Μάθημα 16

Θεώρημα Έστω ότι η $f: [a\ b] \to \mathbb{R}$ είναι μια φραγμένη συνάρτηση.

Η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Darboux $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann.

Απόδειξη "$\Longleftarrow$" Έστω ότι $\varepsilon > 0$. Βρίσκουμε $\delta > 0$ ώστε αν $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ διαμέριση με $\|P\| = \max\{x_{k+1} - x_k \quad k = 0, 1, \dots, n-1\} < \delta$ και κάθε επιλογή σημείων $\Xi = \{\xi_0 \leq \xi_1 \leq \dots \leq \xi_{n-1}\}$ με $\xi_k \in [x_k\ x_{k+1}]$ να ισχύει

$$|R(f, P, \Xi) - I(f)| < \varepsilon/4 \Rightarrow \quad I(f) - \frac{\varepsilon}{4} < R(f, P, \Xi) < I(f) + \frac{\varepsilon}{4}$$

$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_k\ x_{k+1}]\}$ άρα το $m_k + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$ δεν είναι ... του $\{f(x) : x \in [x_k\ x_{k+1}]\}$ άρα υπάρχει $\xi_k' \in [x_k\ x_{k+1}]$ ώστε $m_k + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} > f(\xi_k') \Rightarrow m_k >$

Ομοίως για το M_k υπάρχει $\xi_k'' \in [x_k\ x_{k+1}]$ ώστε $M_k < f(\xi_k'') + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$. Άρα $m_k(x_{k+1} - x_k) > f(\xi_k')(x_{k+1} - x_k) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)}(x_{k+1} - x_k)$

$$\Rightarrow \quad L(f\ P) > R(f, P, \Xi') - \frac{\varepsilon}{4} > I(f) - \frac{\varepsilon}{2}$$

όπου $\Xi' = \{\xi_0'\ \xi_1' \dots \xi_{n-1}'\}$. Ομοίως $M_k(x_{k+1} - x_k) < f(\xi_k'')(x_{k+1} - x_k) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}(x_{k+1} - x_k)$

$$\Rightarrow \quad U(f\ P) < R(f\ P\ \Xi'') + \frac{\varepsilon}{4} < \_\_\_\_$$

όπου $\Xi'' = \{\xi_0'', \xi_1'', \dots, \xi_{n-1}''\}$.

Άρα $0 \leq U(fP) - L(fP) < I(f) + \frac{\varepsilon}{2} - I(f) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\Rightarrow$ f Darboux ολοκληρώσιμη.

και επιπλέον $I(f)-\frac{\varepsilon}{2} < L(f,P) \le \underline{\int_a^b} f(x) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le U(f,P) < I(f)+\frac{\varepsilon}{2}$

σελ 1 γραμμή $\square$ — αφού f Darboux ολοκλ. — σελ 1 γραμμή $\square$

$$\Rightarrow \quad \Big|\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{=\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx} - I(f)\Big| < \varepsilon, \quad \text{άρα} \quad I(f)=\int_a^b f(x)\,dx$$

"$\Leftarrow$" Έστω ότι $\varepsilon>0$. Η f Darboux ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. $\exists\, P_0$ ώστε $0 \le U(f,P_0) - L(f,P_0) < \varepsilon/4$

Έστω ότι M φράγμα της $|f|$ δηλ. $|f(x)| \le M$ $\forall x\in[a,b]$

Υποθέτουμε ότι $P_0=\{a=x_0<x_1<\dots x_{n_0}=b\}$. Θέτουμε $\delta=\frac{\varepsilon}{6n_0M}>0$

