Μάθημα 15

Θεώρημα Έστω ότι $f:[a\,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και έστω ότι $\lambda\in\mathbb{R}$. Τότε η $\lambda\cdot f$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει

$$\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$

Απόδειξη Αν $P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$ διαμ. του $[ab]$ και $\lambda>0$ τότε $m_k(\lambda f) = \inf\limits_{x\in[x_k\, x_{k+1}]} \lambda f(x) = \quad = \lambda m_k(f)$

ή $M_k(\lambda f) = \quad = \quad = \lambda M_k(f)$

Άρα $0\le U(\lambda f,P) - L(\lambda f,P) = \lambda\big(U(f,P)-L(f,P)\big)$

και η λf είναι ολοκληρώσιμη, αφού $\forall\varepsilon>0$ μπορούμε να βρούμε διαμέριση P ώστε $\quad < \quad$.

Αν $\lambda<0$ $\quad m_k(\lambda f) = \quad = \quad =$

και $M_k(\lambda f) = \quad$ οπότε $0\le U(\lambda f\,P) - L(\lambda f,P) =$

$= \lambda\, L(f\,P) - \lambda\, U(f\,P) = (-\lambda)\big(\quad\big)$

άρα ή πάλι λf ολοκληρώσιμη. Αν $\lambda=0$ ισχύει από το προηγούμενο $\left(\int_a^b c\,dx = c(b-a)\right)$

Τέλος $\displaystyle\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \underline{\int_a^b}(\lambda f)(x) = \sup_P L(\lambda f,P) = \begin{cases} & \lambda\ge 0\\ & \lambda\le 0\end{cases}$

$$= \lambda\int_a^b f(x)\,dx \qquad \blacksquare$$

Έτσι έχουμε δείξει το εξής θεμελιώδες

Θεώρημα (γραμμικότητα του ολοκληρώματος) Αν $f,g:[ab]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες και $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ τότε και η $\lambda f+\mu g$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει $\displaystyle\int_a^b(\lambda f+\mu g)(x)\,dx = \lambda\int_a^b f(x)\,dx + \mu\int_a^b g(x)\,dx$ $\blacksquare$

<u>Θεώρημα</u> Αν $f : [a\, b] \to [c\, d]$ ολοκληρώσιμη και $g : [c\, d] \to \mathbb{R}$ ~~[illegible]~~ συνεχής

τότε και η σύνθεση $g \circ f : [a\, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη.

Η αποδειξη παραλείπεται.

<u>Θεώρημα</u> Αν $f : [a b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη

(i) $|f|$ ολοκληρώσιμη & $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

(ii) f^2 ολοκληρώσιμη

(iii) Αν $g : [a b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη τότε $f \cdot g$ ολοκληρώσιμη

<u>Απόδειξη</u> (i) Η $|f|$ είναι σύνθεση της f με την συνεχή

(και άρα ολοκληρώσιμη $g(x) = |x|$.

$$\pm f(x) \le |f(x)| \quad \forall x \in [a b] \Rightarrow \int_a^b \qquad \le$$

[Άσκηση : Αν $f \le g$ ολοκληρώσιμες στο $[a b]$, τότε $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$]

$$\Rightarrow \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

(ii)

(iii) $\left[(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow ab = \frac{1}{2}\left((a+b)^2 - a^2 - b^2\right) \right.$ polarization identity$\left.\right]$

$$fg = \frac{1}{2}\left((f+g)^2 - f^2 - g^2\right)$$

<u>Λήμμα</u> Αν $c \in (a\, b)$ τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση

$$\chi_{[a\, c]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in [a\, c] \\ 0 & \text{αν } x \in (c\, b] \end{cases}$$

καθώς και η

$$\chi_{[c\, b]}(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \in [a\, c) \\ 1 & \text{αν } x \in [c\, b] \end{cases}$$

είναι ολοκληρώσιμες

και $\int_a^b \chi_{[a c]}(x)\,dx = c - a$ & $\int_a^b \chi_{[c b]}(x)\,dx = b - c$

<u>Απόδειξη</u> Αν $\varepsilon > 0$ αρκεί να βρω $\mathcal{P}$ διαμέριση του $[a\ b]$ ώστε $U(\chi_{[a\ c]}, \mathcal{P}) - L(\chi_{[ac]}, \mathcal{P}) < \varepsilon$.

Θέτω $\mathcal{P} = \{a, c, b\}$, $0 \leq U(\chi_{[ac]}, \mathcal{P}) - L(\chi_{[ac]}, \mathcal{P}) =$

$$= \big(1 \cdot (c-a) + 0 \cdot (b-c)\big) - \big(1\,(c-a) + 0\,(b-c)\big) = 0 < \varepsilon$$

και $\displaystyle\int_a^b \chi_{[a\ c]}(x)\,dx = \underline{\int_a^b} \chi_{[ac]}(x)\,dx = \sup_{\mathcal{P}} L(\chi_{[ac]}, \mathcal{P}) = c-a$

διότι $\forall \mathcal{P}$ διαμέριση του $[ab]$ η $\mathcal{P} \cup \{c\}$ είναι εκλέπτυνση της $\mathcal{P}$ άρα $L(\chi_{[ac]}, \mathcal{P}) \leq L(\chi_{[ab]}, \mathcal{P} \cup \{c\}) =$

$$= \sum_{x_k = a}^{x_{k+1} = c} 1 \cdot (x_{k+1} - x_k) + \sum_{x_k = c}^{x_{k+1} = b} 0 \cdot (x_{k+1} - x_k) = c - a.$$

