

Μάθημα 14

Θεώρημα (το κριτήριο του Riemann) Έστω ότι η $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ (1)

είναι μια φραγμένη συνάρτηση. (2)

Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη \Leftrightarrow υπάρχει ακολουθία (3)

διαιρέσεων \mathcal{P}_n του $[a,b]$ ώστε $\lim_{n \rightarrow \infty} (U(f, \mathcal{P}_n) - L(f, \mathcal{P}_n)) = 0$. (4)

Απόδειξη " \Rightarrow " θέτουμε $\varepsilon = \frac{1}{n}$ στο κριτήριο Riemann του μαθήματος 13. (5)

" \Leftarrow " Το όριο είναι $= 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n \geq n_0 U(f, \mathcal{P}_n) - L(f, \mathcal{P}_n) < \varepsilon$ (6)

ικανοποιώντας το κριτήριο Riemann του μαθήματος 13. (για να $n = n_0$) (7)

Παράδειγμα Η $f(x) = x^2$ στο $[0, 1]$ είναι \mathbb{R} -ολοκληρώσιμη διότι α (8)

$$\mathcal{P}_n = \left\{ 0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1 \right\} \text{ } \because \text{ } \alpha \text{ } f \uparrow \quad (9)$$

$$L(f, \mathcal{P}_n) = f(0) \frac{1}{n} + f\left(\frac{1}{n}\right) \frac{1}{n} + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \frac{1}{n} \quad (10)$$

$$= \frac{1}{n} \left(0 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \right) = \quad (11)$$

$$= \frac{1}{n} \frac{1 + 2^2 + \dots + (n-1)^2}{n^2} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \quad (12)$$

$$= \dots = \frac{1}{3} - \dots + \dots \quad (13)$$

$$U(f, \mathcal{P}_n) = f\left(\frac{1}{n}\right) \frac{1}{n} + f\left(\frac{2}{n}\right) \frac{1}{n} + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \frac{1}{n} = \quad (14)$$

$$= \frac{1}{n} \left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \right) = \frac{\dots}{n} \quad (15)$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{\dots} = \dots = \quad (16)$$

$$\text{Άρα } U(f, \mathcal{P}_n) - L(f, \mathcal{P}_n) = \dots \rightarrow 0 \quad (17)$$

Παράδειγμα (συνάρτηση Dirichlet) $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ (7)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & x \in [0,1] - \mathbb{Q} \end{cases} \quad (8)$$

Θα δείξω ότι αυτή η συνάρτηση ΔΕΝ είναι R-οδοκλήρωσιμη. (9)

Αν \mathcal{P} οποιαδήποτε διαμέριση των $[0,1]$, $\mathcal{P} = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1\}$ (5)

~~$L(f, \mathcal{P})$~~ $m_k = \sup_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} f(x) = 1$ (7)

$$L(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 \cdot (x_{k+1} - x_k) = 1 \quad \text{όπως} \quad (8)$$

$$M_k = \inf_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} f(x) = 0 \quad \text{οπότε} \quad U(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=0}^{n-1} 0 \cdot (x_{k+1} - x_k) = 0 \quad (9)$$

Συνεπώς $\forall \mathcal{P}$ ισχύει $U(f, \mathcal{P}) < L(f, \mathcal{P})$ (10)

Riemann οδοκλήρωσιμη. (11)

Παράδειγμα $f(x) = \sqrt{x} : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{P}_n = \{0 < (\frac{1}{n})^2 < (\frac{2}{n})^2 < \dots < (\frac{n-1}{n})^2 < (\frac{n}{n})^2 = 1\}$ (12)

$$L(f, \mathcal{P}_n) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) = f(0) \cdot (\frac{1}{n})^2 + f((\frac{1}{n})^2) \cdot ((\frac{2}{n})^2 - (\frac{1}{n})^2) + \dots + f((\frac{n-1}{n})^2) \cdot ((\frac{n}{n})^2 - (\frac{n-1}{n})^2) \quad (13)$$

$$= \frac{1}{n} \left(\frac{2^2 - 1^2}{n^2} \right) + \frac{2}{n} \frac{3^2 - 2^2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n} \frac{n^2 - (n-1)^2}{n^2} \quad (14)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \frac{(k+1)^2 - k^2}{n^2} \quad (15)$$

