Μάθημα 17

Ασκήσεις

① Δείξτε ότι αν $f:[a\,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ είναι R-ολοκληρώσιμη τότε είναι φραγμένη (χωρίς αυτό να σημαίνει ότι η f έχει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή)

Λύση

Αν f όχι φραγμένη $\exists\, t_n\in[a\,b]$ ώστε $|f(t_n)|\longrightarrow+\infty$ χβτγ $f(t_n)\longrightarrow+\infty$. $t_n\in[a\,b]\Longrightarrow$ υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία της t_n. Έστω $t_{k_n}\longrightarrow t_0$. Άρα $f(t_{k_n})\xrightarrow[t_{k_n}\to t_0]{}+\infty$. Αφού f R-ολοκληρώσιμη υπάρχει αριθμός $I(f)$ ώστε $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0$ ώστε $\forall\,P$ διαμ. του $[a\,b]$ με $\|P\|<\delta$ ή $\forall\,\Xi$ = επιλογή ενδιάμεσων σημείων στην P να ισχύει $|R(f,P,\Xi)-I(f)|<\varepsilon \Longrightarrow I(f)-\varepsilon\le R(f,P,\Xi)\le I(f)+\varepsilon$

Αυτό ισχύει $\forall\,\Xi$ άρα μπορώ να διαλέξω πρώτα το διάστημα $[x_k\,x_{k+1}]$ που περιέχει το t_0 και μετά να χρησιμοποιήσω για ξ_k στο $[x_k\,x_{k+1}]$ το t_{k_n} (επίσης αν $x_k=t_0$ και $t_{k_n}<t_0$ οπότε σε αυτή την περίπτωση θα χρησιμοποιήσω για ξ_{k-1} στο $[x_{k-1}\,x_k]$ το t_{k_n}, και ομοίως αν $t_0=x_{k+1}$ ή $t_{k_n}>t_0$ θέτουμε ξ_{k+1} στο $[x_{k+1}\,x_{k+2}]$ το t_{k_n})

Σε κάθε περίπτωση το $R(f\,P\,\Xi)$ δεν μπορεί να είναι φραγμένο. Άτοπο.

Τέλος η $f(x)=\begin{cases}0 & \text{αν } x=\pm1\\ x & \text{αν } -1<x<1\end{cases}$ είναι R-ολοκληρώσιμη (φραγμένη) αλλά δεν έχει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή

② Αν f ολοκληρώσιμη $\Longrightarrow$ $|f|$ ολοκλ. από τη θεωρία.
Δείξτε ότι το αντίστροφο <u>δεν</u> είναι αληθές.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ -1 & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

③ Δείξτε ότι η $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \in [-1,1] \setminus \{0\} \\ 2 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

Είναι ολοκληρώσιμη.
(Παρατηρήστε ότι η f δεν είναι ούτε μονότονη ούτε συνεχής)

<u>Λύση</u> Έστω ότι $\varepsilon > 0$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει διαμέριση P του $[-1,1]$ ώστε $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.

Στο διάστημα $[\frac{\varepsilon}{24}, 1]$ και στο $[-1, -\frac{\varepsilon}{24}]$ η f είναι ολοκληρώσιμη ως συνεχής. Άρα $\exists$ P_1 διαμ. του $[\frac{\varepsilon}{24}, 1]$ και P_2 του $[-1, -\frac{\varepsilon}{24}]$ ώστε

$$0 \le U(f,P_1) - L(f,P_1) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{και}$$
$$0 \le U(f,P_2) - L(f,P_2) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Θέτουμε $P = P_1 \cup P_2$. Φανερά ισχύει

$$U(f,P) - L(f,P) = U(f,P_2) - L(f,P_2) + U(f,P_1) - L(f,P_1) + \left(\sup_{[-\frac{\varepsilon}{24},\frac{\varepsilon}{24}]} f(x) - \inf_{[-\frac{\varepsilon}{24},\frac{\varepsilon}{24}]} f(x) \right) \left(\frac{\varepsilon}{24} - \left(-\frac{\varepsilon}{24}\right) \right)$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \cancel{4} \, \frac{\varepsilon}{\cancel{12}_{3}} = \varepsilon$$

$$\left| \sup_{[\ ]} f - \inf_{[\ ]} f \right| \le |\sup f| + |\inf f| \le 2 + 2 = 4$$

④ Αν $f:[a\,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ φραγμένη και είναι συνεχής σε κάθε σημείο εκτός από κάποιο $x_0\in(a\,b)$ τότε η f είναι ολοκληρώσιμη.

Λύση Έστω ότι $|f(x)|\le M$ $\forall x\in[a\,b]$ και $\varepsilon>0$.

Θα βρούμε P διαμ. του $[a\,b]$ ώστε $U(f\,P)-L(f\,P)<\varepsilon$.