Ομοίως για την $\chi_{[c\ b]}$ (άσκηση)

<u>Θεώρημα</u> Αν $f : [a\ b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και $c \in (a\ b)$ τότε η f είναι ολοκληρώσιμη $\iff$ οι $f : [a\ c] \to \mathbb{R}$ & $f : [c\ b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες και σε αυτή την περίπτωση ισχύει

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

<u>Απόδειξη</u> "$\Longrightarrow$" Η $f \cdot \chi_{[a\ c]}$ είναι ολοκληρώσιμη ως γινόμενο ολοκληρωσίμων. Άρα $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $\mathcal{P}$ διαμ. του $[ab]$ ώστε

$0 \leq U(f\chi_{[ac]}, \mathcal{P}) - L(f\chi_{[ac]}, \mathcal{P}) < \varepsilon$. Προσθέτουμε στην $\mathcal{P}$ το σημείο c και θα ισχύει $0 \leq U(f\chi_{[ac]}, \mathcal{P} \cup \{c\}) - L(f\chi_{[ac]}, \mathcal{P} \cup \{c\}) < \varepsilon$ γιατί εκλεπτύνθηκε η διαμέριση

Άλλα φανερά $U(f\chi_{[ac]}, P\cup\{c\}) = U(f|_{[ac]}, \quad)$

και $L(f\chi_{[ac]}, P\cup\{c\}) = L(f|_{[ac]}, \quad)$

Άρα βρήκαμε διαμέριση P' (την $(P\cup\{c\})\cap[ac]$) ώστε

$0 \le U(f|_{[ac]}, P') - L(f|_{[ac]}, P') < \varepsilon$ οπότε η

$f|_{[ac]}$ είναι ολοκληρώσιμη. Ομοίως κ η $f|_{[cb]}$.

Εξαιτίας της ισχύει $\int_a^c f(x)\,dx = \sup_P L(f|_{[ac]}, P) =$

$$= \sup_P L(f\chi_{[ac]}, P) = \int_a^b (f\chi_{[ab]})(x)\,dx$$

Άρα από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (f\chi_{[ac]} + f\chi_{[cb]})(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b (f\chi_{[ac]})(x)\,dx + \int_a^b (f\chi_{[cb]})(x)\,dx$$

$$= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Ο ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ RIEMANN

Αν αντί να πάρουμε τα άνω και κάτω αθροίσματα $U(f P)$ κ $L(f P)$ παίρναμε αθροίσματα παραλληλογράμμων με βάσεις τα διαστήματα $[x_k\ x_{k+1}]$ της διαμέρισης και ύψος όχι τα m_k κ M_k αλλά τυχούσες τιμές της f σε σημεία $\xi_k \in [x_k\ x_{k+1}]$ επειδή $m_k \le f(\xi_k) \le M_k \quad \forall k=0,\dots,n-1$

θα είχαμε

$$L(f P) \le \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k) \le U(f P)$$

Έτσι αν Ξ τυχόν σύνολο σημείων που περιέχει ακριβώς ένα σε κάθε υποδιάστημα της $\mathcal{P}$, δηλ. $\Xi = \{\xi_0, \dots, \xi_{n-1}\}$ με

$$a = x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \cdots \le x_{n-1} \le \xi_{n-1} \le x_n = b$$

και θέσαμε $\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \Xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,(x_{k+1} - x_k)$

θα ισχύει $L(f,\mathcal{P}) \le \mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \Xi) \le U(f,\mathcal{P})$

οποια κι να είναι η επιλογή των σημείων Ξ.

Συνεπώς αν f ολοκληρώσιμη, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, \mathcal{P}_\varepsilon$ ώστε $0 \le U(f,\mathcal{P}_\varepsilon) - L(f,\mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon$. Αλλά $L(f,\mathcal{P}_\varepsilon) \le \int_a^b f(x)\,dx \le U(f,\mathcal{P}_\varepsilon)$

Άρα $\left| \int_a^b f(x)\,dx - \mathcal{R}(f, \mathcal{P}_\varepsilon, \Xi) \right| < \varepsilon$ για οποιαδήποτε επιλογή σημείων Ξ με ένα σημείο σε κάθε διάστημα της $\mathcal{P}_\varepsilon$.

Άρα τα αθροίσματα Riemann $\mathcal{R}(f, \mathcal{P}_\varepsilon, \Xi)$ και αυτά πλησιάζουν οσοδήποτε κοντά το $\int_a^b f(x)\,dx$. Θα θέλαμε όμως να δείξουμε και το αντίστροφο, δηλαδή ότι η συμπεριφορά των $\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \Xi)$ καθορίζει την ολοκληρωσιμότητα της f. Θα κάνουμε προσωρινά μια τροποποίηση στην ορολογία. Θα λέμε ότι η f είναι Darboux ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ αν $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, \mathcal{P}$ διαμ. του $[a,b]$ ώστε $0 \le U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < \varepsilon$ (όπως κάναμε μέχρι τώρα)

Θα λέμε ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ αν υπάρχει αριθμός $I(f)$ ώστε $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ ώστε για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[a,b]$ με $\|\mathcal{P}\| = \max\{x_{k+1} - x_k : k = 0, \dots, n-1\} < \delta \implies \forall$ επιλογή σημείων Ξ στην $\mathcal{P}$ ισχύει

$$\left| \mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \Xi) - I(f) \right| < \varepsilon$$

Θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι Darboux ολοκληρώσιμη $\iff$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Και ισχύει

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$