# ΜΑΘΗΜΑ 7°

Άσκηση

Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τις $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ και $\sum \frac{n^p}{n!}$ (1)

Λύση Αν $a_n = \frac{1}{n!}$, τότε $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \qquad = \qquad \to \; <1$ (2)

Άρα η $\sum \frac{1}{n!}$ ______ (3)

Αν $a_n = \frac{n^p}{n!} \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_ \left( \qquad \right)^p$ (4)

$= \frac{1}{n+1}\left(1+ \qquad \right)^p \longrightarrow$ (5)

Άρα η $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^p}{n!}$ ______ (6)

Άσκηση $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$, (δύσκολη:) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\sqrt{n}}}{n!}$ (7)

Άσκηση Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά $\sum_{1}^{\infty} \frac{a^n}{n^a}$ για (8)
$a \in \mathbb{R}$

Άσκηση Βρείτε για ποια $x \geq 0$ συγκλίνουν οι σειρές (9)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3} x^n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)\cdot(3n)!}{(4n)!} x^n$ (10)

Λύση Θέτω $a_n = \frac{3^n x^n}{n^3}$ οπότε $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{3}{\qquad}\right| =$ (11)

$= \qquad \xrightarrow[n\to\infty]{}$ . Άρα αν $|x| <$ η σειρά (12)

συγκλίνει απολύτως. Αν $|x| >$ η σειρά αποκλίνει (13)

και μένει η περίπτωση $x =$ · και $x =$ (14)

Αν $x =$ η σειρά είναι ίση με την $\sum$ (15)

Αν $x =$ — // ______ $\sum$ (16)

# Το κριτήριο της n-οστης ρίζας του Cauchy

<u>Πρόταση</u> (κριτήριο n-οστης ρίζας του Cauchy) (σύγκριση με την γεωμετρική σειρά) (1)

$\forall\, a_n \in \mathbb{R}$ (2)

- αν $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ τότε η σειρά συγκλίνει απολύτως (3)
- αν $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ τότε η σειρά αποκλίνει. (4)

<u>Απόδειξη</u> Θέτουμε $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \geq 0$. Αν $\ell < 1$ (5)

εφαρμόζουμε τον ορισμό του ορίου για $\varepsilon = \qquad > 0$ (6)

οπότε $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad \left| \sqrt[n]{|a_n|} - \ell \right| <$ (7)

$\Longrightarrow \quad |a_n| < \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$. Αλλά η σειρά $\sum\limits_{n_0}^{\infty} \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$ συγκλίνει (8)

γιατί $\qquad$ άρα συγκλίνει και η $\sum |a_n|$ (9)

Αν τώρα $\ell > 1$ εφαρμόζουμε τον ορισμό για $\varepsilon = \qquad > 0$ οπότε (10)

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad \left| \sqrt[n]{|a_n|} - \ell \right| < \qquad \Longrightarrow$ (11)

$$\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n < |a_n| \Longrightarrow a_n \not\longrightarrow 0 \quad \text{αφού} \quad \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n \longrightarrow \qquad (12)$$

Άρα ~~a~~ $\sum a_n$ ______ $\blacksquare$ (13)

<u>Παρατήρηση</u> $\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1$ ~~...~~ και η $\sum \frac{1}{n}$ αποκλίνει (14)

$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \longrightarrow 1$ και η $\sum \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει (15)

Άρα δεν γίνεται να ξέρουμε την σύγκλιση της $\sum a_n$ (16)

μόνο από το αν $\sqrt[n]{|a_n|} \longrightarrow 1$. (17)

Σελ 3

Ασκήσεις $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ : $\sqrt[n]{\left|\frac{n}{2^n}\right|} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} < 1$ (1)

άρα η $\sum \frac{n}{2^n}$ συγκλίνει (2)

---

$\sum_{1}^{\infty} \frac{n^p}{e^n}$ : $\sqrt[n]{\left|\frac{n^p}{e^n}\right|} =$ ______ $\longrightarrow \frac{1}{e} < 1$ (3)

$\Rightarrow$ η $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^p}{e^n}$ ______ (4)

---

$x \geq 0$ $\sum \frac{2^n}{n^2} x^n$ $\sqrt[n]{| \quad |} = |x|$ ______ $\longrightarrow$ (5)

αν $|x| <$ η σειρά συγκλίνει απολύτως άρα και απλά (6)

αν $|x| >$ η σειρά αποκλίνει (7)

αν $x =$ η σειρά ______ (8)

αν $x =$ η σειρά (9)

---

$\sum \frac{(n!)^n}{n^{n^2}}$ : $\sqrt[n]{\frac{(n!)^n}{n^{n^2}}} =$ ______ $\longrightarrow$ ? (10)

# Εναλλάσουσες σειρές

**Πρόταση** (κριτήριο Leibniz) Αν $a_n \downarrow$ & $a_n \longrightarrow 0$

Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ συγκλίνει

**Απόδειξη** Εύκολα βλέπουμε ότι $S_{2N} \downarrow$ διότι

$$S_{2(N+1)} - S_{2N} = (-1)^{2N+1} a_{2N+1} + (-1)^{2N+2} a_{2N+2} =$$

$$= \qquad\qquad < 0$$

Άρα $S_{2(N+1)} < S_{2N}$.