οπότε

$$U(f, \mathcal{P}_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} \frac{(k+1)^2 - k^2}{n^2} \quad \text{Αρα} \quad U(f, \mathcal{P}_n) - L(f, \mathcal{P}_n) = \dots \quad (16)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \frac{(k+1)^2 - k^2}{n^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\left(\frac{k+1}{n}\right)^2 - \left(\frac{k}{n}\right)^2 \right) = \dots \rightarrow 0 \quad (17)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Κάθε μονοτονή συνάρτηση $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι R-ολοκληρώσιμη. (1) (2)

Απόδειξη Ας υποθέσουμε ότι η f είναι αύξουσα $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ (3)
(ουίστε είναι και φανερά γραμμική). Ήθελ-N θεωρούμε τη διαμέριση (4)

$$P_n = \left\{ a, a + \frac{b-a}{n}, a + 2 \frac{b-a}{n}, \dots, a + (n-1) \frac{b-a}{n}, a + n \frac{b-a}{n} = b \right\} \quad (5)$$

του $[a,b]$ σε n ~~ισών~~ ~~δύο~~ ~~ισών~~ ~~μήκους~~ διαστήματα. Αν ε>0 (6)

τότε αν βρούμε n ώστε $U(f, P_n) - L(f, P_n) < \epsilon$ θα έχουμε (7)

ολοκληρώσει την απόδειξη. Θετούμε $x_k = a + \dots + \frac{b-a}{n}$ (8)

$k=0, 1, \dots, n$ Αφού $f \uparrow$ στο $[x_k, x_{k+1}]$ έχει ελάχιστη τιμή $f(x_k)$ (9)

και μέγιστη $f(x_{k+1})$. άρα (10)

$$L(f, P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \dots = \sum_{k=0}^{n-1} \dots = (11)$$

$$= \frac{b-a}{n} (f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})) \quad (12)$$

Ενώ ομοίως $U(f, P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \dots = \sum_{k=0}^{n-1} \dots = (13)$

$$= \frac{b-a}{n} (f(x_1) + \dots + f(x_n)) \quad (14)$$

Άρα $U(f, P_n) - L(f, P_n) = \dots \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \square (15)$

ΘΕΩΡΗΜΑ Κάθε συνεχής συνάρτηση $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ (16)

είναι R-ολοκληρώσιμη. (17)

Απόδειξη. Αφού η f είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα (18)

είναι και ομ. συνεχής. Έστω ότι $\epsilon > 0$. Βρίσκουμε $\delta > 0$ (19)

ώστε αν $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}$. (20)

Επίσης βρίσκουμε $n \in \mathbb{N}$: $\frac{b-a}{n} < \delta$ (αφού $\delta > 0$ & $\dots \rightarrow \dots$) (21)

Φαίνεται ότι ισχύει διαίρεση που κάθε διαίρεση έχει (1)

$$P = \left\{ a, \overbrace{a + \frac{b-a}{n}}^{x_1}, \overbrace{a + 2 \frac{b-a}{n}}^{x_2}, \dots, \overbrace{a + n \frac{b-a}{n}}^{x_n} = b \right\} \quad (2)$$

$$x_k = a + k \frac{b-a}{n} \quad k=0, 1, \dots, n. \quad \begin{matrix} n+1 \text{ σημεία} \\ \text{ή διαστήματα μήκους } \frac{b-a}{n} \end{matrix} \quad (3)$$

