Μάθημα 10ο:

<u>Δυναμοσειρές</u> ονομάζουμε τις σειρές της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ όπου a_n ακολουθία πραγματικών αριθμών και $x \in \mathbb{R}$.

Το κριτήριο n-στης ρίζας μας δίνει ένα διάστημα για τα x για τα οποία η σειρά συγκλίνει απολύτως:

Αν $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} < 1$ η σειρά συγκλίνει απολύτως άρα και απλά. Αυτό συμβαίνει αν $|x| < \dfrac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$ (εφόσον βέβαια το όριο υπάρχει)

Άρα αν θέσουμε $R = \dfrac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει $\forall x \in (-R, R)$ $(\Leftrightarrow |x| < R)$

Ο αριθμός R ονομάζεται ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

Από το κριτήριο n-στης ρίζας αν $|x| > R$ $(\Leftrightarrow \lim \sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1)$ η σειρά αποκλίνει. Και αν $|x| = R$ το κριτήριο ρίζας δεν μας δίνει συμπέρασμα. Έτσι για $x = \pm R$ εξετάζουμε τη σειρά κατά περίπτωση.

<u>Παράδειγμα</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$. Η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε $x \in (-R, R)$ με $R = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{|\frac{1}{n}|}} =$

$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

Αν $x \notin [-1, 1]$ η σειρά αποκλίνει

Αν $x = 1$ προκύπτει η σειρά $\sum \frac{(+1)^n}{n}$ που <u>αποκλίνει</u>

Αν $x = -1$ —//— $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ που <u>συγκλίνει</u>

ΜΕΡΟΣ 2ο : ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Υπενθύμιση: μια $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ λέμε ότι είναι συνεχής στο $x_0\in\mathbb{R}$
αν $\forall\, \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0\ (\delta=\delta(\varepsilon,x_0))$ ώστε $\forall x: |x-x_0|<\delta$
ισχύει $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

Αν θέσουμε $f(x)=x^2$, $\varepsilon=\frac{1}{2}$, $x_0=1$ και αναζητήσουμε το κατάλληλο
$\delta>0$ ώστε να ισχύει $|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\frac{1}{2}$

βλέπουμε ότι η τελευταία ικανοποιείται αν-ν $|x-x_0|\,|x+x_0|<\frac{1}{2}$

δηλαδή $\iff |x-1|\,|x+1|<\frac{1}{2}$ (*)

Αν $|x-1|<\delta \iff -\delta<x-1<\delta \iff 1-\delta<x<1+\delta$
$\Rightarrow 2-\delta<x+1<2+\delta$. Άρα θα ισχύει η (*) αν
ισχύει $|x-1|\,(2+\delta)<\frac{1}{2}$ υπό τον όρο $\boxed{2-\delta\geq 0}$

~~άρα αν~~ $\cancel{|x-1|<\frac{1}{2(2+\delta)}}$ ~~υπό τον όρο~~ $\cancel{\boxed{\delta\leq 2}}$

άρα αν $\delta(2+\delta)<\frac{1}{2}$ υπό τον όρο $\delta\leq 2$ θα ισχύει
η ζητούμενη. π.χ. αν $\delta=\frac{1}{4}$ η $\delta^2+2\delta<\frac{1}{2}$ είναι λάθος
αλλά για $\delta=\frac{1}{5}$ ισχύει $\frac{1}{5^2}+\frac{2}{5}=\frac{1}{25}+\frac{10}{25}=\frac{11}{25}<\frac{1}{2}$

καταλήξαμε ότι αν $|x-1|<\frac{1}{5} \Rightarrow |x^2-1^2|<\frac{1}{2}$

Αν κρατήσουμε ίδιο το $\varepsilon=\frac{1}{2}$ και αλλάξουμε το x_0 θα
λειτουργήσει το $\delta=\frac{1}{5}$ το οποίο λειτουργεί όταν $x_0=1$;

Πχ Αν $x_0=9$ και θέσω $x=9+\frac{1}{9}$ τότε $|x-x_0|=\frac{1}{9}<\delta=\frac{1}{5}$
αλλά $|x^2-x_0^2|=\left(9+\frac{1}{9}\right)^2-9^2=2\cdot\frac{1}{9}\cdot 9+\frac{1}{81}=2+\frac{1}{81}\not<\frac{1}{2}$

Μπορούμε να διαλέξουμε $\delta>0$ ώστε να ~~...~~ είναι ώστε η $|f(x)-f(x_0)|<\frac{1}{2}$ και για $x_0=1$ και για $x_0=9$;

<u>Ναι</u> πχ. Αν $0<\delta=\frac{1}{100}$ (αντί για $\frac{1}{5}$) τότε η $|x^2-1^2|<\frac{1}{2}$