Θεωρούμε τα διαστήματα $[a\ \ x_0-\frac{\varepsilon}{24M}]$ και $[x_0+\frac{\varepsilon}{24M}\ \ b]$ στα οποία η f είναι συνεχής κ άρα ολοκληρώσιμη. Οπότε υπάρχει P_1 κ P_2 διαμ. των παραπάνω διαστημάτων ώστε $U(f\,P_1)-L(f\,P_1)<\varepsilon/3$ και $U(f\,P_2)-L(f\,P_2)<\varepsilon/3$

Θέτουμε $P=P_1\cup P_2$ οπότε

$$U(f\,P)-L(f\,P)=U(f\,P_1)-L(f\,P_1)+U(f\,P_2)-L(f\,P_2)+\Big(\sup_{[x_0-\frac{\varepsilon}{24M},\,x_0+\frac{\varepsilon}{24M}]} f(x)-\inf f(x)\Big)\Big(\big(x_0+\tfrac{\varepsilon}{24M}\big)-\big(x_0-\tfrac{\varepsilon}{24M}\big)\Big)$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+2M\cdot\frac{\varepsilon}{12M}=\frac{2\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{6}<\varepsilon$$

Παρατήρηση Το ίδιο ισχύει αν η f έχει N σημεία ασυνέχειας $x_1,x_2,\dots,x_N\in(a\,b)$. Απλά κάντε πλήρη επαγωγή στο $N\in\mathbb{N}$. (άσκηση)

(Η άσκηση ④ είναι το $N=1$. Αν ισχύει για $\le N$ σημεία ασυνέχειας κ τώρα έχετε μια συνάρτηση που έχει $N+1$ σημεία ασυνέχειας όπου x_{N+1} είναι το $N+1$-στο σημείο παρατηρήστε ότι στο $[a\ \ x_{N+1}-\frac{\varepsilon}{24M}]$ κ $[x_{N+1}+\frac{\varepsilon}{24M}\ \ b]$ έχει λιγότερα (ίσα) από N σημεία ασυνέχειας)

Άσκηση 5 Αν $f:[a\,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής με $f(x)\ge 0\ \ \forall x\in[a\,b]$ και $\int_a^b f(x)\,dx=0$ τότε $f(x)=0\ \ \forall x\in[a\,b]$

Λύση Αν $\exists\ x_0\in[a\,b]$ ώστε $f(x_0)>0$

Εφαρμόζουμε τον ορισμό της συνέχειας με $\varepsilon=\frac{f(x_0)}{2}>0$

Άρα $\exists\ \delta>0$ ώστε $\forall\ |x-x_0|<\delta \Longrightarrow |f(x)-f(x_0)|<\frac{f(x_0)}{2}$

$$\Longrightarrow -\frac{f(x_0)}{2}<f(x)-f(x_0)<\frac{f(x_0)}{2} \Longrightarrow \frac{f(x_0)}{2}<f(x)<\frac{3f(x_0)}{2}.$$

Άρα (αν υποθέσουμε ότι $x_0\in(a\,b)$)

$$0=\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^{x_0-\delta} f(x)\,dx+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx+\int_{x_0+\delta}^{b} f(x)\,dx.$$

$$\ge 0+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx+0$$

$$\ge \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{f(x_0)}{2}\,dx=2\delta\cdot\frac{f(x_0)}{2}>0$$ άτοπο

Αν $x_0=a$ ή $x_0=b$ ομοίως (άσκηση)

Άσκηση 6 Έστω ότι $f:[a\,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0\in(a\,b)$. Δείξτε ότι $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt=f(x_0)$

Λύση Παρατηρήστε ότι $f(x_0)=\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(x_0)\,dt$

(γιατί $\int_{x_0}^{x} c\,dt=c(x-x_0)$). Άρα (αν $x>x_0$)

$$\left|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt-f(x_0)\right|=\frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt-\int_{x_0}^{x} f(x_0)\,dt\right|$$

$$=\frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^{x}\left(f(t)-f(x_0)\right)dt\right|\le\frac{1}{|x-x_0|}\int_{x_0}^{x}|f(t)-f(x_0)|\,dt$$

(*)

Αλλά f συνεχής στο x_0 άρα $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta>0$ ώστε (1)

αν $|t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ (2)

Έτσι, για αυτό το δ, αν $|x-x_0| < \delta \Rightarrow$ (3)

$$\int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)| dt \leq \int_{x_0}^{x} \varepsilon \, dt = \varepsilon (x - x_0) \quad (4)$$

Συνεχίζοντας από (*) $\leq \dfrac{1}{|x-x_0|} \varepsilon |x-x_0| = \varepsilon$. (5)

Δηλ. $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta>0$ ώστε αν $|x-x_0| < \delta \Rightarrow$ (6)

$$\left| \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt - f(x_0) \right| < \varepsilon \quad \text{οπότε} \quad (7)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt = f(x_0) \quad (8)$$