Μάθημα 11

Ορισμός Μια συνάρτηση $f: A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση Lipschitz με σταθερά M αν $\forall\, x, y \in A$ ισχύει

$$|f(x) - f(y)| \leq M\, |x-y|$$

Παράδειγμα τέτοιων συναρτήσεων είναι οι συναρτήσεις με φραγμένη παράγωγο εξαιτίας του Θ. Μέσης Τιμής:

Αν $f: (a\ b) \longrightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και $|f'(\xi)| \leq M \ \forall\, \xi \in (a\ b)$ τότε η f είναι Lipschitz με σταθερά M, διότι αν $x, y \in (a\ b)$ υπάρχει ξ ανάμεσα στα x, y ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \Rightarrow |f'(\xi)| = \underline{\qquad\qquad} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x)-f(y)| = \qquad\qquad \leq M |\qquad|$$

Πρόταση Οι συναρτήσεις Lipschitz είναι ομ. συνεχείς

Απόδειξη $\forall \varepsilon > 0$ επιλέγουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{M} > 0$ οπότε

αν $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq M|x-y| < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$

($\acute{\eta}$ $|x - x_0| < \delta$)

Ορισμός (επαναδιατύπωση ομ. συνέχειας) Η $f: A \to \mathbb{R}$ είναι ομ. συνεχής αν $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ώστε για κάθε $x, y \in A$ με $|x-y| < \delta$ ισχύει $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

Παράδειγμα Η $f(x) = \frac{1}{x} : (0\ 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ δεν είναι ομ. συνεχής

διότι αν $x_n = \frac{1}{n}$ $\quad y_n = \frac{1}{n^2}$ $\quad |x_n - y_n| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right| \longrightarrow 0$

αλλά $\left|f(\tfrac{1}{n}) - f(\tfrac{1}{n^2})\right| = |n - n^2| \longrightarrow +\infty$ $\quad\blacksquare$

Η ομ. συνέχεια δεν έχει να κάνει με το αν η f είναι φραγμένη (1)

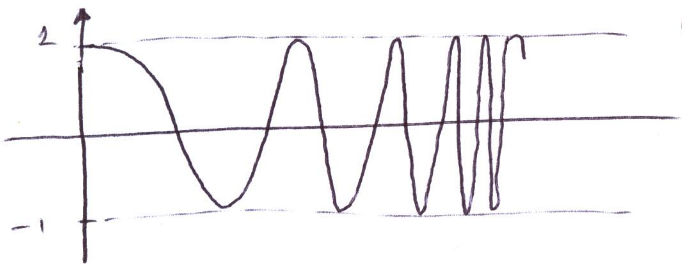
αλλά με το πόσο "απότομες" μεταβολές έχει. Πχ η $f(x)=\cos(x^2)$ (2)

είναι συνεχής και φραγμένη αλλά όχι ομ. φραγμένη διότι αν (3)

$x=\sqrt{(n+1)\pi}$ $\quad y=\sqrt{n\pi}$ τότε $|x_n-y_n|=$ (4)

$$=\frac{\pi}{\sqrt{(n+1)\pi}+\sqrt{n\pi}} \longrightarrow 0$$ αλλά $\left|\cos\left(\sqrt{(n+1)\pi}^{\,2}\right)-\cos\left(\sqrt{n\pi}\right)^2\right|$ (5)

$$=\left|\cos((n+1)\pi)-\cos(n\pi)\right|=\left| \qquad - \qquad \right|=2\not\to 0.$$ (6)



$\cos(x^2)$ (7)

https://sagecell.sagemath.org

```
plot(cos(x^2), (x,0, 10))
```

<u>Θεώρημα</u> Αν $f:[a b]\longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής τότε f ομοιόμορφα συνεχής (8)

<u>Απόδειξη</u> Έστω ότι η f ΔΕΝ είναι ομ. συνεχής τότε $\exists\, \varepsilon>0$ (9)

και δύο ακολουθίες $x_n, y_n \in [ab]$ με $x_n-y_n\longrightarrow 0$ και $|f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon$ (10)

Η x_n είναι φραγμένη $(a\leq x_n\leq b)$ οπότε από το Θ. Bolzano- (11)

-Weierstrass υπάρχει __________ της x_n που (12)

__________ στο $[ab]$ Έστω η x_{k_n} με όριο το $x \in [ab]$. Αλλά τότε (13)

$$y_{k_n}=x_{k_n}-(x_{k_n}-y_{k_n})\longrightarrow$$ (14)

Από τη συνέχεια της f στο x $\Rightarrow$ $f(x_{k_n})\longrightarrow f(x)$ (15)

και $f(y_{k_n})\longrightarrow f(x)$ (16)

Άρα

$$\varepsilon\leq\left|f(x_{k_n})-f(y_{k_n})\right|\longrightarrow|f(x)-f(x)|=0$$ (17)

άτοπο $\boxed{}$

<u>Θεώρημα</u> Οι ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις μεταφέρουν ακολουθίες Cauchy σε ακολουθίες Cauchy.

