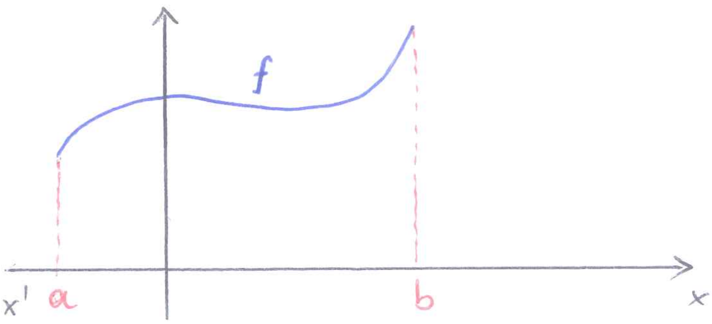
Μάθημα 13

Ολοκλήρωμα Riemann.

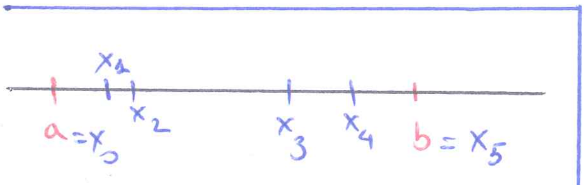
Αν $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση με $f(x)\geq 0$ $\forall x\in[a,b]$ θέλουμε να βρούμε μια μέθοδο που να υπολογίζει το εμβαδόν που περικλείεται από το γράφημα της f, τον άξονα $x'x$ και τις κάθετες σε αυτόν ευθείες $x=a$ και $x=b$.



Η μέθοδος αυτή ονομάζεται «ολοκλήρωμα» και το εμβαδόν που θα υπολογιστεί συμβολίζεται με $\int_a^b f(x)\,dx$

Η μέθοδος του Darboux.

Ορισμός Διαμέριση του διαστήματος $[a,b]$ ονομάζουμε κάθε ______ ακολουθία σημείων $x_0<x_1<x_2<\dots<x_n$ ώστε $x_0=a$ και $x_n=b$. Θα γράφουμε «η διαμέριση $P=\{x_0<x_1<\dots<x_n\}$».



Μια διαμέριση με 6 σημεία

Μια διαμέριση χωρίζει σε υποδιαστήματα το $[a,b]$ πλάτους $x_{k+1}-x_k$ για $k=0\dots n-1$ και το μεγαλύτερο πλάτος το ονομάζουμε «   » της P, και γράφουμε

$\|P\| =$

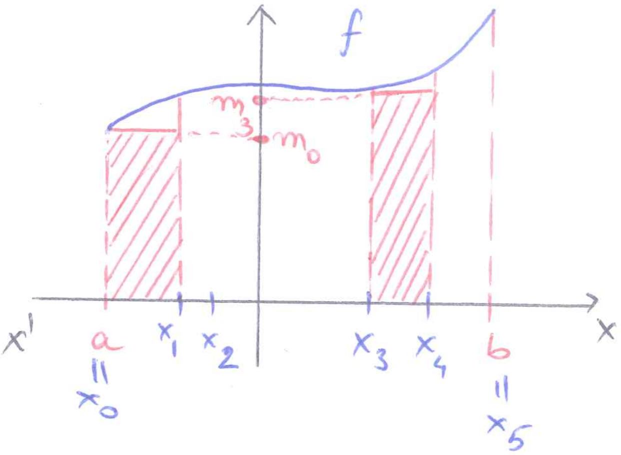
Στο παράδειγμα του σχήματος $\|P\| = x_3-x_2$.

Αν προσθέσουμε επιπλέον σημεία στην P σχηματίζοντας μια νέα διαμέριση P_1, η P_1 έχει μικρότερη λεπτότητα από την P (φανταστείτε να προστεθεί ένα σημείο στο $(x_2\ x_3)$ διάστημα του σχήματος)

Για αυτό η $P_1\ (\supseteq P)$ ονομάζεται   της P.

