Μάθημα 15

Θεώρημα Έστω ότι $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και έστω ότι $\lambda\in\mathbb{R}$. Τότε η $\lambda\cdot f$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει

$$\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$

Απόδειξη Αν $P=\{a_0=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$ διαμ. του $[a,b]$ και $\lambda>0$ τότε $m_k(\lambda f)=\inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]}\lambda f(x)=\lambda\inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x)=\lambda m_k(f)$

η $M_k(\lambda f)=\sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]}\lambda f(x)=\lambda\sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x)=\lambda M_k(f)$

Άρα $0\le U(\lambda f,P)-L(\lambda f,P)=\lambda\big(U(f,P)-L(f,P)\big)$

και η λf είναι ολοκληρώσιμη, αφού $\forall\varepsilon>0$ μπορούμε να βρούμε διαμέριση P ώστε $U(f,P)-L(f,P)<\frac{\varepsilon}{\lambda}$.

Αν $\lambda<0$ $m_k(\lambda f)=\inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]}\lambda f(x)=\lambda\sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x)=\lambda M_k(f)$

και $M_k(\lambda f)=\lambda m_k(f)$ οπότε $0\le U(\lambda f,P)-L(\lambda f,P)=$

$=\lambda L(f,P)-\lambda U(f,P)=(-\lambda)\big(U(f,P)-L(f,P)\big)$

άρα η πάλι λf ολοκληρώσιμη. Αν $\lambda=0$ ισχύει από το προηγούμενο ($\int_a^b c\,dx=c(b-a)$)

Τέλος $\int_a^b(\lambda f)(x)\,dx=\underline{\int_a^b}(\lambda f)(x)=\sup_P L(\lambda f,P)=\begin{cases}\lambda\sup_P L(f,P) & \lambda\ge 0\\ \lambda\inf_P U(f,P) & \lambda\le 0\end{cases}$

$=\lambda\int_a^b f(x)\,dx$ ∎

Έτσι έχουμε δείξει το εξής θεμελιώδες

Θεώρημα (γραμμικότητα του ολοκληρώματος) Αν $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες και $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ τότε και η $\lambda f+\mu g$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει $\int_a^b(\lambda f+\mu g)(x)\,dx=\lambda\int_a^b f(x)\,dx+\mu\int_a^b g(x)\,dx$ ∎

(ΟΣΣ12

Θεώρημα Αν $f:[a\,b]\to[c\,d]$ ολοκληρώσιμη και $g:[c\,d]\to\mathbb{R}$ συνεχής
τότε και η σύνθεση $g\circ f:[a\,b]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη.

Η απόδειξη παραλείπεται.

Θεώρημα Αν $f:[a\,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη

(i) $|f|$ ολοκληρώσιμη & $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

(ii) f^2 ολοκληρώσιμη

(iii) Αν $g:[a\,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη τότε $f\cdot g$ ολοκληρώσιμη

Απόδειξη (i) Η $|f|$ είναι σύνθεση της f με την συνεχή
(και άρα ολοκληρώσιμη) $g(x)=|x|$.

$$\pm f(x) \le |f(x)| \quad \forall x\in[a\,b] \Rightarrow \pm\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

[Άσκηση: Αν $f\le g$ ολοκληρώσιμες στο $[a\,b]$, τότε $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$]

$$\Rightarrow \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

(ii) Η f^2 είναι η σύνθεση $g\circ f$ με $g(t)=t^2$

(iii) $\left[(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \Rightarrow ab = \frac{1}{2}\left((a+b)^2-a^2-b^2\right)\right.$ polarization identity]

$$fg = \frac{1}{2}\left((f+g)^2 - f^2 - g^2\right)$$

Λήμμα Αν $c\in(a\,b)$ τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση

$$\chi_{[a\,c]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x\in[a\,c] \\ 0 & \text{αν } x\in(c\,b] \end{cases}$$

καθώς και η

$$\chi_{[c\,b]}(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x\in[a\,c) \\ 1 & \text{αν } x\in[c\,b] \end{cases}$$

είναι ολοκληρώσιμες

και $\int_a^b \chi_{[a\,c]}(x)\,dx = c-a$ & $\int_a^b \chi_{[c\,b]}(x)\,dx = b-c$

<u>Απόδειξη</u> Αν $\varepsilon > 0$ αρκεί να βρω $\mathcal{P}$ διαμέριση του $[a\,b]$ ώστε $U(\chi_{[a\,c]}, \mathcal{P}) - L(\chi_{[ac]}, \mathcal{P}) < \varepsilon$.

Θέτω $\mathcal{P} = \{a, c, b\}$, $0 \le U(\chi_{[ac]}, \mathcal{P}) - L(\chi_{[ac]}, \mathcal{P}) =$

$$= \big(1\cdot(c-a) + 0\cdot(b-c)\big) - \big(1\,(c-a) + 0\,(b-c)\big) = 0 < \varepsilon$$

και $\displaystyle\int_a^b \chi_{[a\,c]}(x)\,dx = \underline{\int_a^b} \chi_{[ac]}(x)\,dx = \sup_{\mathcal{P}} L(\chi_{[ac]}, \mathcal{P}) = c - a$

διότι $\forall \mathcal{P}$ διαμέριση του $[ab]$ η $\mathcal{P} \cup \{c\}$ είναι εκλέπτυνση της $\mathcal{P}$ άρα $L(\chi_{[ac]}, \mathcal{P}) \le L(\chi_{[ab]}, \mathcal{P}\cup\{c\}) =$

$$= \sum_{x_k = a}^{x_{k+1} = c} 1\cdot(x_{k+1} - x_k) + \sum_{x_k = c}^{x_{k+1} = b} 0\cdot(x_{k+1} - x_k) = c - a.$$