Ισχύει αφού $\frac{1}{100}<\frac{1}{5}$ και αν $|x-9|<\frac{1}{100}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 9-\frac{1}{100}<x<9+\frac{1}{100} \Rightarrow 18-\frac{1}{100}<x+9<18+\frac{1}{100}$$

Οπότε $|x^2-9^2|=|x-9|\,|x+9|<\frac{1}{100}\left(18+\frac{1}{100}\right)=\frac{1801}{10.000}<\frac{1}{2}$

Το $\delta=\frac{1}{100}$ είναι κατάλληλη επιλογή για $x_0=1$ και $x_0=9$ αλλά είναι και για κάθε ~~αλλο~~ x_0 (με $\varepsilon=1/2$)

<u>Όχι πάλι</u>. Αν $x_0=200$ και $x=200+\frac{1}{200}$ τότε να μεν $|x-x_0|=\frac{1}{200}<\frac{1}{100}$ αλλά

$$|x^2-x_0^2|=\left(200+\frac{1}{200}\right)^2-200^2=2\cdot 200\cdot\frac{1}{200}+\frac{1}{200^2}=$$
$$=2+\frac{1}{200^2}\not<1/2$$

Η ίδια κατάσταση επαναλαμβάνεται <u>όσο</u> και $\delta>0$ να επιλέξουμε δηλαδή πάντα θα υπάρχει ένα x_0 που το δ που επιλέξαμε να μην είναι κατάλληλο.

Με άλλα λόγια δεν μπορούμε να επιλέξουμε $\delta>0$ ώστε να ισχύει η $|x-x_0|<\delta \Rightarrow |x^2-x_0^2|<1/2$

<u>ομοιόμορφα</u> για όλα τα $x_0\in\mathbb{R}$. Λέμε ότι η $f(x)=x^2$ ενώ είναι συνεχής σε κάθε $x_0\in\mathbb{R}$, εν τούτοις Δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

<u>Ορισμός</u> Μια $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ λέγεται ομοιόμορφα συνεχής στο A αν $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta \underset{}{>} 0$ ($=\delta(\varepsilon)$) ώστε

αν $|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ $\underline{\forall\, x_0 \in A}$

(ίνα $\delta > 0$ για όλα τα $x_0 \in A$)

<u>Πρόταση</u> Αν $f: A \to \mathbb{R}$, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \forall\, x_n \in A \;\; \forall\, y_n \in A \text{ με } x_n - y_n \longrightarrow 0 \text{ συνεπάγεται} \\ f(x_n) - f(y_n) \longrightarrow 0 \end{cases}$

<u>Απόδειξη</u> "$\Longrightarrow$" Έστω ότι $x_n - y_n \longrightarrow 0$. Θα δείξουμε ότι $f(x_n) - f(y_n) \longrightarrow 0$. Έστω ότι $\varepsilon > 0$ αναζητούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_0$ $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$. Όμως f ομ. συνεχής άρα $\exists\, \delta > 0$ ώστε αν $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ $\forall x_0 \in A$

Αφού $x_n - y_n \longrightarrow 0$ $\exists\, n_0 : \forall n \geq n_0$ $|x_n - y_n| < \delta$

Άρα (για $x \equiv x_n$ $x_0 = y_n$) θα ισχύει $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$

"$\Longleftarrow$" Αν η f δεν είναι ομ. συνεχής $\exists\, \varepsilon > 0$ ώστε $\forall \delta > 0$ υπάρχουν $x, x_0 \in A$ με $|x - x_0| < \delta$ και $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$

Αν $\delta = 1$ $\exists$ x_1, y_1 με $|x_1 - y_1| < \delta = 1$ και $|f(x_1) - f(y_1)| \geq \varepsilon$

Αν $\delta = \frac{1}{2}$ $\exists$ x_2, y_2 με $|x_2 - y_2| < \delta = \frac{1}{2}$ και $|f(x_2) - f(y_2)| \geq \varepsilon$

$\vdots$

Αν $\delta = \frac{1}{n}$ $\exists$ x_n, y_n με $|x_n - y_n| < \delta = \frac{1}{n}$ και $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$

Έτσι κατασκευάζουμε ακολουθίες x_n, y_n με $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ και $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Δηλαδή $x_n - y_n \longrightarrow 0$ αλλά $f(x_n) - f(y_n) \not\longrightarrow 0$ άτοπο. $\boxtimes$

Ισως

Η $f(x) = x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής αλλά όχι ομοιόμορφα (1)

(2)

συνεχής

Απόδειξη θέτω $x_n = n$ και $y_n = n + \frac{1}{n}$ (3)

$$|x_n - y_n| = \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{αλλά} \quad |x_n^2 - y_n^2| =$$ (4)

$$= \left| n^2 - n^2 - 2n\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right| = 2 + \frac{1}{n} \not\longrightarrow 0 \quad \blacksquare$$ (5)