειρά συγκλίνει αν-ν συγκλίνει η $\sum_{n=2}^{\infty} \qquad =$

$$= \sum \frac{1}{\quad} = \frac{1}{\quad} \sum_{n=2}^{\infty} \qquad < \infty \iff p$$

(Άρα η $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ ------ και η $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$ ----

Μήπως συγκλίνει η $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)(\log \log n)}$;

Το ολοκληρωτικό κριτήριο

Θεώρημα Αν $f: [1, \infty) \to \mathbb{R}$ μη αρνητική και φθίνουσα και $a_n = f(n)$, τότε η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν το ολοκλήρωμα $\int_1^{\infty} f(x)dx$ συγκλίνει

(δηλαδή $\lim_{t \to +\infty} \int_1^t f(x)\,dx \in \mathbb{R}$)

Απόδειξη Αφού $f\downarrow \Rightarrow \quad f(n) \quad f(x) \quad f(n+1) \quad \forall x\in[n,n+1]$ (1)

Άρα $\quad \int_n^{n+1} f(n)\,dx \quad \int_n^{n+1} f(x)\,dx \quad \int_n^{n+1} f(n+1)\,dx$ (2)

$\Rightarrow \quad f(n) \quad \int_n^{n+1} f(x)\,dx \quad f(n+1)$ (3)

$\Rightarrow \quad a_n \quad \int_n^{n+1} f(x)\,dx \quad a_{n+1}$ (4)

$\xrightarrow{\sum_{n=1}^{N}} \quad \sum_{n=1}^{N} a_n \quad \sum_{n=1}^{N}\int_n^{n+1} f(x)\,dx \quad \sum_{n=1}^{N} a_{n+1}$ (5)

$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{N} a_n \quad \int_1^{N} f(x)\,dx \quad \sum a_n$ (6)

Άρα αν το ολοκλήρωμα συγκλίνει για $N\to+\infty$ η $\left(\int_1^N f(x)\,dx\right)_{N\in\mathbb{N}}$ είναι (7)

φραγμένη ακολουθία, άρα το $\sum_{n=2}^{N+1} a_n$ είναι άνω φραγμένη και (8)

αύξουσα άρα συγκλίνει, δηλαδή η $\sum_1^{\infty} a_n$ συγκλίνει (9)

Αντίστροφα, αν η $\sum_1^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε (10)

επειδή $\quad \int_1^t f(x)\,dx \le \int_1^{[t]+1} f(x)\,dx \le \sum_1^{\infty} a_n$ (11)

συνεπάγεται ότι η συνάρτηση $F(t)=\int_1^t f(x)\,dx$ (12)

είναι άνω φραγμένη και προφανώς $\uparrow$ (αφού αν $t_1>t_2 \Rightarrow$ (13)

$\Rightarrow$) (14)

Οπότε το $\lim_{t\to+\infty} F(t)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ (και $=\sup_{t\ge 1} F(t)$) ■ (15)

Παράδειγμα Ελέγξτε με το ολοκληρωτικό κριτήριο την σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ για $p>0$

Λύση Αν $f(x) = \frac{1}{x^p} : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \geq 0$ $f \downarrow$ και $\frac{1}{n^p} = f(n)$. Άρα η $\sum \frac{1}{n^p}$ συγκλίνει αν-ν

Όμως
$$\int_1^t \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \log x \Big|_1^t = \log t & p=1 \\ \left.\dfrac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_{x=1}^{t} = \dfrac{t^{1-p}}{1-p} - \dfrac{1}{1-p} & 0<p\neq 1 \end{cases}$$

$\lim_{t\to\infty} \log t = +\infty$, $\lim_{t\to\infty} \frac{t^{1-p}-1}{1-p} \in \mathbb{R} \iff p>1$. ☒

Εφαρμογές του κριτηρίου Σύγκρισης

ΠΡΟΤΑΣΗ (κριτήριο λόγου D'Alambert) (σύγκριση με τη γεωμετρική σειρά)

Για κάθε ακολουθία $a_n \neq 0$

- αν $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ τότε η σειρά $\sum_1^{\infty} a_n$ συγκλίνει και μάλιστα απολύτως
- αν $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ τότε η σειρά $\sum a_n$ αποκλίνει

Απόδειξη Αν $l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ και $l<1$, εφαρμόζουμε τον ορισμό του ορίου για $\varepsilon =$. Οπότε $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall\, n \geq n_0$

$$\left| \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - l \right| < \qquad \Longrightarrow$$

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \quad < 1$. Θέτουμε $\lambda = \frac{1+l}{2}$

οπότε $0 < \lambda < 1$ και $\forall n \geq n_0$ $|a_{n+1}| < \lambda |a_n|$

Έτσι αν $n > n_0$ $|a_n| < \lambda |a_{n-1}| < \lambda \cdot \lambda |a_{n-2}| = \lambda^2 |a_{n-2}|$

$< \lambda^3 |a_{n-3}| < \dots < \lambda \, |a_{n_0}|$

$n_0 = n-(n-n_0)$

Συνεπώς $\sum_{n=n_0}^{N} |a_n| \leq \sum_{n=n_0}^{N} \quad = \quad < \infty$

Άρα από το κριτήριο σύγκρισης η $\sum |a_n|$ συγκλίνει

Αν $l > 1$, εφαρμόζουμε τον ορισμό του ορίου για $\varepsilon = \frac{l-1}{2} > 0$

άρα $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$ $\left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - \quad \right| < \frac{l-1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow l - \frac{l-1}{2} < \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > \quad > 1$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0$ $|a_n| \uparrow \Rightarrow a_n \not\to 0 \Rightarrow$ η $\sum a_n$ αποκλίνει. ∎

<u>Παρατήρηση</u> Αν $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

π.χ. και σειρά $\sum \frac{1}{n} = \infty$ $\quad \left|\frac{1/(n+1)}{1/n}\right| \longrightarrow 1$

και σειρά $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$ $\quad \left|\frac{1/(n+1)^2}{n^2}\right| \longrightarrow 1$

<u>Παρατήρηση</u> Αν $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \lambda < 1$ $\forall n \geq n_0$, ακόμα και αν το όριο $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ δεν υπάρχει η $\sum a_n$ συγκλίνει

και αν $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq \lambda > 1$ $\forall n \geq n_0$ ακόμα και αν $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ δεν υπάρχει η $\sum a_n$ αποκλίνει.