(Η $\frac{1}{x}:(0,1]\to\mathbb{R}$ δεν έχει αυτή την ιδιότητα: η $\frac{1}{n}$ είναι Cauchy (γιατί στο $\mathbb{R}$ συγκλίνει) αλλά η $\frac{1}{1/n}=n$ δεν είναι Cauchy)

(Το αντίστροφο δεν είναι αληθές: Αν η f μεταφέρει ακολουθίες Cauchy σε ακολουθίες Cauchy $\not\Rightarrow$ f ομ. συνεχής: π.χ.
Αν x_n ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ x_n^2 είναι Cauchy (άσκηση) αλλά η $f(x)=x^2$ δεν είναι ομ. συνεχής)

<u>Απόδειξη</u> Έστω ότι $f: A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ομ. συνεχής και x_n ακολουθία Cauchy στο A. Πρέπει να δείξουμε ότι $f(x_n)$ Cauchy. Αν $\varepsilon>0$ πρέπει να βρούμε $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε αν $n,m\geq n_0$ να ισχύει $|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$. Όμως $\exists\,\delta>0$ ώστε αν $|x-y|<\delta \Rightarrow |\qquad\qquad|<\varepsilon$ αφού f ομ. συνεχής. Η x_n είναι Cauchy άρα $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$: $\forall n,m\geq n_0$ $|\qquad\qquad|<\delta$
οπότε για $n,m\geq n_0$ $|\qquad\qquad|<\varepsilon$ $\blacksquare$

f ομοιόμορφα συνεχής $\Longrightarrow$ (μεταφέρει ακολουθίες Cauchy σε —//—)

<u>Άρα</u>

Αν $\exists\, x_n$ Cauchy ώστε $f(x_n)$ όχι Cauchy $\Longrightarrow$ f όχι ομ. συνεχής

Θεώρημα Αν $f:(a\,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, η f είναι ομ. συνεχής στο $(a\,b)$ $\iff$ υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ & $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$.

Απόδειξη "$\Longleftarrow$" Φανερό διότι η

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x\in(a\,b) \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x) & x=a \\ \lim\limits_{x\to b^-} f(x) & x=b \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $[a,b]$ άρα $\tilde{f}$ ομ. συνεχής στο $[a b]$ άρα και στο $(a\,b)$, αλλά $\tilde{f}\big|_{(a\,b)} = f$

($\hookrightarrow$ διότι $\forall\ x,y\in(ab)$ με $|x-y|<\delta \Rightarrow x,y\in[ab]$ οπότε

$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| \le \varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$.)

"$\Longrightarrow$" Αν $x_n \longrightarrow a^+ \Rightarrow x_n$ Cauchy $\xrightarrow[\text{συν.}]{\text{ομ.}} f(x_n)$ Cauchy

$\Rightarrow \exists\ \ell: \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$.

Αν $y_n \longrightarrow a^+$ μια άλλη ακολουθία $\Rightarrow x_n - y_n \longrightarrow 0$

$\xRightarrow[\text{συν.}]{\text{ομ.}} f(x_n) - f(y_n) \longrightarrow 0 \Rightarrow f(y_n) = f(x_n) - (f(x_n) - f(y_n))$

$\longrightarrow \ell$

Άρα $\forall\ x_n \longrightarrow a^+$ $f(x_n) \longrightarrow \ell$

συνεπώς το $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ υπάρχει $(=\ell)$

$\blacksquare$

Ομοίως για το $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$

Παράδειγμα Η $f(x) = \sqrt{x}$ στο $[0\,1]$ είναι συνεχής άρα ομ. συνεχής.

Δεν είναι Lipschitz διότι αν $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \le M|x-y|$ $\quad \forall\ x,y\in[0\,1]$

$\Rightarrow$ το ίδιο ισχύει $\forall\ x,y\in(0\,1) \Rightarrow \left|\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}\right| \le M$ $\quad \forall\ x,y\in(0\,1)$ με $x\neq y$

$\Rightarrow \left|\dfrac{\sqrt{z+h} - \sqrt{z}}{h}\right| \le M \Rightarrow \lim\limits_{h\to 0^+}\left|\quad\right| \le M$

$\Rightarrow (\sqrt{z})' \le M \quad \forall\ z\in(0\,1)$ το οποίο είναι λάθος αφού

$(\sqrt{z})' = 1/2\sqrt{z}$ που δεν είναι φραγμένη στο $(0,1)$

Η $f(x)=\sqrt{x}$ στο $[1\ \infty)$ είναι Lipschitz διότι $|f'(x)| = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \le \dfrac{1}{2}$. Άρα στο $[1\ \infty)$ ισχύει

$$|f(x)-f(y)| \le \frac{1}{2}|x-y|$$

Η $f(x)=\sqrt{x}$ είναι ομ. συνεχής στο $[0\ \infty)$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $\varepsilon>0$ $\delta_1>0$ ώστε αν $x,y\in[0\ 1]$ με $|x-y|<\delta_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow |\sqrt{x}-\sqrt{y}| < \varepsilon/2$ ①

και $\delta_2>0$ ώστε αν $x,y\in[1\ \infty)$ με $|x-y|<\delta_2$

$\Rightarrow |\sqrt{x}-\sqrt{y}| < \varepsilon/2$ ②

Θέτουμε $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$.

Αν $x,y\in[0\ \infty)$ και $|x-y|<\delta$ τότε

- είτε $x,y\ge 1$ $|x-y|<\delta\le\delta_2 \overset{②}{\Longrightarrow} |\sqrt{x}-\sqrt{y}|<\varepsilon/2<\varepsilon$
- είτε $x,y\le 1$ $|x-y|<\delta\le\delta_1 \overset{①}{\Longrightarrow} |\sqrt{x}-\sqrt{y}|<\varepsilon/2<\varepsilon$
- είτε $x\le 1\le y$ οπότε $|x-1|<\delta$ και $|1-y|<\delta$ οπότε άρα $|\sqrt{x}-\sqrt{1}|<\varepsilon/2$ και $|\sqrt{1}-\sqrt{y}|<\varepsilon/2$ οπότε

$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \le |\sqrt{x}-\sqrt{1}| + |\sqrt{1}-\sqrt{y}| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \quad \blacksquare$$