Αν P_1, P_2 δύο διαμερίσεις του $[a\ b]$ τότε η $P_1 \cup P_2$ είναι (1)
εκλέπτυνση και της P_1 & της P_2, γι' αυτό ονομάζεται (2)
«   » των P_1, P_2 (3)

Σε κάθε διάστημα της διαμέρισης P βρίσκουμε την ελάχιστη (4)
«τιμή» της f (το inf (γιατί μπορεί να μην έχει) και (5)
σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο με ύψος αυτό το inf και βάση (6)
το διάστημα στο οποίο το υπολογίζουμε (7)



$$m_k(f,P) = m_k = \inf\left\{ f(x) \quad x_k \le x \le x_{k+1} \right\} \quad (8)$$

$k=0,\dots,n-1.$ (9)

Άρα τα εμβαδά των παραλληλογράμμων (10)
είναι (11)

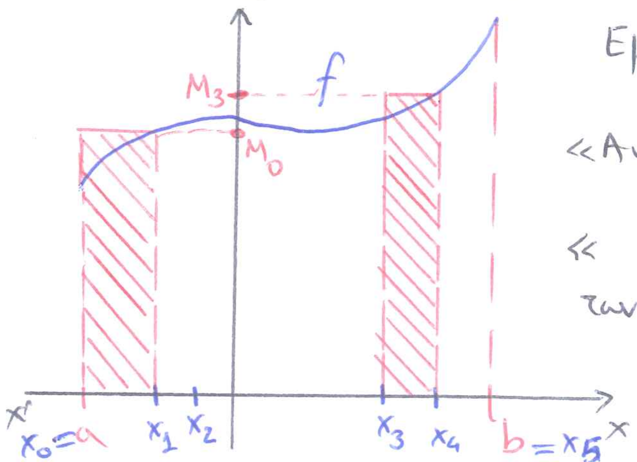
Τα προσθέτουμε και σχηματίζαμε (12)
το άθροισμα (13)

$L(f,P) =$ το οποίο ονομάζουμε «κάτω άθροισμα (14)
Darboux» (15)

Ονομάζουμε «   » το supremum των $L(f\ P)$ (16)
ως προς όλες τις δυνατές διαμερίσεις του $[a\ b]$. Γράφουμε (17)

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\left\{ \qquad \right\} \quad (18)$$

Κάνουμε ακριβώς την ίδια διαδικασία χρησιμοποιώντας αντί τα m_k (19)
τα $M_k(f,P) = M_k = \sup\left\{ f(x) \quad x_k \le x \le x_{k+1} \right\}$ $k=0,\dots,n-1$ (20)



Εμβαδόν παραλληλογράμμου: (21)

«Άνω άθροισμα Darboux»: $U(f,P) =$ (22)

«   » το infimum (23)
των $U(f\ P)$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\left\{ \qquad \right\} \quad (24)$$

(μιλάμε διαισθητικά και όχι αυστηρά)

Αν E το εμβαδόν που προσπαθούμε να υπολογίσουμε, φανερά

$$L(f\ P) \le E \le U(f\ Q)$$ όπου P & Q οποιεσδήποτε διαμερίσεις του $[a\ b]$

οπότε $\underline{\int_a^b} f(x) \le E \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$. Έτσι αν $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \ne \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

ΔΕΝ αποδίδουμε τιμή στο E και λέμε ότι η f δεν είναι ολοκληρώσιμη.

Ενώ αν $\underline{\int_a^b} f(x) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, λέμε ότι η f είναι ______ στο $[ab]$

και την κοινή αυτή τιμή την ονομάζουμε ολοκλήρωμα της f, και γράφουμε $E = \int_a^b f(x)\,dx$.

Λήμμα Αν P διαμέριση του $[a\ b]$ και P_1 εκλέπτυνσή της τότε $L(fP) \le L(f\ P_1)$ και $U(f\ P) \ge U(f\ P_1)$

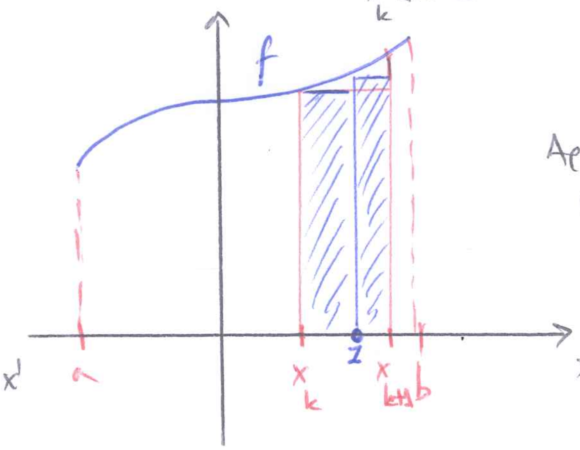
Απόδειξη Αρκεί να το αποδείξουμε όταν $P_1 = P \cup \{z\}$

