ΜΑΘΗΜΑ 8°

Αναδιατάξεις σειρών: Ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στην «άθροιση» των απείρων όρων μιας σειράς;

<u>Παράδειγμα</u> Γνωρίζουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ συγκλίνει. Ας (1)
ονομάσουμε ℓ το όριό της, δηλαδή $\ell = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. (2)

$$\ell = \lim_{N\to\infty} \Big(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \underbrace{- \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}_{(-)} \underbrace{- \frac{1}{6} + \frac{1}{7}}_{(-)} \cdots \underbrace{- \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N+1}}_{(-)} \Big) \le \quad (3)$$

$\le 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$. Αλλάζουμε τώρα τη σειρά της άθροισης (4)
ώστε κάθε αρνητικός όρος να εμφανίζεται αφού εμφανιστούν <u>δύο</u> θετικοί: (5)

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots \quad (6)$$

Παρατηρούμε ότι κάθε τριάδα όρων είναι της μορφής: (7)

$$\frac{\qquad}{\qquad} + \frac{\qquad}{\qquad} - \frac{\qquad}{\qquad} = \frac{8k-3}{(\qquad)(\qquad)(\quad)} \ge 0 \quad (8)$$

Άρα (9)

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}}_{(+)} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}}_{(+)} + \cdots > 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \ge \ell$$

(10)
Βλέπουμε δηλαδή ότι αλλάζοντας τη σειρά της άθροισης οδηγούμαστε (11)
σε άλλο αποτέλεσμα (ή όχι στο αρχικό όριο ℓ).

Για να μιλήσουμε για αυτό το θέμα πρέπει πρώτα να βρούμε (12)
ένα τρόπο να γράφουμε αυστηρά την αλλαγή της σειράς άθροισης. (13)

<u>Ορισμός</u> Μια συνάρτηση (ακολουθία) $k_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ η οποία είναι (14)
1-1 και επί ονομάζεται <u>αναδιάταξη</u> του $\mathbb{N}$. (15)

Πχ $k_n = \begin{cases} n-1 & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ n+1 & \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
k_n											

<u>Ορισμός</u> Αν $k_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ μια αναδιάταξη του $\mathbb{N}$, η ακολουθία $a'_n = a_{k_n}$ ονομάζεται αναδιάταξη της ακολουθίας a_n και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n = \sum_{n=1}^{\infty}$ αναδιάταξη της $\sum_{1}^{\infty} a_n$.

<u>Λήμμα 1</u> Αν k_n τότε $k_n \longrightarrow +\infty$

<u>Απόδειξη</u> Έστω ότι $M > 0$. Θέτουμε $K = \{k_n : n \in \mathbb{N}\}$. Το $K \cap \{1, 2, \dots, [M]+1\}$ είναι ________ με το πολύ $[M]+1$ στοιχεία. Έστω ότι $K \cap \{1, 2, \dots, [M]+1\} = \{k_{n_1}, k_{n_2}, \dots, k_{n_r}\}$. Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2, \dots, n_r\} + 1$. Αν $n \geq n_0$ $k_n \notin \{k_{n_1}, \dots, k_{n_r}\}$ γιατί η k_n ________ ∎

Άρα $k_n \geq [M]+1 > M \Rightarrow k_n \longrightarrow +\infty$

<u>Λήμμα 2</u> Αν k_n αναδιάταξη του $\mathbb{N}$ τότε $\forall\, N \in \mathbb{N}$ υπάρχει $m = m(N) \in \mathbb{N}$ ώστε $\{1, 2, \dots, N\} \subseteq \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$

<u>Απόδειξη</u> Εφαρμόζουμε το Λήμμα 1 για $M = \quad +1$. Οπότε υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall\, n \geq m$ $k_n \geq N+1$. Συνεπώς αφού k_n επί (ως ________) οι αριθμοί $1, 2, \dots, N$ είναι τιμές της k_n για $n < m$ δηλαδή $\{1, 2, \dots, N\} \subseteq \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ ∎

Πρόταση Αν μια σειρά συγκλίνει απολύτως τότε κάθε αναδιάταξή της συγκλίνει στον ίδιο αριθμό.

Απόδειξη Έστω ότι k_n αναδιάταξη του $\mathbb{N}$ και $\sum a_n$ σειρά που συγκλίνει απολύτως. Ας θέσουμε $\ell = \sum_{1}^{\infty} a_n$. Θα δείξουμε ότι $\sum a_{k_n} = \ell$. Έστω ότι $\varepsilon > 0$. Αφού η $\sum |a_n|$ συγκλίνει τα μερικά της αθροίσματα είναι ______ Άρα $\exists N_0 = \quad \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall N > M \geq N_0$ να ισχύει $\quad < \varepsilon/2$

Αφήνοντας $N \to +\infty \Rightarrow \quad \leq \varepsilon/2$ Άρα $\forall M \geq N_0$ ισχύει $\quad < \varepsilon$. Άρα κ για $M =$ δηλ $\quad < \varepsilon$

Από το προηγούμενο λήμμα για το N_0 υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\subseteq$$

Έστω τώρα ότι $m \geq m_0$. Έχουμε $\left| \ell - \sum_{n=1}^{m} a_{k_n} \right| =$

$$= \left| \sum_{n \notin} a_n \right| \leq \sum_{n \notin} |a_n| \leq$$

$$\leq \sum_{n \notin \{k_1, k_2 \dots k_{m_0}\}} |a_n| \leq \sum_{n \notin \{1, 2, \dots, N_0\}} |a_n| = \sum_{n=} |a_n| < \varepsilon$$

■

Το Θεώρημα Riemann

Θεώρημα Για κάθε a_n ώστε $\sum a_n$ συγκλίνει κ $\sum_{1}^{\infty} |a_n| = +\infty$ και $\forall x \in \mathbb{R}$ υπάρχει αναδιάταξη a_{k_n} της a_n ώστε

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$$

Άσκηση Αν $a_n = \frac{\cos(n\pi)}{n}$ υπάρχει αναδιάταξη a_n' της a_n ώστε

$\sum a_n' = e$;

Λύση $\cos(n\pi) = (-1)^{n-1}$. Η $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ συγκλίνει

(γιατί;)

και η $\sum \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right|$ αποκλίνει. Άρα από το Θ. Riemann

υπάρχει αναδιάταξη a_n' ώστε $\sum a_n' = e$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$ Η τάξη μεγέθους του παρονομαστή είναι

$(\qquad)^{1/2} = \qquad$. Θέτω $a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$ $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$ και

υπολογίζω το $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\qquad}{\qquad} = \frac{\qquad}{n^{3/2}\sqrt{\qquad}}$

$= 1 > 0$. Επειδή $\sum b_n$ συγκλίνει (γιατί)

$\Rightarrow \sum a_n$ συγκλίνει

② Για ποια a η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{n^a \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)}^{a_n}$ συγκλίνει;

$= \sum_{n=1}^{\infty} n^a \frac{\qquad}{\sqrt{\qquad}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha}}{\sqrt{\qquad}\cdot(\qquad)}$

Συγκρίνουμε οριακά με την $b_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2} - \quad}}$

$\frac{a_n}{b_n} = \qquad = \qquad \longrightarrow 1$ Άρα η $\sum a_n$

συγκλίνει $\Leftrightarrow$ η $\sum b_n$ συγκλίνει $\Leftrightarrow \frac{3}{2} - \quad > 1 \Leftrightarrow a <$