Θα αποδείξουμε ότι $\forall\, P$ με $\|P\|<\delta$ ισχύει

$$\Big|R(f,P,\Xi) - \int_a^b f(x)\,dx\Big| < \varepsilon \quad \forall\, \Xi.$$

Έστω λοιπόν P με $\|P\|<\delta$. Θέτουμε $P_1 = P\cup P_0$

Για την P_1 ισχύει το ζητούμενο διότι

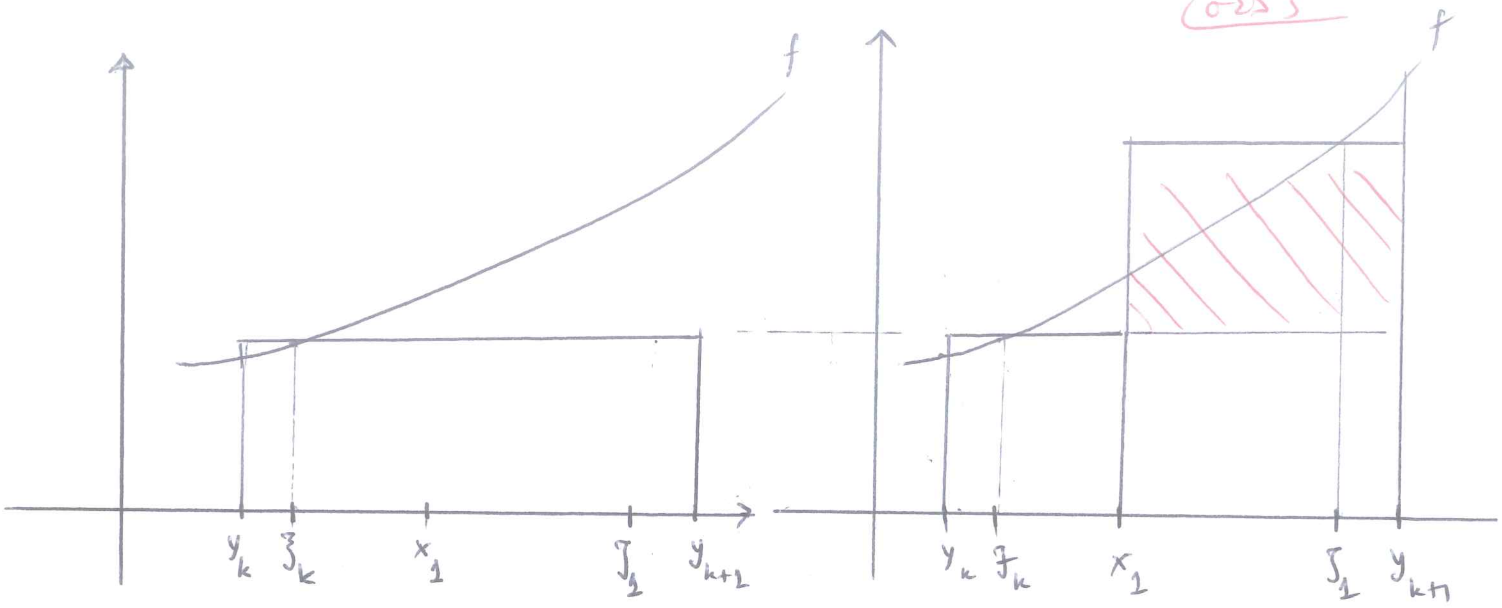
$$\int_a^b f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{4} < L(f,P_0) \le L(f,P_1) \le R(f,P_1,\Xi_1)$$
$$\le U(f,P_1) \le U(f,P) < \int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\Rightarrow \Big|\int_a^b f(x)\,dx - R(f,P_1,\Xi_1)\Big| < \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2} \ (<\varepsilon).$$

Εμείς όμως θέλουμε να δείξουμε το προηγούμενο για την P και όχι για την P_1. Θα αποδείξουμε ότι για κάθε επιλογή σημείων Ξ στην P υπάρχει επιλογή σημείων Ξ_1 στην P_1 ώστε

$$\big|R(f,P,\Xi) - R(f,P_1,\Xi_1)\big| < \varepsilon/2$$

Οπότε $\Big|\int_a^b f(x)\,dx - R(f,P,\Xi)\Big| \le \Big|\int_a^b f(x) - R(f,P_1,\Xi_1)\Big| + \big|R(f,P_1,\Xi_1) - R(f,P,\Xi)\big|$
$< \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon$



Θα προσθέσουμε στην P ένα-ένα τα σημεία της P_0 φτάνοντας στην P_1 μετά από n_0-1 το πολύ βήματα. (τα $x_0=a$ & $x_{n_0}=b$ είναι ήδη στην P)

Ας προσθέσουμε στην P το x_1 και να υπολογίσουμε πόσο άλλαξε το $R(f,P,\Xi)$. Έστω ότι $P=\{a=y_0<y_1<\dots<y_n=b\}$ και $\Xi=\{\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_{n-1}\}$ τυχαία επιλογή σημείων της P.

Προσθέτοντας το x_1 αυτό ανήκει σε κάποιο διάστημα της P έστω το $[y_k\ y_{k+1}]$. Σε αυτό ανήκει & το ξ_k. Φανερά είτε $\xi_k\in[y_k\ x_1]$ είτε $\xi_k\in(x_1, y_{k+1}]$. Χβτγ ας υποθέσουμε $\xi_k\in[y_k\ x_1]$. Θεωρούμε τυχόν σημείο ξ_1 στο $[x_1\ y_{k+1}]$.

Οπότε (δες σχήμα)

$$\left|R(f,P,\Xi)-R(f,P\cup\{x_1\},\Xi\cup\{\xi_1\})\right| = \left|(y_{k+1}-x_1)\cdot(f(\xi_1)-f(\xi_k))\right|$$

$$<\delta\cdot(|f(\xi_1)|+|f(\xi_k)|)\le\delta\cdot 2M=\frac{\varepsilon}{6n_0M}\,2M=\frac{\varepsilon}{3n_0}$$

Κάθε φορά που προσθέτουμε ένα σημείο το άθροισμα Riemann μεταβάλλεται κατά το πολύ $\frac{\varepsilon}{3n_0}$. Άρα συνολική μεταβολή στην προσθήκη n_0-1 σημεία είναι $\frac{\varepsilon}{3n_0}(n_0-1)<$

$$<\frac{\varepsilon}{3}<\frac{\varepsilon}{2}$$

ΛΟΣΗ 4

$$\left.\begin{array}{l} \text{Άρα } \left| R(f\ P\ \Xi) - R(f\ P_1\ \Xi_1) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{και } \left| \int_a^b f(x)\,dx - R(f\ P_1\ \Xi_1) \right| < \varepsilon/2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{r} (1) \\ (2) \end{array}$$

$$\Rightarrow \left| R(f\ P\ \Xi) - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \quad (3)$$

$$= \left| R(f\ P\ \Xi) - R(f\ P_1\ \Xi_1) + R(f\ P_1\ \Xi_1) - \int_a^b f(x)\,dx \right| \quad (4)$$

$$\leq \left| R(f\ P\ \Xi) - R(f\ P_1\ \Xi_1) \right| + \left| R(f\ P_1\ \Xi_1) - \int_a^b f(x)\,dx \right| \quad (5)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (6)$$