(στη συνέχεια θα προσθέτουμε ένα-ένα τα υπόλοιπα σημεία της P_1)

Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ ~~και $k\in\{0,\dots,n-1\}$~~

Αν $z \in [x_k\ x_{k+1}]$ για κάποιο $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$ θα έχουμε

$$L(fP_1) - L(fP) = \Big(\inf_{x_k \le x \le z} f(x)\Big)(z-x_k) + \Big(\inf_{z\le x\le x_{k+1}} f(x)\Big)(x_{k+1}-z) - \Big(\inf_{x_k\le x\le x_{k+1}} f(x)\Big)(x_{k+1}-x_k) \quad (*)$$



Αλλά $x_{k+1} - x_k = (x_{k+1} - z) + (z - x_k)$

Άρα

$$(*) = \Big(\inf_{x_k\le x\le z} f(x) - \inf_{x_k \le x \le x_{k+1}} f(x)\Big)(z-x_k) + \Big(\inf_{z\le x\le x_{k+1}} f(x) - \inf_{x_k\le x\le x_{k+1}} f(x)\Big)(x_{k+1}-z)$$

$$\ge 0$$

Άρα $L(fP) \le L(f\ P_1)$. Ομοίως

$$U(fP_1) - U(fP) = \dots = \Big(\sup_{[x_k z]} f(x) - \sup_{[x_k x_{k+1}]} f(x)\Big)(z-x_k) + \Big(\sup_{[z\, x_{k+1}]} f(x) - \sup_{[x_k x_{k+1}]} f(x)\Big)(x_{k+1}-z)$$

$$\le 0 \Rightarrow U(fP_1) \le U(fP)$$

Λήμμα Για οποιεσδήποτε δύο διαμερίσεις P_1 κ P_2 του $[a\,b]$ ισχύει

$$L(f\,P_1) \le U(f\,P_2) \qquad (1)$$

Απόδειξη: Η $P_1 \cup P_2$ είναι εκλέπτυνση κ των δύο διαμερίσεων

άρα από το προηγούμενο

$$L(f\,P_1) \le L(f\,P_1 \cup P_2) \le U(f\,P_1 \cup P_2) \le U(f\,P_2)$$

(όπου χρησιμοποιήσαμε ότι για κάθε διαμέριση P ισχύει $L(f\,P) \le U(f\,P)$ που είναι προφανές από τον ορισμό τους) ∎

Παίρνοντας sup στην (1) ως προς όλες τις διαμερίσεις P_1 παίρνουμε $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le U(f\,P_2)$ $\forall P_2$ και παίρνοντας σε αυτήν inf ως προς P_2 παίρνουμε την

$$\boxed{\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx}$$

Θεώρημα (κριτήριο Riemann) Μια φραγμένη συνάρτηση $f:[a\,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη αν $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ διαμέριση P_ε του $[a\,b]$ ώστε

$$(0 \le)\ U(f\,P_\varepsilon) - L(f\,P_\varepsilon) < \varepsilon \qquad (2)$$

Απόδειξη Έστω $\varepsilon > 0$ και f ολοκληρώσιμη με $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \ell$ υπάρχει διαμέριση P_1 ώστε $L(f\,P_1) > \ell - \varepsilon/2$ και υπάρχει διαμέριση P_2 ώστε $U(f\,P_2) < \ell + \varepsilon/2$. Θέτουμε $P_\varepsilon = P_1 \cup P_2$ οπότε

$$U(f\,P_\varepsilon) - L(f\,P_\varepsilon) \le U(f\,P_2) - L(f\,P_1) < \left(\ell + \tfrac{\varepsilon}{2}\right) - \left(\ell - \tfrac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$$

Αντίστροφα αν $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ P_ε ώστε να ισχύει η (2) τότε από τους ορισμούς, φανερά ισχύει

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le U(f\,P_\varepsilon) \overset{(2)}{\le} L(f\,P_\varepsilon) + \varepsilon \le \underline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon \Rightarrow$$

$$0 \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \varepsilon$$ ∎