Αντιθέτως $S_{2N-1} \uparrow$ διότι $S_{2(N+1)-1} - S_{2N-1} =$

$$= S_{2N+1} - S_{2N-1} = (-1)^{2N} a_{2N} + (-1)^{2N+1} a_{2N+1} =$$

$$= \qquad\qquad > 0$$

άρα $S_{2(N+1)-1} > S_{2N-1}$. Επιπλέον $S_{2N-1} \le S_{2N}$ διότι

$S_{2N} - S_{2N-1} = (-1)^{2N} a_{2N} \geq 0$. Άρα

$$S_1 \le S_{2N-1} \le S_{2N} \le S_2$$

Άρα οι $S_{2N-1}$ & $S_{2N}$ συγκλίνουν (γιατί ) και μάλιστα συγκλίνουν στο ίδιο όριο

αφού $S_{2N} - S_{2N-1} = a_{2N} \longrightarrow 0$. Συνεπώς και η $S_{2N}$ & η $S_{2N-1}$

συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό, άρα η $S_N$ είναι συγκλίνουσα.

[ακολουθίες: αν $x_{2N} \longrightarrow \ell$ & $x_{2N-1} \longrightarrow \ell \Rightarrow x_N \longrightarrow \ell$]

Π.χ. Η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ συγκλίνει (παρόλο που η $\sum \frac{1}{n}$ αποκλίνει)

αφού $\frac{1}{n} \downarrow$ & $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$

**Άσκηση** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cos\frac{a}{n}$ $\quad a \in \mathbb{R}$

**Λύση** Φανερά $\frac{\cos(a/n)}{n} \longrightarrow 0$. Άρα αν είναι και φθίνουσα θα προκύψει η σύγκλιση της σειράς από το κριτήριο Dirichlet. Θέτουμε $f(x) = \frac{\cos(a/x)}{x}$ για $x \geq 1$ &

Ελέγχουμε την μονοτονία της: $f'(x) = \frac{\qquad\qquad}{x^2}$

$= \frac{\qquad\qquad}{x^2}$ $< 0$ για μεγάλα $x$

διότι $\frac{1}{x^2} > 0$ & $\frac{a \sin a/x}{x} - \cos\frac{a}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{}$

Συνεπώς $\exists n_0$ ώστε $\forall n \geq n_0$ η $\frac{1}{n} \cos\frac{a}{n} \downarrow$

άρα η $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \cos\frac{a}{n}$ συγκλίνει άρα & η αρχική. $\blacksquare$

**Άσκηση** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^p e^{q\sqrt{n}}$ $\quad p, q \in \mathbb{R}$.

**Λύση** Αν $q > 0$ $\quad n^p e^{q\sqrt{n}} = e^{p\log n} e^{q\sqrt{n}} = e^{p\log n + q\sqrt{n}}$

$= e^{\sqrt{n}\left(p \frac{\log n}{\sqrt{n}} + q\right)} \longrightarrow +\infty$ διότι $\frac{\log n}{\sqrt{n}} = 4 \frac{\log \sqrt[4]{n}}{\sqrt{n}} \leq$

$\leq 4 \frac{\sqrt[4]{n} - 1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$.

Άρα $(-1)^n n^p e^{q\sqrt{n}} \not\longrightarrow 0$ & η σειρά ____

Αν $q = 0$ $\quad p \geq 0$ αποκλίνει (γιατί )

$\qquad\qquad p < 0$ συγκλίνει (γιατί )

Αν $q < 0$ Ελέγξτε ότι η $f(x) = x^p e^{q\sqrt{x}}$ είναι τελικά φθίνουσα (δηλ. $\exists x_0 : \forall x \geq x_0$ $f \downarrow$) οπότε

η $\sum_{n=[x_0]+1}^{\infty} (-1)^n n^p e^{q\sqrt{n}}$ συγκλίνει άρα & η αρχική

να ελεγχθεί ότι $n^p e^{q\sqrt{n}} \longrightarrow 0$ όταν $q < 0$.