Ομοίως για την $\chi_{[c\,b]}$ (άσκηση)

<u>Θεώρημα</u> Αν $f : [a\,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και $c \in (a\,b)$ τότε η f είναι ολοκληρώσιμη $\iff$ οι $f : [a\,c] \to \mathbb{R}$ & $f : [c\,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες και σε αυτή την περίπτωση ισχύει

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

<u>Απόδειξη</u> "$\Longrightarrow$" Η $f\cdot\chi_{[a\,c]}$ είναι ολοκληρώσιμη ως γινόμενο ολοκληρωσίμων. Άρα $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, \mathcal{P}$ διαμ. του $[a\,b]$ ώστε

$0 \le U(f\chi_{[ac]}, \mathcal{P}) - L(f\chi_{[ac]}, \mathcal{P}) < \varepsilon$. Προσθέτουμε στην $\mathcal{P}$ το σημείο c και θα ισχύει $0 \le U(f\chi_{[ac]}, \mathcal{P}\cup\{c\}) - L(f\chi_{[ac]}, \mathcal{P}\cup\{c\})$ $< \varepsilon$ γιατί εκλεπτύνθηκε η διαμέριση

Αλλά φανερά $U(f\chi_{[ab]}, P\cup\{c\}) = U(f|_{[ac]}, (P\cup\{c\})\cap[ac])$

και $L(f\chi_{[ac]}, P\cup\{c\}) = L(f|_{[ac]}, (P\cup\{c\})\cap[ac])$

Άρα βρήκαμε διαμέριση P' (την $(P\cup\{c\})\cap[ac]$) ώστε

$0\le U(f|_{[ac]}, P') - L(f|_{[ac]}, P') < \varepsilon$ οπότε η

$f|_{[ac]}$ είναι ολοκληρώσιμη. Ομοίως κ η $f|_{[cb]}$.

Εξαιτίας της (2) ισχύει $\int_a^c f(x)\,dx = \sup_P L(f|_{[ac]}, P) =$

$$= \sup_P L(f\chi_{[ac]}, P) = \int_a^b (f\chi_{[ab]})(x)\,dx$$

Άρα από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (\underbrace{f\chi_{[ac]} + f\chi_{[cb]}}_{=f})(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b (f\chi_{[ac]})(x)\,dx + \int_a^b (f\chi_{[cb]})(x)\,dx$$

$$= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

"⇐" άσκηση.

Ο ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ RIEMANN

Αν αντί να πάρουμε τα άνω και κάτω αθροίσματα $U(f,P)$ κ $L(f,P)$ παίρναμε αθροίσματα παραλληλογράμμων με βάσεις τα διαστήματα $[x_k, x_{k+1}]$ της διαμέρισης και ύψος όχι τα m_k κ M_k αλλά τυχούσες τιμές της f σε σημεία $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$

επειδή $m_k \le f(\xi_k) \le M_k \quad \forall k = 0, \dots, n-1$

θα είχαμε $L(f,P) \le \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \le U(f,P)$

Έτσι αν Ξ τυχόν σύνολο σημείων που περιέχει ακριβώς ένα σε κάθε υποδιάστημα της $\mathcal{P}$, δηλ. $\Xi = \{\xi_0, \dots, \xi_{n-1}\}$ με

$$a = x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \dots \le x_{n-1} \le \xi_{n-1} \le x_n = b$$

και θέσουμε $\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \Xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$

θα ισχύει $L(f\,\mathcal{P}) \le \mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \Xi) \le U(f\,\mathcal{P})$

οποια κι να είναι η επιλογή των σημείων Ξ.

Συνεπώς αν f ολοκληρώσιμη, $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \mathcal{P}_\varepsilon$ ωστε

$0 \le U(f\,\mathcal{P}_\varepsilon) - L(f\,\mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon$. Αλλά $L(f\,\mathcal{P}_\varepsilon) \le \int_a^b f(x)dx \le U(f\,\mathcal{P}_\varepsilon)$

Άρα $\left| \int_a^b f(x)dx - \mathcal{R}(f, \mathcal{P}_\varepsilon, \Xi) \right| < \varepsilon$ για οποιαδήποτε επιλογή σημείων Ξ με ένα σημείο σε κάθε διάστημα της $\mathcal{P}_\varepsilon$.

Άρα τα αθροίσματα Riemann $\mathcal{R}(f, \mathcal{P}_\varepsilon, \Xi)$ και αυτά πλησιάζουν οσοδήποτε κοντά το $\int_a^b f(x)dx$. Θα θέλαμε όμως να δείξουμε και το αντίστροφο, δηλαδή ότι η συμπεριφορά των $\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \Xi)$ καθορίζει την ολοκληρωσιμότητα της f. Θα κάνουμε προσωρινά μια τροποποίηση στην ορολογία. Θα λέμε ότι η f είναι Darboux ολοκληρώσιμη στο $[a\,b]$ αν $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \mathcal{P}$ διαμ. του $[a\,b]$ ωστε $0 \le U(f\,\mathcal{P}) - L(f\,\mathcal{P}) < \varepsilon$ (όπως κάναμε μέχρι τώρα)

Θα λέμε ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a\,b]$ αν υπάρχει αριθμός $I(f)$ ωστε $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ ωστε για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[a\,b]$ με $\|\mathcal{P}\| = \max\{x_{k+1} - x_k : k = 0, \dots, n-1\} < \delta \Rightarrow \forall$ επιλογή σημείων Ξ στην $\mathcal{P}$ ισχύει

$$\left| \mathcal{R}(f\,\mathcal{P}\,\Xi) - I(f) \right| < \varepsilon$$

Θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι η $f : [a\,b] \to \mathbb{R}$ είναι Darboux ολοκληρώσιμη $\Longleftrightarrow$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Και ισχύει

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$