Η f στο $[x_k, x_{k+1}]$ ως συνάρτηση σε κάποιο φρ. διάστημα έχει (4)

$$M_k = \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) \quad \text{και} \quad m_k = \inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) \quad (5)$$

$$\text{και} \quad m_k = \dots \quad (6)$$

$$|y_k - m_k| \leq |x_{k+1} - x_k| < \delta < \epsilon \quad (7)$$

$$M_k - m_k < \frac{\epsilon}{b-a} \quad \text{Άρα} \quad (8)$$

$$U(f, P_n) - L(f, P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) (x_{k+1} - x_k) < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\epsilon}{b-a} (x_{k+1} - x_k) = \frac{\epsilon}{b-a} (b-a) = \epsilon \quad (9)$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

RIEMANN

Θεώρημα Αν $f(x) = c$ στο $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = c(b-a)$ (11)

Απόδειξη Αν f σταθερή σε κάθε σημείο & κάθε διαίρεση (12)

η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή είναι c . Άρα (13)

$$x \in P = \{x_0, \dots, x_n\} \text{ οποιαδήποτε διαίρεση του } [a, b] \quad (14)$$

Θα έχουμε (15)

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum (c - c) (x_{k+1} - x_k) = 0 \quad (16)$$

Άρα η f είναι R-ολοκληρώσιμη και (17)

$$\int_a^b c dx = \sup_P U(f, P) = \sup_P \sum c (x_{k+1} - x_k) = \sup_P c \cdot (b-a) = c(b-a) \quad (18)$$

Ομοίως και $\int_a^b c dx = c(b-a)$ ή $\int_a^b c dx = c(b-a)$ (1)

Θεώρημα Αν f, g ολοκληρωσιμότητες σε $[a,b]$ τότε και (2)

η $f+g$ είναι ολοκληρωσιμότητα $[a,b]$ και ισχύει (3)

$$\int_a^b (f+g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$
 (4)

Απόδειξη \mathcal{P} διαμέριση του $[a,b]$: $\mathcal{P} = \{x_0^a < x_1 < \dots < x_n = b\}$ $m_k = \inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} (f+g)(x)$ (5)

$M_k = \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} (f+g)(x)$ m_k', M_k' για την f , m_k'', M_k'' για την g . (6)

$\forall x \in [x_k, x_{k+1}]$ $m_k' + m_k'' \leq f(x) + g(x) \Rightarrow m_k' + m_k'' \leq M_k$ (7)
 $M_k' + M_k'' \geq M_k$ (8)

Άρα $L(f, \mathcal{P}) + L(g, \mathcal{P}) \leq L(f+g, \mathcal{P}) \leq U(f+g, \mathcal{P}) \leq U(f, \mathcal{P}) + U(g, \mathcal{P})$ (*) (9)

Άρα f, g ολοκληρωσιμότητες \exists διαμέριση \mathcal{P}_1 & \mathcal{P}_2 ώστε (10)

$U(f, \mathcal{P}_1) - \frac{\epsilon}{2} \leq \int_a^b f(x) dx \leq L(f, \mathcal{P}_1) + \frac{\epsilon}{2}$ και (11)

$U(g, \mathcal{P}_2) - \frac{\epsilon}{2} \leq \int_a^b g(x) dx \leq L(g, \mathcal{P}_2) + \frac{\epsilon}{2}$. Θεωρούμε $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ (12)

Την κοινή επέκτασή τους \Rightarrow
 $U(f, \mathcal{P}) + U(g, \mathcal{P}) - \epsilon \leq \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \leq L(f, \mathcal{P}) + L(g, \mathcal{P}) + \epsilon$ (14)

\Rightarrow $U(f+g, \mathcal{P}) - \epsilon \leq \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \leq L(f+g, \mathcal{P}) + \epsilon$ (15)

\Rightarrow $\int_a^b (f+g)(x) dx - \epsilon \leq \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b (f+g)(x) dx + \epsilon$ (*) (16)

~~...~~ $\int_a^b (f+g)(x) dx - \int_a^b (f+g)(x) dx \leq 2\epsilon \Rightarrow$ ~~$f+g$ R-ολοκ.~~ (17)

$\epsilon \rightarrow 0 \Rightarrow \int_a^b (f+g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$ ~~...~~ άρα $f+g$ (18)

R-ολοκλήσιμη, και άρα (*) (19)

$\int_a^b (f+g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$ (20)