Μάθημα 18

Άσκηση

① Αν $f:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι η ακολουθία

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

συγκλίνει στο $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Λύση Η διαμέριση $P_n = \left\{0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots < \frac{k}{n} < \dots < \frac{n}{n} = 1\right\}$

έχει λεπτότητα $\|P\| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Σε κάθε διάστημα $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ επιλέγω $\xi_k = \frac{k}{n}$ για να

σχηματίσω το σύνολο Ξ_n

Από το Θ. Riemann $\quad R(f, P_n, \Xi_n) \longrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx$

Αλλά $\quad R(f, P_n, \Xi_n) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$

Π.χ. (εφαρμογή) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx$

διότι $\displaystyle \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$

Ορισμός Για μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ορίζουμε τη μέση τιμή της να είναι ο αριθμός

$$\mathbb{E}(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Θεώρημα (Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού) Έστω ότι $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής και $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη με $g(x)\geq 0$ $\forall x$. Τότε υπάρχει $\xi\in[a,b]$ ώστε

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$$

<u>Απόδειξη</u> f, g ολοκληρώσιμες άρα $f \cdot g$ ολοκληρώσιμη

f συνεχής στο $[a\, b]$ άρα έχει μέγιστο και ελάχιστο θεώρημα

$m = \cancel{\inf}\ \min f(x)$ & $M = \max f(x)$ οπότε

$$m \le f(x) \le M \xrightarrow{\cdot g} m\, g(x) \le f(x) g(x) \le M\, g(x)$$

$$\overset{\int_a^b}{\Longrightarrow} \quad m \cdot \int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x) g(x)\,dx \le M \cdot \int_a^b g(x)\,dx$$

Τώρα αν $\int_a^b g(x)\,dx > 0 \Longrightarrow m \le \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \le M$

και από το Θ. Ενδιάμεσης Τιμής (του ΑΠ1) $\exists\ \xi \in [a\, b]$ ώστε

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x) g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$$

(Αν $\int_a^b g(x)\,dx = 0 \Longrightarrow \int_a^b f(x)\, g(x)\,dx = 0$ ▨

Άρα η ζητούμενη ισχύει $\forall \xi$)

<u>Πόρισμα</u> Έστω ότι $f : [a\, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Υπάρχει $\xi \in [a\, b]$ ώστε

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

<u>Απόδειξη</u> Στο προηγούμενο θεώρημα θέτουμε $g(x) = 1$ οπότε ▨

$$\int_a^b g(x)\,dx = b - a$$

Τα θεμελιώδη θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού.

<u>**ΟΡΙΣΜΟΣ**</u> (αόριστο ολοκλήρωμα) Έστω ότι $f : [a b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[a\, x]$ $\forall x \in [a\, b]$. Το αόριστο ολοκλήρωμα της f είναι η συνάρτηση $F : [a\, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Θεώρημα Έστω ότι $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Το αόριστο ολοκλήρωμα F είναι συνεχής.

Απόδειξη f ολοκληρώσιμη $\Rightarrow \exists M\in\mathbb{R}: |f(x)|\le M \quad \forall x\in[a,b]$

Αν $x<y$ στο $[a,b]$

$$|F(y)-F(x)| = \left|\int_a^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right| = \left|\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right|$$

$$= \left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \le \int_x^y |f(t)|\,dt \le \int_x^y M\,dt =$$

$$= M(y-x) = M|y-x|$$

(ομοίως αν $x>y$) Άρα η F είναι Lipschitz άρα και συνεχής ∎

Θεώρημα Η F είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0\in[a,b]$ στο οποίο η f είναι συνεχής, και ισχύει $F'(x_0)=f(x_0)$.

Απόδειξη Έστω $a<x_0<b$ και f συνεχής στο x_0. Θέτουμε $\delta_1=\min\{b-x_0,\ x_0-a\}$ και αν $|h|<\delta_1$ τότε

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right) - f(x_0)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - h f(x_0)\right) =$$

$$= \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dt\right) =$$

$$= \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \big(f(t)-f(x_0)\big)\,dt \qquad \text{οπότε}$$

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \le \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t)-f(x_0)|\,dt \qquad (\star)$$

Αλλά f συνεχής στο x_0. Άρα $\forall \varepsilon>0 \ \exists \ 0<\delta<\delta_1$ ώστε
αν $|t-x_0|<\delta \Rightarrow |f(t)-f(x_0)|<\varepsilon$

Άρα, αν $|h|<\delta \Rightarrow \forall \ t\in[x_0, \ x_0+h]$ ισχύει $|t-x_0|<|h|<\delta$
οπότε $|f(t)-f(x_0)|<\varepsilon$ Άρα από την ⊛

$$\left| \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon \, dt = \varepsilon$$

Δηλαδή $\forall \varepsilon>0 \ \exists \ \delta>0: \ \forall \ |h|<\delta \Rightarrow$

$$\left| \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| < \varepsilon$$

Άρα
$$\underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}}_{F'(x_0)} = f(x_0)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Πρώτο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απ. Λογ.)
Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής τότε το αόριστο ολοκλήρωμα F της f είναι [redacted] παραγωγίσιμη και ισχύει

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x\in[a,b]$$

Ορισμός Η G λέγεται παράγουσα της f αν $G'=f$
ή αντιπαράγωγος

Έτσι, το αόριστο ολοκλήρωμα $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ είναι μια παράγουσα ή αντιπαράγωγος της f. Αν G μια άλλη αντιπαράγωγος τότε $(G-F)'=G'-F'=f-f=0$
οπότε $\exists$ σταθερά c ώστε $G-F=c$

Αλλά $F(a)=\int_a^a f(t)\,dt = 0$ Οπότε (1)

$c = G(a) - F(a) = G(a)$. Άρα $G(x) - F(x) = c = G(a)$ (2)

$\Rightarrow F(x) = G(x) - G(a) \Rightarrow$ (3)

$\Rightarrow F(b) = G(b) - G(a) \Rightarrow \boxed{\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)}$ (4)

ή γενικότερα $\boxed{\int_a^x f(t)\,dt = G(x) - G(a)}$ (5)

Έτσι $\int_a^b x^2\,dx = G(b) - G(a)$ για G μια αντιπαράγωγος της x^2 (6)

Αν πχ θέσω $G(x) = \frac{x^3}{3}$ ισχύει $\int_a^b x^2\,dx = G(b) - G(a) = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$ (7)

Άρα $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$ (8)

<u>Προσοχή</u> Επειδή $G' = f$ δεν μπορούμε να γράψουμε (9)

$G(x) - G(a) = \int_a^x G'(t)\,dt$ ξεχνώντας (10)

ότι αυτό είναι σωστό υπό τον όρο η f (δηλαδή η G') (11)

να είναι συνεχής. (12)

Πχ αν $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ $G(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x^2 \sin\frac{1}{x^2} & 0 < x \le 1 \end{cases}$ (13)

ο προηγούμενος τύπος στη γραμμή (10) ΔΕΝ ισχύει γιατί: (14)

η $G'(t) = 2t\sin\frac{1}{t^2} - t^2\left(\cos\frac{1}{t^2}\right)\cdot\frac{2}{t^3}$ για $x > 0$ (15)

η οποία δεν είναι φραγμένη για $t \to 0^+$ οπότε (16)

η G' δεν είναι καν ολοκληρώσιμη. (17)